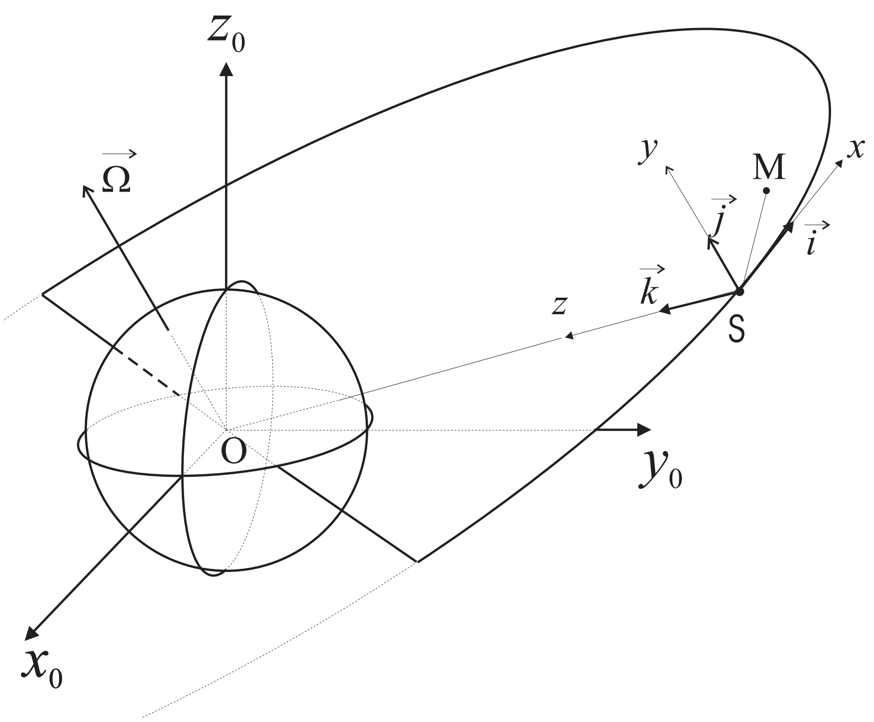
BUREAUX D'ETUDES RENDEZ-VOUS SPATIAL

Soit un satellite S en orbite autour d'une planète de centre O et un module M orbitant à proximité de S.



Définition des repères

Les équations différentielles du mouvement du module M dans le plan orbital de la station spatiale S s'écrivent,en projection dans le repère orbital local $\left\{S, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ de la station S :

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{z} = \varphi_x$$
$$\ddot{z} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = \varphi_z$$

Les scalaires φ_x et φ_z sont les forces spécifiques de propulsion du module (respectivement tangentielle et radiale).

1) Mettre ce système sous forme d'état (Equation 1) :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{Bu}$$

en prenant comme vecteur d'état $\mathbf{X}^T = (z, x, \dot{z}, \dot{x})$ et comme vecteur de commande $\mathbf{u}^T = (\varphi_z, \varphi_x)$.

2) Le système est-il gouvernable en utilisant uniquement :

a) la poussée radiale φ_z seule ?

b) la poussée tangentielle φ_x seule ?

On supposera dans ce qui suit qu'une seule des deux poussées est utilisée : laquelle ?

3) Le module M étant à l'instant $t = 0$ dans un état initial mesuré $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$, on désire qu'il réalise un rendez-vous avec la station spatiale à l'instant donné $t = T$. Trouver la trajectoire optimale $\mathbf{X}(t)$ et la commande optimale $u(t)$ [1] qui réalise ce rendez-vous en $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ en minimisant le critère énergétique :

$$\mathscr{C} = \int_0^T \frac{1}{2} u^2 dt$$

Dans un premier temps, on va appliquer le principe du maximum **littéralement** en fonction des paramètres **A** et **B** et des variables **X**, u et t.

1. Ici u est de dimension 1 car on n'utilise que la commande sélectionnée à la question précédente.

3.1) Ecrire le Hamiltonien du système

3.2) En déduire l'équation différentielle du vecteur adjoint ψ. On constate qu'elle est indépendante de $\mathbf{X}$ et u et qu'elle peut s'intégrer en fonction d'un vecteur adjoint initial $\psi(0) = \psi_0$ inconnu. Donnez l'expression de $\psi(t)$ en fonction de ψ_0 et t.

3.3) Maximisez le Hamiltonien. Déduisez l'expression de la commande optimale $\hat{u}(t)$ en fonction de ψ_0 et t (Equation 2).

3.4) Reportez cette commande dans l'équation d'état du système et intégrez cette équation différentielle [2].

On vérifiera que la solution fait intervenir la matrice suivante :

$$\mathbf{C}(t) = \int_0^t \mathbf{D}(\tau)\mathbf{D}(\tau)^T d\tau \text{ avec } \mathbf{D}(\tau) = e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}$$

Exprimez $\mathbf{X}(t)$ en fonction de $e^{\mathbf{A}t}$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{X}_0$ et ψ_0 (Equation 3).

3.5) Utiliser la contrainte terminale $\mathbf{X}(T) = \mathbf{0}$ pour résoudre le problème au deux bouts. Donnez l'expression de ψ_0 en fonction $\mathbf{C}(T)$ et de $\mathbf{X}_0$. En reportant cette expression dans les équation 2 et 3, donnez les expressions de la commande optimale $\hat{u}(t)$ en boucle ouverte en fonction de $\mathbf{D}(t)$, $\mathbf{C}(T)$, $\mathbf{X}_0$ et t, et de la trajectoire optimale $\mathbf{X}(t)$ en fonction de $e^{\mathbf{A}t}$, $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{C}(T)$ et $\mathbf{X}_0$.

3.6) Donner l'expression de la commande optimale en boucle fermée $\hat{u}(t)$ en fonction de $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, t, T et $\mathbf{X}(t)$.

3.7) Donnez l'expression du revenu $\mathscr{R}(t) = \int_t^T \frac{1}{2}u^2 dt$ en fonction de $\psi(t)$ et $\mathbf{X}(t)$. En déduire la valeur du critère en fonction de ψ_0 et $\mathbf{X}_0$.

4) En symbolique sous Matlab :

4.1) Ecrire en fonction des variables symboliques réelles `w` = ω, `t` = t et `T` = T les matrices suivantes `A`, `B`, `Ea_t` = e^{At}, `Ema_t` = e^{-At}, `D_t` = $D(t) = e^{-At}B$ et `C_t` = $C(t) = \int_0^t \mathbf{D}(\tau)\mathbf{D}(\tau)^T d\tau$.

4.2) Dans le cas particulier $\omega = \frac{2\pi}{T_{orb}}$ rd/s et $T = \frac{1}{4}T_{orb}$, avec $T_{orb} = 5400$s :

— Instanciez les éléments précédents,

— Calculez `C_T` = $C(T)$.

4.3) Pour les 4 cas initiaux suivants :

— 1. $z(0) = \dot{z}(0) = \dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 1000$ m,
 2. $z(0) = \dot{z}(0) = \dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = -1000$ m,
 3. $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = 1000$ m,
 4. $x(0) = \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = -1000$ m,

calculez `P_0` = ψ_0, `X_t` = $x(t)$ et `U_t` = $u_{BO}(t)$ et tracez :

— les 4 trajectoires d'état $z(t), x(t), \dot{z}(t), \dot{x}(t)$ dans le même graphe,

— la trajectoire de commande $u(t)$ dans un autre

— la trajectoire dans le plan orbital $x = F(z)$.

Dans quel cas la comsommation d'énergie est-elle la plus grande.

Sachant que le module dispose d'une énergie égale à 1 (unité de calcul du critère) et qu'à l'instant $t = 0$ il se trouve exactement sur la même orbite que la station ($z(0) = 0$), avec une vitesse nulle ($\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0$), jusqu'à quelle distance maximale $|x(0)|_{max}$ peut-on réaliser le rendez-vous ?

2. On rappelle que la solution générale d'une équation différentielle linéaire est la somme de la solution sans second membre et d'une solution particulière avec second membre. Cette dernière peut s'obtenir par la méthode de la variation de la constante (Cf. annexe).