FORMULAIRE DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE

O est un point fixe, G le centre d'inertie et A un point quelconque.
Sauf indication contraire, les dérivations de vecteurs, les vitesses et accélérations sont relatives à un repère galiléen. De plus, pour un solide :

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \overrightarrow{\mathrm{AG}} \times \vec{\Omega} = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{\mathrm{GA}}$$

Résultante dynamique

$$\vec{R} = \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \vec{f}_{\mathrm{ext}\,i}$$

Résultante cinétique

$$\vec{q} = \sum_i m_i \vec{V}_i = M\vec{V}_{\mathrm{G}}$$

Formule fondamentale de la dynamique (Newton)

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\left(\vec{q}\right) = M\vec{\Gamma}_{\mathrm{G}}$$

Moment dynamique résultant en A

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{A}} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{AM}_i} \times \vec{f}_i = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{AM}_i} \times \vec{f}_{\mathrm{ext}\,i}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{A}} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \vec{R}$$

Moment cinétique résultant en A

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}} = \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{AM}_i} \times \vec{V}_i = \vec{\sigma}_{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \vec{q}$$

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{G}} = \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} \times \vec{V}_i = \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} \times \vec{v}_{i/\mathrm{G}}$$

Pour un solide

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{A}} = \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\left(\vec{\Omega}\right) + M\overrightarrow{\mathrm{AG}} \times \vec{V}_{\mathrm{A}}$$

avec $\mathcal{I}_{\mathrm{A}(\Sigma)} = \mathcal{I}_{\mathrm{A}(M,\,\mathrm{G})} + \mathcal{I}_{\mathrm{G}(\Sigma)}$

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{O}} = \mathcal{I}_{\mathrm{O}}\left(\vec{\Omega}\right)$$

$$\vec{\sigma}_{\mathrm{G}} = \mathcal{I}_{\mathrm{G}}\left(\vec{\Omega}\right)$$

Formule d'Euler

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{A}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{\mathrm{A}}\right) + \vec{V}_{\mathrm{A}} \times \vec{q}$$ [1]

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{\mathrm{O}}\right)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{G}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}_{\mathrm{G}}\right)$$

Puissance

$$p = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{V}_i = \vec{R} \cdot \vec{V}_{\mathrm{G}} + \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{i/\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}} + p_{r\mathrm{G}}$$

$p_{\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G}_{\mathrm{ext}}}$ et $p_{r\mathrm{G}} = p_{r\mathrm{G}_{\mathrm{ext}}} + p_{r\mathrm{G}_{\mathrm{int}}}$ [2]

Pour un solide

$$p_{r\mathrm{G}} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\Omega}$$

Énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{V}_i^2 = \frac{1}{2}M\vec{V}_{\mathrm{G}}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_{i/\mathrm{G}}^2 = E_{c\mathrm{G}} + E_{cr\mathrm{G}}$$

Pour un solide

$$E_c = \frac{1}{2}M\vec{V}_{\mathrm{A}}^2 + M\vec{V}_{\mathrm{A}} \cdot \left(\vec{\Omega} \times \overrightarrow{\mathrm{AG}}\right) + \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \mathcal{I}_{\mathrm{A}}\left(\vec{\Omega}\right)$$

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \mathcal{I}_{\mathrm{O}}\left(\vec{\Omega}\right)$$

$$E_{cr\mathrm{G}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left\|\vec{\Omega} \times \overrightarrow{\mathrm{GM}_i}\right\|^2 = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \mathcal{I}_{\mathrm{G}}\left(\vec{\Omega}\right)$$

Théorème de l'énergie

$$p = \frac{d}{dt}\left(E_c\right),\ p_{\mathrm{G}} = \frac{d}{dt}\left(E_{c\mathrm{G}}\right) \rightarrow p_{r\mathrm{G}} = \frac{d}{dt}\left(E_{cr\mathrm{G}}\right)$$

1. Exceptionnellement, dans cette formule $\vec{V}_{\mathrm{A}}$ est la vitesse “géométrique” du point A. Elle est extrêmement dangereuse à utiliser, cf. la relation $\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{A}} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{\mathrm{A}}\left(\vec{\Omega}\right) + M\overrightarrow{\mathrm{AG}} \times \vec{V}_{\mathrm{A}}\right) + \vec{V}_{\mathrm{A}} \times \vec{q}$ où les deux $\vec{V}_{\mathrm{A}}$ n'ont pas la même valeur !!!
2. $p_{r\mathrm{G}_{\mathrm{int}}}$ peut être calculée relativement à un repère non galiléen