Trajectoires optimales par :
la programmation non linéaire
la programmation dynamique
le principe du maximum

Michel Llibre

ONERA - DCSD

Problème général étudié

Trouver la trajectoire et la commande amenant un système

- **d'un état initial généralement donné** (sauf si on optimise le point de départ)
- **à un état final donné ou non,**

en respectant des contraintes

- **locales instantanées sur l'état et la commande,**
- **globales, c'est-à-dire reliant des états et des commandes à des instants différents,**

qui minimimise un critère portant sur les états et les commandes.

PNL : Exemple simple (1)

Amener un système commandé en vitesse

$$x_{n+1} = x_n + u_n$$

d'un état initial x_0^* donné à $x_N = 0$ en N coups, tout en minimisant l'énergie dépensée :

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2$$

On forme un Lagrangien en ajoutant au critère à minimiser les équations des contraintes égalités multipliées par des paramètres de Lagrange :

- η **associé à la contrainte** $x_0 - x_0^* = 0$
- ξ **associé à la contrainte** $x_N = 0$
- ψ_{n+1} **associés aux contraintes** $x_n + u_n - x_{n+1} = 0$ **pour** $n = 0$ **à** $N-1$

PNL : Exemple simple (2)

On obtient le lagrangien

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}(x_n + u_n - x_{n+1}) + \eta(x_0 - x_0^*) + \xi x_N$$

que l'on minimise par rapport à toutes les inconnues η, ξ, $\{\psi_n\}_1^N$, $\{x\}_0^N$ et $\{u\}_0^{N-1}$.

$\mathcal{L}_\eta = 0$, $\mathcal{L}_\xi = 0$ **et** $\mathcal{L}_{\psi_n} = 0$ **redonnent les contraintes,**

$\mathcal{L}_{u_n} = 0 \rightarrow 2u_n + \psi_{n+1} = 0 \rightarrow \hat{u}_n = -\frac{1}{2}\psi_{n+1}$ **pour** $n = 0$ **à** $N-1$

$\mathcal{L}_{x_n} = 0 \rightarrow \psi_{n+1} - \psi_n = 0 \rightarrow \psi_n = \psi_{n+1}$ **pour** $n = 1$ **à** $N-1$

$\mathcal{L}_{x_0} = 0 \rightarrow \psi_1 + \eta = 0$ **et** $\mathcal{L}_{x_N} = 0 \rightarrow -\psi_N + \xi = 0$.

η et ξ n'interviennent que dans ces 2 dernières équations. On les ignore $\rightarrow$ ψ_1 et ψ_N demeurent inconnus

PNL : Exemple simple (3)

On a un problème aux deux bouts : Un système d'équations récurrentes

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\psi_{n+1} \\ \psi_n &= \psi_{n+1} \end{aligned}$$

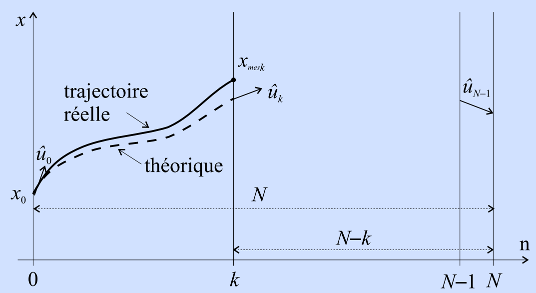
avec des inconnues aux deux bouts (ψ_1 et ψ_N égales dans ce cas particulier).

Ici on peut intégrer dans le sens direct en fonction de l'inconnue ψ_1 et de la donnée x_0^*. On trouve :

$$x_N = x_0^* - \frac{N}{2}\psi_1 = 0 \rightarrow \psi_1 = \frac{2}{N}x_0^* \rightarrow \hat{u}_n = -\frac{1}{N}x_0^*$$

Commande boucle fermée (par anticipation) : $\hat{u}_{BFn} = -\frac{1}{N-n}x^*_{MESn}$

PNL : Passage à la boucle fermée par changement d'horizon



Commande boucle ouverte classique :

$$\hat{u}_n = e\left(x_n, n, N\right) \rightarrow \hat{u}_0 = e\left(x_0, 0, N\right)$$

Commande boucle fermée :

$$\hat{u}_{BFn} = e\left(x_{MESn}, 0, N - n\right)$$

PNL : Cas général (1). Position du problème

Etant donnés les relations :

Etat.	:	$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n)$	:	ψ_{n+1}	**(p. L.)**
C. Instantanées.	:	$\gamma_n(x_n, u_n, n) \leq 0$	:	$\mu_n \geq 0$	**(p. K.&T.)**
C. Globales.	:	$g(x_0, \ldots, x_N, u_0, \ldots, u_{N-1}) \leq 0$	:	$\lambda \geq 0$	**(p. K.&T.)**
C. Initiales	:	$h(x_0) = 0$	:	η	**(p. L.)**
C. Finales	:	$l(x_N) = 0$	:	ξ	**(p. L.)**

et le critère :

$$C = C(x_0, \ldots, x_N, u_0, \ldots, u_{N-1})$$

trouver $\{\hat{u}_n\}_0^{N-1}$ qui minimise C tout en respectant les contraintes.

SUPAERO ONERA

PNL : Cas général (2). Les conditions nécessaires de stationnarité.

On minimise le lagrangien $\mathcal{L}$ par rapport aux inconnues $\{\psi_n\}_1^N$, $\{x\}_0^N$ et $\{u\}_0^{N-1}$.

$$\mathcal{L} = C + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^T (f_n - x_{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^T \gamma_n + \lambda^T g + \eta^T h + \xi^T l$$

Conditions nécessaires de stationnarité :

Cde. Opt.	$\{\mathcal{L}_{u_n} = 0\}_0^{N-1}$	$C_{u_n} + f_{u_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{u_n}^T \mu_n + g_{u_n}^T \lambda = 0$	$\hat{u}_n = B_n(x_n, \psi_{n+1}, \mu_n, \lambda)$
Eq. Etat	$\{\mathcal{L}_{\psi_n} = 0\}_1^{N-1}$	$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n)$	$x_{n+1} = D_n(x_n, \psi_{n+1}, \mu_n, \lambda)$
Syst. Ad.	$\{\mathcal{L}_{x_n} = 0\}_1^{N-1}$	$C_{x_n} + f_{x_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{x_n}^T \mu_n + g_{x_n}^T \lambda - \psi_n = 0$	$\psi_n = E_n(x_n, \psi_{n+1}, \mu_n, \lambda)$
Trans. Ini.	$\mathcal{L}_{x_0} = 0$	$C_{x_0} + f_{x_0}^T \psi_1 + \gamma_{x_0}^T \mu_0 + g_{x_0}^T \lambda + h_{x_0}^T \eta = 0$	$\psi_0 = -h_{x_0}^T \eta$
Trans. Fin.	$\mathcal{L}_{x_N} = 0$	$C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi - \psi_N = 0$	$\psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi$

SUPAERO ONERA

PNL : Cas général (3). Le problème aux deux bouts.

En l'absence de contraintes inégalités :

Si on sait calculer $\hat{u}_n = B_n(x_n, \psi_{n+1}) \rightarrow$ système non-linéaire (en général) à $2(N+1)m$ inconnues.

Peut-on le résoudre par substitution, en intégrant le système discret d'ordre $2m$ état + système adjoint ?

Dans les cas particuliers états initial et/ou final fixé ou libre, les conditions de transversalité :

$$\begin{cases} x_0 \text{ fixé} & \rightarrow \quad \psi_0 \text{ libre} \\ x_0 \text{ libre} & \rightarrow \quad \psi_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_N \text{ fixé} & \rightarrow \quad \psi_N \text{ libre} \\ x_N \text{ libre} & \rightarrow \quad \psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda \end{cases}$$

mettent en évidence le problème aux deux bouts

PNL : Cas général (4). Résolution itérative par une méthode du gradient

En l'absence de contraintes inégalités :

1. **Choix initial de x_0 et ψ_0 (ou de x_N et ψ_N)**
2. **Résolution $\hat{u}_n = B_n(x_n, \psi_{n+1})$ et intégration directe (inverse) système et adjoint.**
3. **Obtention des valeurs de x_N et ψ_N (ou de x_0 et ψ_0).**
4. **Exploitation de l'erreur sur les conditions de transversalité pour modifier x_0 et ψ_0 (ou x_N et ψ_N) par la méthode du gradient. Retour en 2 ou fin si erreur acceptable.**

La convergence de cet algorithme n'est pas assurée.

PNL : Cas général (5). Utilisation des conditions de transversalité lorsque les états sont partiellement contraints

1. x_0 contraint par r_0 relations $h(x_0) = 0$ avec $r_0 \leq m \rightarrow \psi_0 = -h_{x_0}^T \eta$
   L'élimination des r_0 composantes inconnues de η dans ces m équations fournit $m - r_0$ relations entre les composantes de ψ_0 et x_0 qui avec les r_0 relations $h(x_0) = 0$ font un total de m relations liant ces composantes.

2. x_N contraint par r_N relations $l(x_N) = 0$ avec $r_N \leq m \rightarrow \psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi$.
   L'élimination des r_N composantes inconnues de ξ dans ces m équations fournit $m - r_N$ relations entre les composantes de ψ_N et x_N qui avec les r_N relations $l(x_N) = 0$ font un total de m relations liant ces composantes.

PNL : Cas général (6). Remarque sur l'utilisation des conditions de transversalité

- Que l'intégration soit directe ou rétrograde elle se fait en fonction de m paramètres donnés et de m paramètres inconnus. A l'issue de cette intégration, les m conditions initiales dans le cas direct ou finales dans le cas rétrograde fournissent les m équations qui permettent de calculer ces paramètres inconnus.

- Les paramètres η et ξ sont systématiquement éliminés pour établir des relations qui lient ψ et x. Ensuite, ils ne servent plus à rien dans le traitement du problème.

PNL : Cas général (7). Traitement des contraintes inégalités

1. A priori on suppose qu'elles sont vérifiées en annulant les paramètres de Kuhn et Tucker. On résout le problème général avec $\mu_n^i = 0$ et $\lambda^i = 0$. On vérifie les contraintes $\gamma_n^i \leq 0$ et $g^i \leq 0$ a posteriori.
2. Si des contraintes sont non vérifiées, elles sont imposées. On résout le nouveau problème général avec ces nouvelles contraintes égalités, par exemple $\gamma_n^j = 0$ et $g^k = 0$ qui permettent de calculer a posteriori les p. de K.&T. associés qui doivent être positifs : $\mu_n^j \geq 0$ et $\lambda^k \geq 0$. Les contraintes inégalités non prises en comptes doivent être vérifiées.
3. Si ce n'est pas le cas, nouvelle résolution compte tenu des échecs.

Le nombre de cas à traiter (combinaisons des différents cas de contraintes imposées ou non) peut être rédhibitoire.

PNL : Cas particulier SLCQ (1)

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \text{ , } \begin{cases} x_0 \text{ donné qcq} \\ x_N \text{ donné } = 0 \end{cases}$$

$$\text{critère : } C = \min_{\{x_n, u_n\}} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^T R u_n$$

Conditions nécessaires de stationnarité :

Com. Opt	$\{\mathcal{L}_{u_n} = 0\}_0^{N-1}$	$Ru_n + B^T\psi_{n+1} = 0$	$\hat{u}_n = -R^{-1}B^T\psi_{n+1}$
Syst. Adj.	$\{\mathcal{L}_{x_n} = 0\}_1^{N-1}$	$\psi_n = A^T\psi_{n+1}$	$\psi_{n+1} = \left(A^T\right)^{-1}\psi_n$
Trans. Ini.	$\mathcal{L}_{x_0} = 0$	$x_0 = x_0^*$	$\psi_0 = -\eta$ quelconque
Trans. Fin.	$\mathcal{L}_{x_N} = 0$	$x_N = 0$	$\psi_N = \xi$ quelconque

PNL : Cas particulier SLCQ (2)

Intégration directe en fonction de la donnée x_0 et de l'inconnue ψ_0 :

$$x_N = A^N x_0 - \left(\sum_{k=1}^{N} A^{N-k} B R^{-1} B^T \left(A^T\right)^{-k} \right) \psi_0$$

Transversalité $x_N = 0 \rightarrow$

$$x_0 = Q_N \psi_0 \text{ **avec** } Q_N = \sum_{k=1}^{N} A^{-k} B R^{-1} B^T \left(A^T\right)^{-k}$$

D'où :

$$\hat{u}_0 = -R^{-1} B^T \left(A^T\right)^{-1} \psi_0 = -R^{-1} B^T \left(A^T\right)^{-1} Q_N^{-1} x_0$$

$$\hat{u}_{BFn} = -R^{-1} B^T \left(A^T\right)^{-1} Q_{N-k}^{-1} x_{MESn}$$

PNL : Commentaires de conclusion

Domaine d'application :

- **Système discret**
- **Horizon fini**

Bien conditionné pour :

- **Système linéaire avec critère quadratique**
- **éventuellement quelques contraintes égalités linéaires**

Mal conditionné pour :

- **Système non linéaire (résolution par méthode itérative de type gradient),**
- **contraintes inégalités (nombre de cas à traiter rédhibitoire)**

PD : Exemple simple (1)

Amener un système commandé en vitesse

$$x_{n+1} = x_n + u_n$$

d'un état initial x_0^* donné à $x_N = 0$ en N coups, tout en minimisant l'énergie dépensée :

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2$$

Cas particulier $N = 1$: La commande u_{N-1} est imposée pour assurer $x_N = 0$

$$0 = x_N = x_{N-1} + u_{N-1} \rightarrow \hat{u}_{N-1} = -x_{N-1}$$

$$\rightarrow \hat{R}_{N-1}(x_{N-1}) = \hat{u}_{N-1}^2 = x_{N-1}^2$$

PD : Exemple simple (2)

Cas particulier $N = 2$:

Le revenu à optimal s'écrit $\hat{C} = \hat{R}_{N-2} = \hat{u}_{N-2}^2 + \hat{u}_{N-1}^2$

- $\hat{u}_{N-1}$ **imposé** $\rightarrow \hat{u}_{N-1} = -\hat{x}_{N-1} \rightarrow \hat{R}_{N-2} = \hat{u}_{N-2}^2 + \hat{x}_{N-1}^2$
- $\hat{x}_{N-1} = \hat{x}_{N-2} + \hat{u}_{N-2} \rightarrow \hat{R}_{N-2} = \hat{u}_{N-2}^2 + (\hat{x}_{N-2} + \hat{u}_{N-2})^2$

$\hat{x}_{N-2}$ **est l'état initial libre** $\rightarrow \hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \left\{ u_{N-2}^2 + (x_{N-2} + u_{N-2})^2 \right\}$

$$\frac{\partial}{\partial u_{N-2}} = 0 \rightarrow 4u_{N-2} + 2x_{N-2} = 0 \rightarrow \hat{u}_{N-2} = -\tfrac{1}{2} x_{N-2}$$

$$\hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) = \frac{1}{2} x_{N-2}^2$$

PD : Exemple simple (3)

Cas particulier $N = 3$ **:**

Le revenu à optimal s'écrit $\hat{C} = \hat{R}_{N-3} = \hat{u}_{N-3}^2 + \hat{u}_{N-2}^2 + \hat{u}_{N-1}^2$

$\hat{u}_{N-2}^2 + \hat{u}_{N-1}^2 = \hat{R}_{N-2}$

$\hat{R}_{N-2}$ **ne dépend que de** $\hat{x}_{N-2}$ **:** $\hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) = \frac{1}{2}x_{N-2}^2$ **et** $\hat{x}_{N-2} = \hat{x}_{N-3} + \hat{u}_{N-3}$

d'où $\hat{R}_{N-3} = \hat{u}_{N-3}^2 + \frac{1}{2}(x_{N-3} + \hat{u}_{N-3})^2$

$\frac{\partial}{\partial u_{N-2}} = 0 \rightarrow 3u_{N-3} + x_{N-3} = 0 \rightarrow \hat{u}_{N-3} = -\frac{1}{3}x_{N-3}$

$$\hat{R}_{N-3}(x_{N-3}) = \frac{1}{3}x_{N-3}^2$$

PD : Exemple simple (4)

Généralisation par récurrence : On pose $\hat{R}_k = \sum_{n=k}^{N-1} \hat{u}_n^2 = \hat{R}_k(x_k)$

On suppose $\hat{R}_n(x_n) = \frac{1}{\alpha_n}x_n^2$ **vrai pour** $n = k+1$

vérifié pour $\alpha_{N-1} = 1$, $\alpha_{N-2} = 2$ **et** $\alpha_{N-3} = 3$

$\hat{R}_k(x_k) = \hat{u}_k^2 + \hat{R}_{k+1}(\hat{x}_{k+1}) = \hat{u}_k^2 + \hat{R}_{k+1}(\hat{u}_k + x_k)$

$$\hat{R}_k(x_k) = \min_{u_k}\left\{u_k^2 + \hat{R}_{k+1}(u_k + x_k)\right\}$$

$\frac{\partial}{\partial u_k} = 0 \rightarrow 2u_k + \frac{2}{\alpha_{k+1}}(u_k + x_k) = 0 \rightarrow \hat{u}_k = -\frac{1}{1+\alpha_{k+1}}x_k$

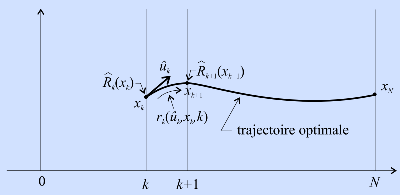
$\hat{R}_k(x_k) = \frac{1}{1+\alpha_{k+1}}x_k^2 = \frac{1}{\alpha_k}x_k^2 \rightarrow \alpha_k = 1 + \alpha_{k+1} \rightarrow \alpha_k = N - k$

D'où la commande optimale (B.F.) $\hat{u}_k = -\frac{1}{N-k}x_k$

PD : Le principe de Bellman (1957)

Critère : Opt. de $C = s(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} r(x_n, u_n, n)$

Revenu courant terminal $R_k \triangleq s(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} r(x_n, u_n, n)$



L'ERO : Equation récurrente d'optimalité :

$$\hat{R}_k(x_k) = \underset{u_k \in \mathcal{U}(x_k,k)}{\text{opt.}} \left\{ r(x_k, u_k, k) + \hat{R}_{k+1}(f(x_k, u_k, k)) \right\}$$

Il y a, comme en PNL, un problème aux deux bouts à résoudre.

SUPAERO ONERA

PD : Initialisation de l'ERO - Cas horizon fixé $[0 - N]$

Si x_N **est libre,** $\hat{R}_N(x_N) = s(x_N)$ **permet d'initialiser la récurrence rétrograde .**

Si x_N **est fixé,** $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ **imposées pour amener l'état en** x_N **avec** $\frac{m}{l} \leq k \leq m$

Si $k = \frac{m}{l}$**,** $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ **unique réaliser le recalage, d'où :**

$$\hat{R}_{N-k}(x_{N-k}) = s(x_N) + \sum_{n=N-k}^{N-1} r(x_n, \tilde{u}_n, n)$$

Sinon, infinité de $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ **possibles. Optimisation préalable nécessaire pour initialiser** $\hat{R}_{N-k}(x_{N-k})$**.**

Autre possibilité : Fonction de pénalisation

$$s(x_N) = \mu (x_N - x_N^*)^T C (x_N - x_N^*)$$

SUPAERO ONERA

PD : Initialisation de l'ERO : Cas de l'horizon libre

Le revenu optimal ne dépend que de l'état courant (il est indépendant de l'instant) :

$$\hat{R}_n(x_n) = \hat{R}_k(x_k) = \hat{R}(x) \text{ si } x_n = x_k = x$$

avec $\hat{R}(x^*) = 0$ pour $x^* \in \Phi$ domaine terminal.

Pour $x \notin \Phi$, on cherche la solution en régime permanent de l'équation implicite :

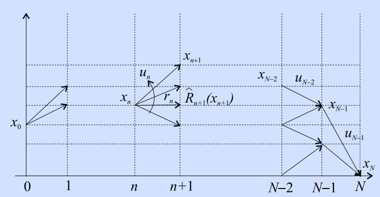
$$\hat{R}(x) = \underset{u \in \mathcal{U}(x)}{\text{opt.}} \left\{ r(x,u) + \hat{R}(f(x,u)) \right\}$$

Exemple : Temps minimal (nombre d'étapes) pour atteindre x^* :

$$\hat{T}(x) = \underset{u \in \mathcal{U}(x)}{\text{opt.}} \left\{ 1 + \hat{T}(f(x,u)) \right\} \text{ et } \hat{T}(x^*) = 0$$

SUPAERO ONERA

PD : Mise en oeuvre sur ordinateur



Quantification de x_n en q_x pas

- $2 \times q_x^m$ **mémoires pour ranger $\hat{R}_n(x_n)$ et $\hat{R}_{n+1}(x_{n+1})$**
- $N \times l \times q_x^m$ **mémoires pour ranger les $\hat{u}_n(x_n)$**

Quantification de u_n en q_u pas $\to N \times q_x^m \times q_u^l$ commandes à tester

Initialisation des q_x^m valeurs $\hat{R}_N(x_N)$: $\begin{cases} x_N \in \Phi \to \hat{R}_N(x_N) = s(x_N) \\ x_N \notin \Phi \to \hat{R}_N(x_N) = \infty \end{cases}$

Résolution rétrograde de l'ERO par interpolation du revenu optimal

SUPAERO ONERA

PD : Commentaires de conclusion

Domaine d'application :

- **Systèmes discrets**

Bien conditionné pour :

- **Système et critères quelconques (même non linéaires)**
- **Contraintes instantanées même non-linéaires (élimine des cas)**
- **Horizon borné**

  Mal conditionné pour :
- **Systèmes d'ordre élevé ($m \leq 5$ ou 6)**
- **Contraintes globales**

Elle fournit directement la commande en boucle fermée.

PD : Systèmes linéaires avec critère quadratique (1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n \text{ , (éventuellement } A_n \text{ et } B_n\text{)} \\ \text{critère : } \min \sum_{n=0}^{N-1} \left(x_n^T Q x_n + u_n^T R u_n\right) \text{ , (éventuellement } Q_n, R_n \text{...)} \end{cases}$$

Hypothèse : $\hat{R}_n(x_n)$ **est quadratique en** x_n **:** $\hat{R}_n(x_n) = x_n^T P_n x_n$

Résolution de l'équation récurrente d'optimalité

$$\hat{R}_n(x_n) = \underset{u_n}{\mathrm{Min}} \left\{ x_n^T Q x_n + u_n^T R u_n + (Ax_n + Bu_n)^T P_{n+1} (Ax_n + Bu_n) \right\}$$

$$\rightarrow \hat{u}_n = -K_n x_n \text{ avec } K_n = \left(R + B^T P_{n+1} B\right)^{-1} B^T P_{n+1} A$$

D'où l'équation récurrence rétrograde sur P_n **(Ricatti pour le cas discret)**

$$P_n = Q + A^T P_{n+1} A - A^T P_{n+1} B \left(R + B^T P_{n+1} B\right)^{-1} B^T P_{n+1} A$$

PD : Systèmes linéaires avec critère quadratique (2)

Horizon N donné

Pb. aux deux bouts résoluble. Initialisation Ricatti :

- x_N **libre** $\rightarrow P_N = Q_N$ **(0 si pas de critère terminal)**
- x_N **contraint par** $Lx_N - a = 0$
  - **Si unicité du recalage** $\Rightarrow \hat{R}_{N-k}(x_{N-k}) \Rightarrow P_{N-k}$
  - **Sinon min préalable de** $R_{N-k}(x_{N-k}, u_{N-k}, \ldots, u_{N-1})$
  - **Alternative : Pénalisation :** $\hat{R}_N(x_N) = \mu (Lx_N - a)^T C (Lx_N - a)$

Intégration rétrograde de l'équation de Ricatti $\rightarrow P_n$

$\rightarrow$ **Cde BF :** $\hat{u}_n = -\left[\left(R + B^T P_{n+1} B\right)^{-1} B^T P_{n+1}\right] A x_n$

PD : Systèmes linéaires avec critère quadratique (3)

Horizon libre ou infini - Cas stationnaire

$\Rightarrow$ **Equation implicite de Ricatti pour les systèmes discrets**

$$P = Q + A^T P A - \left(B^T P A\right)^T \left(R + B^T P B\right)^{-1} \left(B^T P A\right)$$

Initialisation classique de la récurrence :

$$P = \begin{cases} 0 \text{ si } x_F \text{ libre} \\ \mu L^T C L \text{ si } x_F \text{ contraint} \end{cases}$$

(2ème cas : pénalisation $\hat{R}_N(x_N) = \mu (Lx_N - a)^T C (Lx_N - a)$**)**

Si convergence :

$$\Rightarrow K = \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A$$

$\hat{u}_n = -K x_n$ **gain linéaire stationnaire**

Principe du maximum. Historique

Problème du brachistochrone

Bernouilli Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748) : Calcul différentiel et intégral $\rightarrow$ arc de cycloïde

Calcul des variations (1744) :

Leonhard Euler (1707-1783) : Dérivées, équa. diff., calcul des variations.

Joseph Louis (Comte de) Lagrange (1736-1813). Pb des 3 corps.

Principe du maximum (1956) :

Pontryagin et ses élèves Boltianski, Gamkrelidzé et Mishenko.

PM : Enoncé du problème considéré

Système continu : $\dot{x} = f\,(x, u, t)$

Contraintes instantanées : $\gamma\,(x, u, t) \leq 0$

Conditions initiales : $h(x_0, t_0) = 0$

Conditions finales : $l(x_F, t_F) = 0$

On cherche $\hat{u}(t)$ **sur l'horizon** $[t_0, t_F]$ **qui minimise**

$$C = p\,(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_F} r\,(x, u, t)\,dt + s\,(x_F, t_F)$$

et respecte les contraintes imposées.

PM : Du principe de Bellman à l'équation d'Hamilton-Jacobi

Utilise le *revenu courant terminal* :
$\hat{R}(x,t) = \min_{u(t), t\in[t,t_F]} \left\{ s(x_F, t_F) + \int_t^{t_F} r(x,u,t)\, dt \right\}$

En discrétisant $\hat{R}[x(t+dt), t+dt] = \hat{R}[x(t), t] + \hat{R}_x^T \dot{x} dt + \hat{R}_t dt$

L'équation récurrente d'optimalité
$\rightarrow \hat{R}[x(t), t] = \min_{u(t)|\gamma(x,u,t)\leq 0} \left\{ r(x,u,t)\, dt + \hat{R}[x(t), t] + \hat{R}_x^T f(x,u)\, dt + \hat{R}_t dt \right\}$

$\rightarrow$ **l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi :**

$$\hat{R}_t = -\min_{u(t)|\gamma(x,u,t)\leq 0} \left\{ r(x,u,t) + \hat{R}_x^T f \right\} = -\min_{u,\mu>0} \left\{ \mathcal{L} + \hat{R}_x^T f \right\}$$

où $\mathcal{L} = r + \mu(t)^T \gamma(x,u,t)$ **avec p. K&T.** $\mu(t) \geq 0$**.**

PM : Le principe du maximum

Transformer les eq. aux dérivées partielles en equa. diff. du 1er ordre

On définit le vecteur adjoint $\psi = -\hat{R}_x$,

le hamiltonien $H = \psi^T f - r \ \left(-\mu^T \gamma\right)$

Hamilton-Jacobi devient : $\hat{R}_t = \max_{u|\gamma\leq 0} H$

et on trouve : $\dot{\psi} = -H_x(\hat{u}, x, \psi, t)$ **en utilisant** $\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}_x = \frac{\partial}{\partial x}\hat{R}_t = \frac{\partial}{\partial x}\hat{H}$

et accessoirement : $\frac{d}{dt}\hat{H} = H_t$

D'où la méthode :

$$\hat{u}(x,\psi,t) = \arg \mid \max_{u|\gamma\leq 0} H(x,\psi,u,t)$$

et intégration des eq. diff : $\begin{cases} \dot{x} = f = H_\psi \\ \dot{\psi} = -H_x(\hat{u}, x, \psi, t) \end{cases}$

PM : Exemple simple

Système $\dot{x} = u$ **à transférer de** x_0^* **à** $x_F = 0$ **en minimisant** $C = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_F} u^2 dt$

Hamiltonien $H = \psi^T f - r = \psi u - \frac{1}{2}u^2$

Cde. optimale : $\hat{u} = \arg\max_u H \rightarrow \psi - \hat{u} = 0 \rightarrow \hat{u} = \psi$

Eq. diff : $\begin{cases} \dot{x} = u = \psi \\ \dot{\psi} = -H_x = 0 \end{cases}$ **C.ini. et fin.** ψ **?? (Pb aux deux bouts)**

$$\int \dot{\psi} \rightarrow \psi = \psi_0 \rightarrow \hat{u} = \psi_0 \qquad \int \dot{x} \rightarrow x = x_0^* + \psi_0\,(t - t_0)$$

$$x_F = 0 \rightarrow 0 = x_0^* + \psi_0\,(t_F - t_0) \rightarrow \psi_0 = -\frac{x_0^*}{t_F - t_0}$$

$$u(t = t_0) = -\frac{x_0}{t_F - t_0} \rightarrow u_{BF} = -\frac{x_{mes}}{t_F - t}$$

SUPAERO ONERA

PM : Cas particulier systèmes stationnaires

Syst. stationnaires

$$f_t = 0,\ r_t = 0,\ \gamma_t = 0 \rightarrow H_t = 0 \rightarrow \tfrac{d}{dt}\hat{H} = 0$$

$\hat{H} = cte$ **sur les trajectoires optimales**

En stationnaire, le maximum du hamiltonien est constant.

Syst. stationnaires à horizon libre

Horizon libre $\rightarrow R\,(\hat{x}, t)$ **indépendant de** t $\rightarrow \hat{R}_t = 0$ **or** $R_t = \max_u H \rightarrow$

$\hat{H} = 0$ **sur les trajectoires optimales**

En stationnaire à horizon libre, le maximum du hamiltonien est nul.

SUPAERO ONERA

PM : Conditions de transversalité initiales Critère initial :
$C(x_0,t_0) = p(x_0,t_0) + R(x_0,t_0)$

$$\delta C\left(\hat{x}_0,\hat{t}_0\right) = 0 \rightarrow$$

$$\left(p_{x_0} - \psi_0\right)^T \delta x_0 + \left(p_{t_0} + \hat{H}_0\right)\delta t_0 = 0$$

Si $\exists h(x_0,t_0) = 0 \rightarrow \exists \eta$ **tel que** $\begin{pmatrix} \left(p_{x_0} - \psi_0\right) \\ \left(p_{t_0} + \hat{H}_0\right) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{x_0}^T \\ h_{t_0}^T \end{bmatrix} \eta$

Sinon

t_0 **donné**	$\rightarrow$	$\delta t_0 = 0$	$\rightarrow$	$\hat{H}_0$ **inconnu**
t_0 **libre**	$\rightarrow$	$\delta t_0 =$ **qcq**	$\rightarrow$	$\hat{H}_0 = -p_{t_0}$
x_0 **donné**	$\rightarrow$	$\delta x_0 = 0$	$\rightarrow$	ψ_0 **inconnu**
x_0 **libre**	$\rightarrow$	$\delta x_0 =$ **qcq**	$\rightarrow$	$\psi_0 = p_{x_0}$
$h(x_0) = 0$	$\rightarrow$	$h_{x_0}\delta x_0 = 0$	$\rightarrow$	$\exists \eta \mid \psi_0 = p_{x_0} + h_{x_0}^T \eta$

PM : Conditions de transversalité finales

Revenu terminal : $\hat{R}(x_F,t_F) = s(x_F,t_F)$

$$\delta\left[s(x_F,t_F) - \hat{R}(x_F,t_F)\right] = 0 \rightarrow$$

$$\left(s_{x_F} + \psi_F\right)^T \delta x_F + \left(s_{t_F} - \hat{H}_F\right)\delta t_F = 0$$

Si $\exists l(x_F,t_F) = 0 \rightarrow \exists \xi$ **tel que** $\begin{pmatrix} \left(s_{x_F} + \psi_F\right) \\ \left(s_{t_F} - \hat{H}_F\right) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x_F}^T \\ l_{t_F}^T \end{bmatrix} \xi$

Sinon

t_F **donné**	$\rightarrow$	$\delta t_F = 0$	$\rightarrow$	$\hat{H}_F$ **inconnu**
t_F **libre**	$\rightarrow$	$\delta t_F =$ **qcq**	$\rightarrow$	$\hat{H}_F = s_{t_F}$
x_F **donné**	$\rightarrow$	$\delta x_F = 0$	$\rightarrow$	ψ_F **inconnu**
x_F **libre**	$\rightarrow$	$\delta x_F =$ **qcq**	$\rightarrow$	$\psi_F = -s_{x_F}$
$l(x_F) = 0$	$\rightarrow$	$l_{x_F}\delta x_F = 0$	$\rightarrow$	$\exists \xi \mid \psi_F = -s_{x_F} + l_{x_F}^T \xi$

PM : Le problème aux deux bouts

Si on sait calculer $\hat{u}(x,\psi,t) = \arg \mid \max_{u \mid \gamma \leq 0} H(x,\psi,u,t)$**,**

si on sait intégrer $\begin{cases} \dot{\psi} = -H_x(\hat{u},x,\psi,t) \\ \dot{x} = f(x,\hat{u}) = H_\psi(\hat{u},x,\psi,t) \end{cases}$

$\rightarrow 2m$ **équations qui lient les** $4m+2$ **inconnues** $t_0, x_0, \psi_0, x_F, \psi_F, t_F$

Conditions initiales, terminales et de transversalité apportent (après élimination des η et ξ) $2m+2$ équations qui permettent d'*envisager* une résolution (analytique en SLCQ, sinon itérative).

PM : Traitement des contraintes globales intégrales

$$\int_{t_0}^{t_F} g(x,u,t)\,dt \leq E$$

1. **Par augmentation du vecteur d'état :** $\dot{y} = -g$ **avec** $y_0 = E$ **et** $y_F \geq 0$**.**
2. **Plus simplement en ajoutant** $\lambda^T g$ **au lagrangien :**

$$\mathcal{L} = r + \lambda^T g(x,u,t) + \mu(t)^T \gamma(x,u,t) \rightarrow$$

$$H = \psi^T f - r - \lambda^T g(x,u,t) - \mu(t)^T \gamma(x,u,t)$$

avec λ **paramètres de Kuhn et Tucker à composantes** $\geq$ **0.**

PM : Trajectoires singulières

On appelle trajectoires singulières des portions de trajectoires optimales pour lesquelles le principe du maximum ne permet pas de déterminer certaines composantes u_i de la commande optimale.

Ceci se produit dans le cas où H devient indépendant de u_i pendant un temps fini :

$H_{u_i} = 0$ et $\frac{d}{dt}\left(H_{u_i}\right) = 0 \rightarrow$ trajectoire singulière

u_i doit être déterminé par un autre moyen ??

PM : Vérification des conditions d'optimalité

- Le principe du maximum donne des conditions nécessaires du premier ordre
- Si H est doublement dérivable par rapport à u, on vérifiera que H_{uu} est négative
- On vérifiera les conditions de signes sur les paramètre de Kuhn et Tucker.
- Dans la pratique on est amené à comparer différentes solutions et à vérifier a posteriori l'optimalité de la solution choisie.

PM : Système linéaire avec critère quadratique

Enoncé du problème

Système : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ s = Cx \end{cases}$

Minimiser : $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_F} \left(\varepsilon^T Q \varepsilon + u^T R u\right) dt + \frac{1}{2}\varepsilon^T(t_F) S \varepsilon(t_F)$

avec $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ **où :**

- $e(t) = 0$ **dans le cas d'une régulation**
- $e(t) \neq 0$ **dans le cas d'une poursuite.**

avec $R > 0$, $Q \geq 0$ **et** $S \geq 0$

PM : SLCQ : Conditions d'optimalité

Hamiltonien : $H = \psi^T(Ax + Bu) - \frac{1}{2}\left\{(e - Cx)^T Q (e - Cx) + u^T R u\right\}$

Commande optimale : $\begin{cases} H_u = B^T\psi - Ru = 0 \\ H_{uu} = -R < 0 \rightarrow \textbf{maximum} \end{cases} \rightarrow \hat{u} = R^{-1}B^T\psi$

Equa. diff. : $\begin{cases} \dot{\psi} = Q_1 x - A^T\psi - C^T Q e \\ \dot{x} = Ax + R_1\psi \end{cases}$ **avec** $\begin{cases} Q_1 = C^T Q C \\ R_1 = B R^{-1} B^T \end{cases}$

Transversalités : $\begin{cases} x_0 \textbf{ donné} \rightarrow \psi_0 \textbf{ inconnu} \\ \psi_F = -s_{x_F} = -S_F x_F + C^T S e_F \end{cases}$ **avec** $S_F = C^T S C$

PM : SLCQ : Résolution en régulation : $e\,(t) = 0$

La linéarité du pb $\rightarrow \exists\, P\,(t) \mid \psi\,(t) = P\,(t)\,x\,(t)$

$\rightarrow \hat{u}\,(t) = R^{-1}B^{T}P\,(t)\,x\,(t)$ **cde. boucle fermée linéaire en** x

Calcul de $P\,(t)$ **:** $\dot{\psi} = P\dot{x} + \dot{P}x \rightarrow$

$Q_1x - A^{T}Px = P\,(A + R_1P)\,x + \dot{P}x$

vrai $\forall x \rightarrow$ **L'équation de Ricatti**

$\dot{P} + PA + A^{T}P + PR_1P - Q_1 = 0$ **(**P **sym. et** < 0**).**

Horizon fixé : $\int$ **rétrograde initialisée par** $P_F = -S_F$

Horizon libre syst. stationnaire : $P =$ **cte ,** $\dot{P} = 0$

P **est la solution du régime permanent de l'équation de Ricatti**

Application: ***Méthode de synthèse des correcteurs***

PM : SLCQ : Résolution en poursuite

Entrée $e\,(t)$ **connue.**

On cherche une solution de la forme $\psi\,(t) = P\,(t)\,x\,(t) + z\,(t)$

Calcul de $P\,(t)$ **:** $\dot{\psi} = P\dot{x} + \dot{P}x + \dot{z} \rightarrow$

- **équation de Ricatti classique sur** P
- **et** z **solution de :**

$\dot{z} + \left(PR_1 + A^{T}\right)z + C^{T}Qe = 0$

$\int$ **rétrograde initialisée par** $z_F = C^{T}Se_F$

PM : Systèmes à commutations

Généralement lorsque : $\begin{cases} H = L(\psi)\, u + \cdots \text{(linéaire en } u) \\ U_{min} \le u \le U_{max} \end{cases}$

Dans ce cas : $\begin{cases} L(\psi) > 0 \rightarrow \hat{u} = U_{max} \\ L(\psi) < 0 \rightarrow \hat{u} = U_{min} \\ L(\psi) = 0 \text{ et } \dot{L} = 0 \rightarrow u = ?? : \text{trajectoire singulière} \end{cases}$

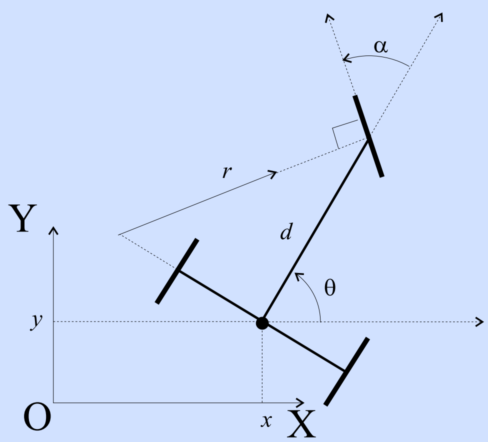
L'étude de $L(\psi)$ peut indiquer le *nombre* et le *sens* des commutations $U_{max} \rightleftarrows U_{min}$

Principe de résolution : (x_0 et x_F connus) : $\int$ directe à partir de x_0 avec les divers $\hat{u}$, $\int$ rétrograde à partir de x_F avec les divers $\hat{u}$ et tentative de rabouter trajectoires initiales et finales.

PM : Systèmes à commutations : Ex. du tricycle (1)

Equations d'évolution

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = V\cos\theta \\ \dot{y} = V\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{V}{d}\tan\alpha \end{pmatrix}$$



Pb : Plus court chemin à $V = cte$

de $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}$ **à** $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ \theta_F \end{pmatrix}$

avec $|\alpha| \le \alpha_{max}$

PM : Exemple du tricycle (2)

Commande : $u = \frac{V}{d}\tan\alpha \rightarrow |u| \leq U = \frac{V}{r}$ **avec** $r = \frac{d}{\tan\alpha_{max}}$

Critère : $C = (t_F - t_0) = \int_{t_0}^{t_F} 1dt$

Hamiltonien : $H = \psi_1 V\cos\theta + \psi_2 V\sin\theta + \psi_3 u - 1$

Commande optimale : $\hat{u} = \arg|\max_{|u|\leq U} H = U$**signe**$(\psi_3)$.

Système adjoint : $\left\{\begin{array}{l} \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2 = 0 \rightarrow \psi_1 = cte\ ;\ \psi_2 = cte \\ \dot{\psi}_3 = \psi_1 V\sin\theta - \psi_2 V\cos\theta \end{array}\right.$

Transversalités : X_0 **et** X_F **donnés** $\rightarrow \Psi_0$ **et** Ψ_F **inconnus.**

SUPAERO

ONERA

PM : Exemple du tricycle (3)

Existence de traj. singulières ?

Oui si $\psi_3 = \dot{\psi}_3 = 0$.

$\dot{\psi}_3 = 0$ **et** $\hat{H} = 0$ **(Pb stat. à horizon libre)** $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \psi_1 = \frac{\cos\theta}{V} \\ \psi_2 = \frac{\sin\theta}{V} \end{array}\right.$

$(\psi_1 = cte\ ;\ \psi_2 = cte) \rightarrow \theta_{sing} = cte \rightarrow \hat{u}_{sing} = 0$

Les trajectoires singulières sont des segments de droite dans le plan (x, y).

SUPAERO

ONERA

PM : Exemple du tricycle (4)

Tentative de raboutement des trajectoires candidates.

Pour $\psi_3 > 0$, $\hat{u} = +U \to \theta = Ut + \theta_0$ **: arc de cercle** $\rho = r$ **sens**$+$.

Pour $\psi_3 < 0$, $\hat{u} = -U \to \theta = -Ut + \theta_0$ **: arc de cercle** $\rho = r$ **sens**$-$.

Pour $\psi_3 = \dot{\psi}_3 = 0 \to \hat{u} = 0$ **: segment de droite.**

D'où les solutions :