Analyse des mouvements d'un Powerball

Michel Llibre

Mai 2011

Description

Les deux demi-coques du powerball forment une gorge circulaire dans laquelle glisse un anneau qui supporte l'axe de révolution $\vec{z}_2$ de la toupie. Sur la figure, l'anneau n'est pas représenté.

Seuls sont représentés :

- la toupie et son axe de révolution,
- les plans supérieurs et inférieurs de la gorge circulaire.

L'axe de la toupie roule et glisse sur ces deux plans. Le coefficient de frottement est le plus élevé possible.

Mise en équations

Le repère représenté sur la figure est lié à l'anneau qui porte la toupie. Notons le $\mathcal{R}_2$ et $\vec{\Omega}_2$ sa vitesse de rotation par rapport au repère d'orientation galiléenne $\mathcal{R}_0$ de même origine, le centre de la toupie (supposé être son centre de masse). Notons $\mathcal{R}_3$ le repère lié à la toupie d'axe $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$, et :

$$\vec{\Omega}_3 = \vec{\Omega}_2 + \omega \vec{z}_2$$

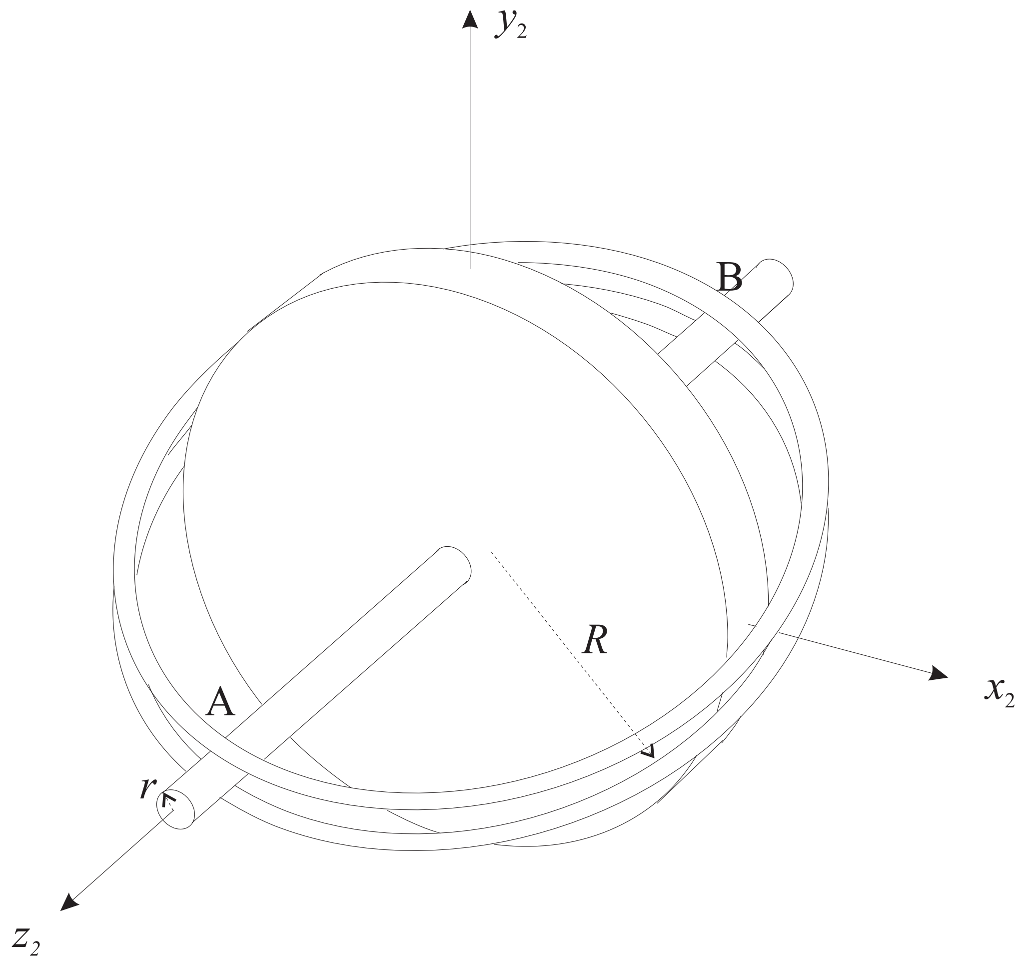
la vitesse de rotation de la toupie par rapport à $\mathcal{R}_0$.

Notons $\mathcal{I}_G$ le tenseur d'inertie de la toupie en son centre de masse. Étant de révolution autour de $\vec{z}_3 = \vec{z}_2$, ses composantes sont identiques (et constantes) dans $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$. Il en résulte l'équation classique :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d}{dt_{/0}}\left(\vec{h}_G\right) = \frac{d}{dt_{/2}}\left(\vec{h}_G\right) + \vec{\Omega}_2 \times \vec{h}_G \text{ avec } \vec{h}_G = \mathcal{I}_G\left(\vec{\Omega}_3\right)$$

où $\vec{\mathcal{M}}_G$ est le moment résultant en G des forces extérieures appliquées à la toupie et $\vec{h}_G$ est le moment cinétique en G de la toupie. Considérons les composantes dans $\mathcal{R}_2$:

$$\left(\vec{\mathcal{M}}_G\right)_2 = \begin{pmatrix} L_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left(\vec{\Omega}_2\right)_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (\mathcal{I}_G)_2 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$


y_2
B
R
x_2
A
r
z_2

Il vient :
$$\begin{pmatrix} L_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\dot{p}_2 + \left[(C-A)\,r_2 + C\omega\right] q_2 \\ A\dot{q}_2 - \left[(C-A)\,r_2 + C\omega\right] p_2 \\ C\left(\dot{r}_2 + \dot{\omega}\right) \end{pmatrix}$$

Dans le cas du powerball, on a :

$$\dot{\omega} \gg q_2 \gg p_2, r_2 \text{ avec } p_2, r_2, \dot{p}_2, \dot{r}_2 \text{ négligeables.}$$

Les équations essentielles sont donc :

$$\begin{pmatrix} L_2 \\ N_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} C\omega q_2 \\ C\dot{\omega} \end{pmatrix}$$

- le couple N_2 d'axe $\vec{z}_2$ dû aux frottements de cet axe sur les gorges produit l'accélération ou le freinage $\dot{\omega}$ de la toupie,
- l'équation $L_2 \simeq C\omega q_2$ établit une équivalence entre le moment des forces extérieures autour de l'axe $\vec{x}_2$ (appliqué par l'intermédiaire de l'appui des gorges sur l'axe) et le couple gyroscopique généré par le produit des vitesses de rotation propre ω et de précession q_2 (c'est le terme prépondérant du produit vectoriel $\vec{\Omega}_2 \times \vec{h}_G$).

Cette dernière équation est une équivalence[1] qui dit que :

- Si un couple L_2 est appliqué en présence d'une rotation propre ω, on va observer une vitesse de précession q_2,
- S'il existe un couple de vitesses ω et q_2, il faut qu'il y ait un moment dynamique L_2.

Analyse du fonctionnement

1. On le lance en tirant sur une cordelette enroulée autour du powerball pour lui communiquer une vitesse ω. Au début, il n'y a pas de vitesse de précession ($q_2 = 0$). Sous l'effet de son poids, il s'appuie en A et B sur la gorge du bas.

Aux points de contact, en A et B il y a 2 forces de frottements dirigées selon $\vec{x}_2$ que l'on peut, (par exemple coefficient de frottement visqueux f), approximer par :

$$F_A = -fr\omega$$
$$F_B = -fr\omega$$

La résultante vaut $\vec{R} = -2fr\omega\vec{x}_2$. Elle produit un mouvement selon $-\vec{x}_2$ qui est stoppé par l'appui de l'anneau sur la gorge.

[1] En fait L_2 produit du $\dot{p}_2$ qui intégré génère un peu de p_2 qui génère du M_2 gyroscopique qui produit du $\dot{q}_2$ qui intégré génère le q_2, mais le tout avec une dynamique si rapide, qu'on peut considérer qu'il y a équivalence.

Le moment résultant vaut :

$$N_2 = -2fr^2\omega$$

Il va produire le ralentissement de la vitesse de rotation ω de la toupie.

2. Un moment $L_2 > 0$ exercé par le poignet suppose un contact de l'axe de la toupie, en A **avec la gorge du haut** et en B **avec la gorge du bas**. Ce moment s'appuie sur le moment gyroscopique $C\omega q_2$ qui apparaît suite à la mise en précession de la toupie (cf équivalence ci-dessus).

Aux points de contact, en A et B les forces de frottements comptées selon $\vec{x}_2$ peuvent s'approximer par :

$$F_A = -f\left(-r\omega + Rq_2\right)$$
$$F_B = -f\left(r\omega - Rq_2\right)$$

La résultante vaut $\vec{R} = 0$. L'anneau n'est pas poussé contre les gorges, la précession n'est pas ralentie.

Le moment résultant vaut :

$$N_2 = r(F_B - F_A) = 2fr\left(Rq_2 - r\omega\right)$$

Si :

- $\omega > \frac{R}{r}q_2 \Rightarrow N_2 < 0$, la toupie est ralentie,
- $\omega = \frac{R}{r}q_2 \Rightarrow N_2 = 0$, la toupie maintient sa vitesse,
- $\omega > \frac{R}{r}q_2 \Rightarrow N_2 > 0$, la toupie est accélérée.

Ainsi, si la vitesse de précession q_2 est maintenu constante, la vitesse de rotation propre de la toupie tend à atteindre la valeur :

$$\omega = \frac{R}{r}q_2$$

avec une constante de temps[2] :

$$\tau = \frac{C}{2fr^2}$$

La main qui tient la coque ressent les couples L_2 ($= C\omega q_2$ autour de l'axe $\vec{x}_2$) et N_2 qui tournent à la vitesse de précession q_2, mais c'est surtout L_2 qui est ressenti (a priori N_2 est beaucoup plus faible). Ainsi, sous l'effet de L_2 le poignet à tendance à basculer (par exemple) à droite, puis en avant, puis à gauche, puis en arrière. Si on maintient la coque fermement, extrêmement immobile, on exerce le couple L_2 qui maintient q_2 à sa valeur actuelle. Il suffit (facile à dire, difficile à faire) de réagir en amplifiant l'effort ressenti par un mouvement de bascule gauche-droite, tout en maintenant fermement la bascule

[2] cf. l'équation différentielle $C\dot{\omega} + 2fr^2\omega = 2frRq_2$

avant-arrière pour obtenir une vitesse q_2 plus élevée et par suite une vitesse ω plus élevée.

Au début q_2 est nul. Un simple mouvement de bascule produit une vitesse de précession qui va faire tourner l'axe de l'effort. Il faut alors se synchroniser sur l'effort ressenti et l'amplifier pour accélérer le mouvement.

Si on est capable de se synchroniser, par exemple jusqu'à 5 Hz, q_2 vaut alors $q_2 = 10\pi$ rd/s. Le couple ressenti qu'il faut tenir vaut alors :

$$L_2 = C\frac{R}{r}q_2^2 = 100\pi^2 C\frac{R}{r} \simeq 1000\frac{R}{r}C$$

Si on estime $\frac{R}{r}$ à environ 20, la masse de la toupie à 150 g et son rayon de giration à 1,8 cm, on a $C \simeq 0.15 \times 0.018^2 \simeq 0.00005$ Kg.m^2, d'où $L_2 \simeq 1$ N.m (proportionnel au carré de q_2). La vitesse de la toupie vaut alors $\omega = 200\pi$ rd/s soit 6000 tr/mn.

Pour le record qui est de l'ordre de 15500 tr/mn, il faut donc tenir et se synchroniser sur un couple alternatif d'environ 6,7 N.m ce qui est ÉNORME à 13 Hz (ce me parait extrêmement rapide) .