Astrolabe

Projection stéréographique

Michel Llibre - Club d'astronomie de Quint-Fontsegrives

Le texte a été écrit avec LibreOffice et certaines figures 3D ont été réalisées avec GeoGebra.

Table des matières

1 Description....2
1.1 le Recto....2
1.1.1 Le tympan....2
1.1.2 Le limbe et l'ostenseur....3
1.1.3 L'araignée....3
1.1.3.1 Les étoiles....3
1.1.3.2 L'écliptique....3
1.1.3.3 Le point vernal....4
1.2 Le verso....4
1.3 Orientation de l'araignée....5
1.3.1 Orientation en fonction de la date....5
1.3.2 Orientation en fonction d'une mesure de hauteur....5
1.4 Utilisation diverses....5
1.4.1 Hauteur et azimut d'un astre....5
1.4.2 Lever et coucher d'une étoile....5
1.4.3 Les heures inégales....5
1.4.4 Les carrés des ombres....6
2 La projection stéréographique....6
2.1 Formules de base....7
2.2 Projection des cercles de la sphère....10
2.2.1 Projection des parallèles et des méridiens relatifs au pôle de la projection....10
2.2.2 Projection des cercles quelconques....11
2.2.3 Projection d'un grand cercle quelconque....13
2.2.4 Repérage par colatitude θ....13
2.2.5 Projection d'un grand cercle d'azimut dans l'astrolabe....15
3 Tracés dans l'astrolabe....18
3.1 Orientation du plan de projection....18
3.2 Projeté du zénith....19
3.3 Projetés des lignes du repère équatorial....19
3.3.1 Projeté du parallèle de déclinaison *β* (ou latitude *φ*)....19
3.3.2 Projeté du méridien d'angle horaire *H*....19
3.4 Projetés des lignes du repère horizontal....20
3.4.1 Projeté de l'almicantarat de hauteur *h*....21
3.4.1.1 Projeté de l'horizon....21
3.4.1.2 Projeté des almicantarats de crépuscule....21
3.4.2 Intersection d'un almicantarat avec un parallèle....21
3.4.2.1 Intersection puis projection....22
3.4.2.2 projection puis intersection....22
3.4.3 Vertical d'azimut *a*....23
3.4.4 Intersection d'un vertical avec un parallèle....24
3.4.5 Intersection d'un vertical avec l'horizon....24

3.5 Les heures inégales....25
3.6 Détails de construction....26
3.6.1 L'araignée....26
3.7 Le tympan....27

1 Description

L'astrolabe est un instrument dont la conception doit remonter à Hipparque, astronome mathématicien grec du IIème av. J.-C. Il représente l'évolution des astres sur la voûte céleste, permet de déduire leur position à partir de l'heure et de la date ou inversement permet de trouver l'heure à partir de la mesure de la position d'un astre.

Il est de forme circulaire et présente deux faces gravées qui comportent des éléments mobiles.

1.1 le Recto

1.1.1 Le tympan

Le fond du cadran, fixe mais amovible, est appelé le tympan. Il est interchangeable car sa gravure dépend de la latitude.

Indépendant de la latitude se trouve :

- le **pôle céleste boréal** (nord) au centre
- un premier cercle centré qui figure le **tropique du Cancer**
- un deuxième cercle centré figure l'**équateur**
- le dernier cercle externe figure le **tropique du Capricorne**.
- le **zénith** sur la verticale au-dessus du centre

Comme le zénith est au-dessus du centre, le haut du tympan est en direction du Sud.

Dépendant de la latitude φ , on trouve un premier réseau de courbes fermées resserrées qui entourent le Zénith. Ce sont les projetés des ***cercles de hauteur*** appelés **almicantarats.** Ils se projettent selon des cercles ayant leurs centres décalés sur l'axe vertical , le premier l'Horizon de rayon $1/\sin\varphi$ est centré à $1/\tan\varphi$ alors que le dernier de rayon nul est centré sur le zénith en $\cos\varphi/(1+\sin\varphi)$. Autour du zénith les hauteurs des astres décroissent de 2° en 2° à partir du point 90°, avec des traits plus épais pour 80°, 70°.... A partir de 36°, les courbes ne sont plus fermées car elles sortent du tympan. Le dernier almicantarat à 0° est l'horizon.

Ce réseau des almicantarats est très important. C'est lui qui permet de positionner la voûte céleste figurée sur l'araignée. Pour cela il suffit de mesurer la hauteur d'un astre existant sur l'araignée, puis de tourner l'araignée pour que la position de cet astre soit sur l'almicantarat de la hauteur mesurée. Généralement l'astre passe 2 fois par cette hauteur, en montant coté Est et en descendant coté Ouest.

Un deuxième réseau de courbes rayonnent du zénith. Ce sont ***les verticaux*** qui repèrent les azimuts des astres à partir du Nord qui est en direction du bas sur le tympan[1].

1C'est la convention utilisée dans le domaine public et dans tous les domaines scientifiques à l'exception du calcul astronomique qui met l'axe origine des azimuts vers le Sud.

1.1.2 Le limbe et l'ostenseur

Le limbe (bord extérieur d'un disque) du recto est gradué en heures sur 24 heures en deux fois 12 heures. Comme les plan méridiens qui passent par le pôle deviennent sur le tympan des rayons issus du pôle, la **règle** également appelée l'obtenteur permet de lire sur le limbe :

- l'**angle horaire** d'une étoile étoile avec 0 h en haut quand l'étoile est en direction du Sud.
- l'**heure solaire** (angle horaire moyen du soleil + 12h), avec 0 h en bas et 12h (midi) en haut (quand le Soleil est en direction du Sud)

1.1.3 L'araignée

L'**araignée** est la partie mobile en rotation autour du centre qui figure le pôle Nord.

1.1.3.1 Les étoiles

Sur cette araignée sont positionnées les principales étoiles de l'hémisphère Nord et de la bande équatoriale, au bout de petites flèches :

En s'éloignant du pôle on trouve :

- **Dubhe** (α UMa : 62°, 11h),
- ***Caph*** (β Cas : 59°09', 0h09m)
- ***Merak*** (β Uma : 56°22', 11h02m))
- ***Alioth*** (ε UMa : 55°57', 12h54m),
- ***Alkaïd*** (η UMa : 49°18, 13h48m)
- **Capella** (α Aur : 46°, 5h17m),
- **Deneb** (α Cyg : 45°17', 20h42m),
- ***Algol*** (β Per : 40°58', 3h08m)
- **Véga** (α Lyr : 38°48', 18h36m),
- ***Alphecca*** (α CrB : 26°42', 15h34m),
- **Arcturus** (α Boo : 19°10', 14h16m),
- **Aldébaran** (α Tau : 16°30', 4h36m)
- **Markab** (α Peg : 15°12', 23h05m),
- ***Denebola*** (β Leo : 14°34', 11h49m)
- ***Rasalhague*** (α Oph : 12°33', 17h35m),
- **Regulus** (α Leo : 11°57', 10h08m)
- **Altaïr** (α Aql : 8°52, 19h51m),
- **Bételgeuse** (α Ori : 7°24', 5h55m)
- **Procyon** (α Cmi : 5°13', 7h39m)
- ***Menkar*** (α Cet : 4°04', 3h02m)
- **Rigel** (β Ori : -8°12', 5h15m)
- ***Alphard*** (α Hya : -8°40', 9h28m)
- ***β Lib*** (Zuben Eschamali: -9°28', 15h18m)
- **Spica** (α Vir : -11°10', 13h25m)
- **Sirius** (α Cma : -16°44', 6h45m),
- ***Diphda*** (β Cet : -17°59', 0h44m)
- ***Antares*** (α Sco : -26°26', 16h29m)

En gras rouge, les étoiles généralement présentes et en gras italique celles qui le sont parfois.

1.1.3.2 L'écliptique

Le projeté de l'**écliptique**, grand cercle trajectoire du Soleil (et à peu de chose près des planètes et Lune) est un cercle qui est représenté par le bord externe d'une couronne circulaire décentrée par

rapport au pôle céleste. Sur cette couronne sont gravées les signes successifs du Zodiaque qui sont traversés par le Soleil. Ils constituent un **calendrier zodiacal** qui permet de positionner le Soleil en fonction de la date.

La désignation des signes est conventionnelle, elle ne correspond plus à celle des constellations. Il y a grossièrement un signe d'écart. Bien que les graduations servent à positionner le Soleil en fonction de la date, le décalage de désignation n'a aucune importance, car au verso, la correspondance entre date du calendrier civil et ce calendrier zodiacal est faite en fonction de cette désignation : Elle fait correspondre les 365 jours du calendrier à 360 degrés sur la bande zodiacale. Chacun des 12 signes présente 30 subdivisions (3 principales et 10 secondaires, parfois 5 s'il n'y a pas assez de place).

1.1.3.3 Le point vernal

Le point vernal, origine des coordonnées actuelles se trouve à la position du Soleil à l'équinoxe de printemps. Cette date variant entre le 19 et 21 mars, on peut considérer que le point vernal se trouve sur l'écliptique à la longitude du calendrier zodiacal qui correspond au 20 mars du calendrier civil. Parfois la couronne externe de l'araignée porte une petite flèche alignée sur le rayon qui passe par cette position, ce qui évite de chercher la correspondance avec la date du 20 mars.

Ce point Vernal étant l'origine des ascensions droites, il peut servir à positionner un astre non répertorié. On amène l'ostenseur, maintenu sur le point vernal à la valeur de l'ascension droite de l'étoile, valeur mesurée à partir de 0h en haut. L'étoile se trouve alors sur l'axe vertical du coté haut.

Pour sa position en déclinaison, il faudrait un ostenseur gradué en déclinaison, ce qui est rarement le cas. Seuls sont tracés sur le tympan, le pôle au centre (90°), le cercle du tropique du cancer (23.4°), le cercle de l'équateur (0°) et le cercle du tropique du Capricorne (-23.4°).

1.2 Le verso

Le verso est appelé la **mère**.

Le limbe (couronne extérieure) de la mère est gradué de 0 à 90°, avec 0° au l'horizontale quand l'astrolabe est pendu par son anneau. Une réglette tournante, l'**alidade**, permet de mesurer la hauteur des astres à l'aide de cette graduation.

Ensuite figure la graduation sur 360° du **calendrier zodiacal**. Chacun des 12 signes est divisé en 3 décades de 10 degrés : On trouve dans l'ordre suivant (sens direct) : Bélier (♈), Taureau (♉) Gémeaux (♊), Cancer (♋), Lion (♌), Vierge (♍), Balance (♎), Scorpion (♏), Sagittaire (♐), Capricorne (♑), Verseau (♒) et Poissons (♓)

En face figure le **calendrier civil** de 365 jours avec les 12 mois de 31, 28, 31,30... jours. Les jours des équinoxes sont placés sur le diamètre horizontal et les jours des solstices sont placés sur le diamètre vertical.

La règle tournante, appelée ostenseur, permet de faire des mesures de hauteur en pendant l'astrolabe par son anneau, des mesures d'azimut en position horizontale ou des mises en correspondance de graduations.

Exemples : Revoir cette suite

1.3 Orientation de l'araignée

On peut utiliser l'astrolabe comme une carte du ciel. Toutefois attention à ce que les cartes du ciel figurent la voûte céleste vue par en dessous, comme notre vision habituelle du ciel nocturne, alors que l'astrolabe présente une vue par dessus, ce qui produit un effet miroir par rapport à notre vision habituelle.

1.3.1 Orientation en fonction de la date

Pour orienter la carte du ciel en fonction de la date, on va utiliser la position du Soleil qui doit se situer sur le rayon passant par la graduation du limbe du recto qui a pour valeur son angle horaire moyen (l'heure solaire locale) avec midi en haut. Le Soleil est sur l'écliptique à la position du calendrier zodiacal (longitude écliptique) que l'on trouve au verso, en face de la date du jour sur le calendrier civil. Une fois repéré la position du Soleil sur le cercle écliptique de l'araignée avec l'ostenseur, on tourne l'araignée pour mettre aligner l'ostenseur, maintenu sur la position du Soleil, avec l'heure solaire moyenne locale.

L'araignée est positionnée. On peut lire, pour les étoiles qui sont au-dessus de l'horizon si c'est la nuit ou pour le Soleil si c'est le jour, leur azimut et hauteur sur les abaques du tympan.

1.3.2 Orientation en fonction d'une mesure de hauteur

En l'absence d'indication d'heure, on peut utiliser la hauteur d'un astre pour orienter l'araignée. De nuit on mesure la hauteur d'une des étoiles figurant sur l'araignée, ou de jour on mesure la hauteur du Soleil On utilise pour cela l'alidade et les graduations extérieures du limbe du verso, avec l'astrolabe pendu par son anneau. Ensuite on tourne l'araignée pour amener l'astre sur l'almicantarat de hauteur correspondante. En fait, il y a deux positions, une à l'Est qui correspond au passage par cette hauteur avant la culmination de l'astre et une à l'Ouest après la culmination. La graduation des lignes des verticaux donne l'azimut de l'astre. En reportant cet azimut au dos, et en visant l'astre avec l'astrolabe horizontal, on peut orienter l'astrolabe pour s'en servir de boussole.

1.4 Utilisation diverses

1.4.1 Hauteur et azimut d'un astre

Cette mesure suppose l'araignée orientée : Voir le chapitre 1.3.

Pour un astres qui est au-dessus de l'horizon, on lit sa hauteur et son azimut sur l'almicantarat et le vertical qui se croisent à sa position.

1.4.2 Lever et coucher d'une étoile

Cette mesure suppose le Soleil positionné (voir chapitre 1.3.1). L'ostenseur étant aligné sur la position du Soleil et maintenu dans cet alignement, on tourne l'araignée pour amener l'étoile considérée sur l'horizon coté Est pour son lever et coté Ouest pour son coucher. On lit l'heure solaire locale correspondante sur le limbe (avec midi en haut).

1.4.3 Les heures inégales

Elles n'ont plus d'utilité. Dans le passé la nuit, du coucher du Soleil à son lever était divisée en 12 périodes identiques appelées heures inégales car leur durée est plus longues en hiver qu'en été. Ces

heures allaient de 0h au coucher du Soleil à 12h à son lever, en passant par 6h à minuit. Réciproquement le jour était aussi divisé en 12 périodes égales, plus courtes en été qu'en hiver.

En plaçant l'ostenseur sur la position du Soleil à l'écliptique, et en plaçant le Soleil à sa hauteur, l'heure solaire est sur la couronne extérieure (le limbe). Par exemple le 15 avril, le Soleil est sur 26-27° Bélier. Il se lève approximativement à 5h20 solaire comptée 0h inégale de jour, parcours la voûte céleste du coté des abaques des almicantarats et azimuts parcourant les heures inégales de jour de 0 à 12h et se couche à 18h40 solaire comptée 0h inégale de nuit. Les heures inégales de jour ne sont pas gravées car il faudrait les superposer aux almicantarats et azimuts. Par contre comme il y a une inversion de durée jour/nuit en une 1/2 année, le point sur l'écliptique situé à l'opposé (26-27° Scorpion) traverse la zone non gravée en heures inégales de nuit égales à celles du de jour.

Ainsi, pour lire les heures inégales de jour d'une date quelconque on place l'ostenseur à la position du Soleil sur l'écliptique, on lit les heures solaires de ce coté de l'ostenseur et on lit les heures inégales gravées en bas du tympan à l'emplacement opposé sur l'écliptique à celle du Soleil.

Par exemple le 15 avril on a sur mon astrolabe la correspondance approximative suivante :

Inégale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Solaire	5h20	6h25	7h35	8h43	9h48	10h52	12h00	13h05	14h15	15h20	16h25	1h32	18h40

Pour lire les heures inégales de nuit d'une date quelconque, on lit les heures inégales à l'emplacement du Soleil sur l'écliptique, mais on lit les heures solaires sur le limbe du coté opposé, en ajoutant 12h, ou plus simplement du même coté, sans rien ajouter, en continuité des heures précédentes.

Par exemple le 15 avril on a sur mon astrolabe la correspondance approximative suivante :

Inégale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Solaire	18h40	19h32	20h25	21h20	22h15	23h05	24h00	0h53	01h48	02h40	03h35	04h30	05h20

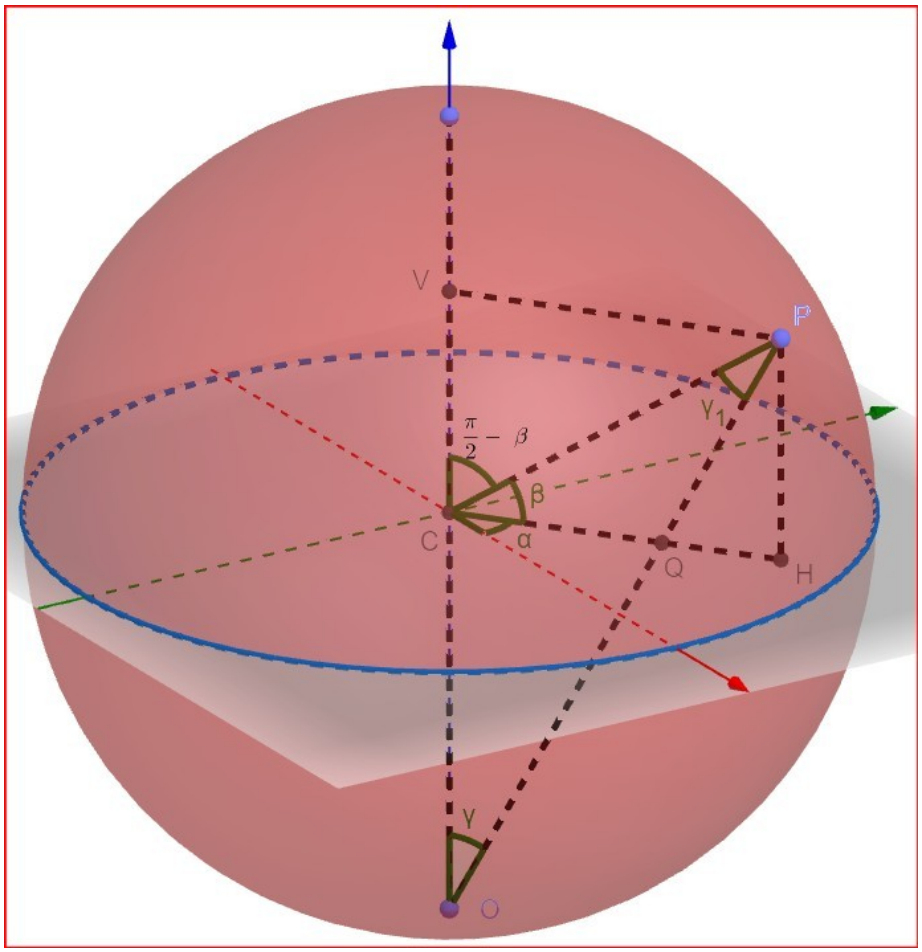
1.4.4 Les carrés des ombres

Les cotés des carrés des ombres portent les rapports hauteur/distance en vertical et distance/hauteur en horizontal indiquées en 1/12ème d'une direction visée par l'alidade. Par exemple si la graduation est sur 8 coté vertical, on a $h/d = 8/12$ en appelant h la hauteur d'un édifice et d la distance de l'observateur à l'édifice, en supposant que l'observateur soit à ras du sol, sinon h est la hauteur de l'édifice diminuée de celle de l'observateur.

2 La projection stéréographique

Dans la suite de ce document nous présentons les techniques qui permettent de réaliser les tracés des abaques qui figurent sur l'astrolabe. Elle font surtout appel à la projection stéréographique inventée par Hipparque pour projeter la voûte céleste sur un plan.

2.1 Formules de base



Considérons la sphère de centre C et de rayon 1, et le point O de coordonnées (0,0,-1) qui est choisi comme pôle de la projection stéréographique. Parmi les nombreuses projections stéréographiques existantes nous considérons celle qui projette sur le plan équatorial *x*C*y* orthogonal à OC.

Cette projection stéréographique transforme un point P de la sphère en un point Q du plan *x*C*y*, intersection de OP avec ce plan.

Considérons les coordonnées sphériques du point P, réduites au deux angles d'azimut et de site (nous omettons le rayon CP = 1). Nous les noterons (α, β).

Considérons les coordonnées polaires $(\rho = \mathrm{CQ}, \alpha)$ du point Q dans le plan *x*C*y*. Seul ρ est inconnu. La projection stéréographique est donc résolu par le calcul de la longueur CQ.

Le triangle COP étant isocèle (CO = CQ = 1), on a . Il en résulte que l'angle $\widehat{VCP}$ externe au sommet à ce triangle isocèle, égal à la somme des angles à la base, est égal à $\widehat{VCP} = 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta$

d'où :

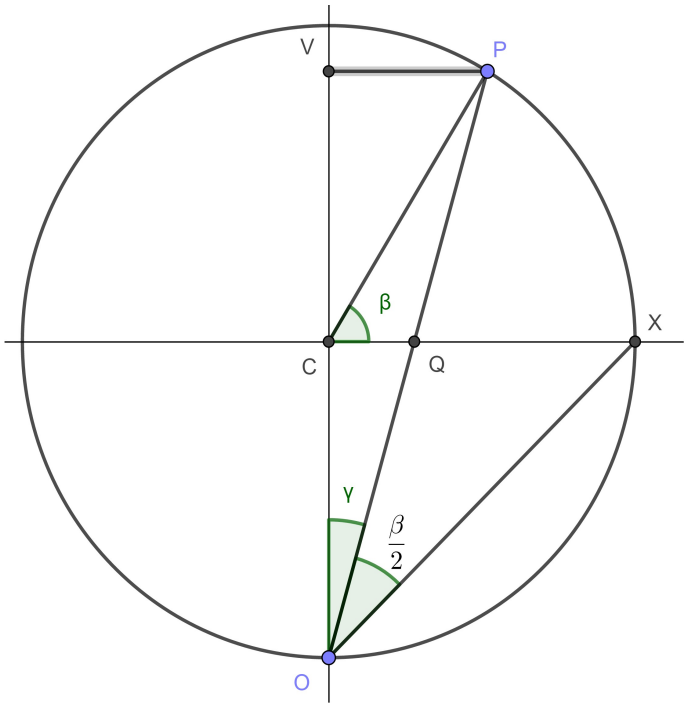
$$\boxed{\gamma = \frac{pi}{4} - \frac{\beta}{2}} \qquad (1)$$

Un point de la sphère de coordonnées *X*, *Y*, *Z* telles que $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ est transformé en un point du plan équatorial à la distance ρ de l'origine C donnée par :

$$\rho = \frac{\sqrt{1-Z^2}}{1+Z} \qquad \text{(ro)}$$

Ce résultat remarquable montre que la connaissance de Z seul permet de déterminer .

L'angle polaire s'obtient facilement à partir de X,Y, mais dépend du choix de la direction des axes dans le plan horizontal, qui peut ne pas être la même que celle du repère équatorial.



Cette relation est évidente sur la coupe ci-dessus avec $\widehat{XOC} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{XOP} = \frac{\beta}{2}$ car c'est un angle inscrit qui intercepte la moitié de l'angle au centre $\widehat{XCP}$.

Comme $\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{OC}} = \tan\gamma$ il en résulte que :

$$\boxed{\rho = CQ = \tan\gamma = \frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}} \qquad (2)$$

Par ailleurs, dans le triangle rectangle VPO on a :

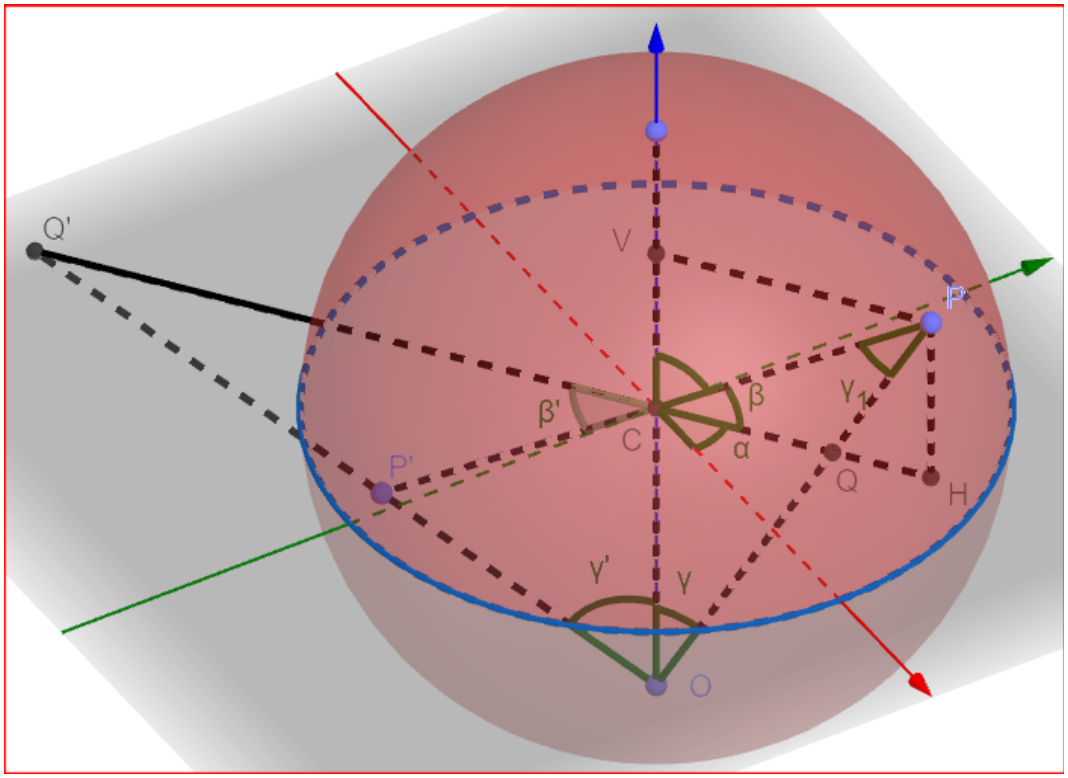
$$\tan\gamma = \frac{\mathrm{VP}}{\mathrm{OV}} = \frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} = \frac{1-\sin\beta}{\cos\beta} \qquad (3)$$

où la dernière égalité est obtenue en multipliant la fraction précédente par $1-\sin\beta$ puis en simplifiant.

Finalement, pour ρ , on a le choix entre les expressions suivantes :

$$\tan\gamma \;=\; \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) \;=\; \frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}} \;=\; \frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} \;=\; \frac{1-\sin\beta}{\cos\beta} \qquad (4)$$

Considérons le point P' symétrique de P par rapport au centre C de la sphère. Son site β' est l'opposé du site β de celui de P. Si Q' est le projeté de P'.



Il vient :

$$\tan\gamma' \;=\; \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta'}{2}\right) \;=\; \tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right) \;=\; \frac{1+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}} \;=\; \frac{1}{\tan\gamma}$$

Ce qui revient à dire que Q et Q' , comme P et P' sont inverses l'un de l'autre dans l'inversion de centre C et de puissance -1 :

$$\overline{OQ}\cdot\overline{OQ'}=-1 \text{ et } \rho\,\rho'=1$$

Calculons la distance QQ'. Il vient :

$$QQ' \;=\; \tan\gamma+\frac{1}{\tan\gamma} \;=\; \frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{1+\sin\beta}{\cos\beta} \;=\; \frac{2}{\cos\beta}$$

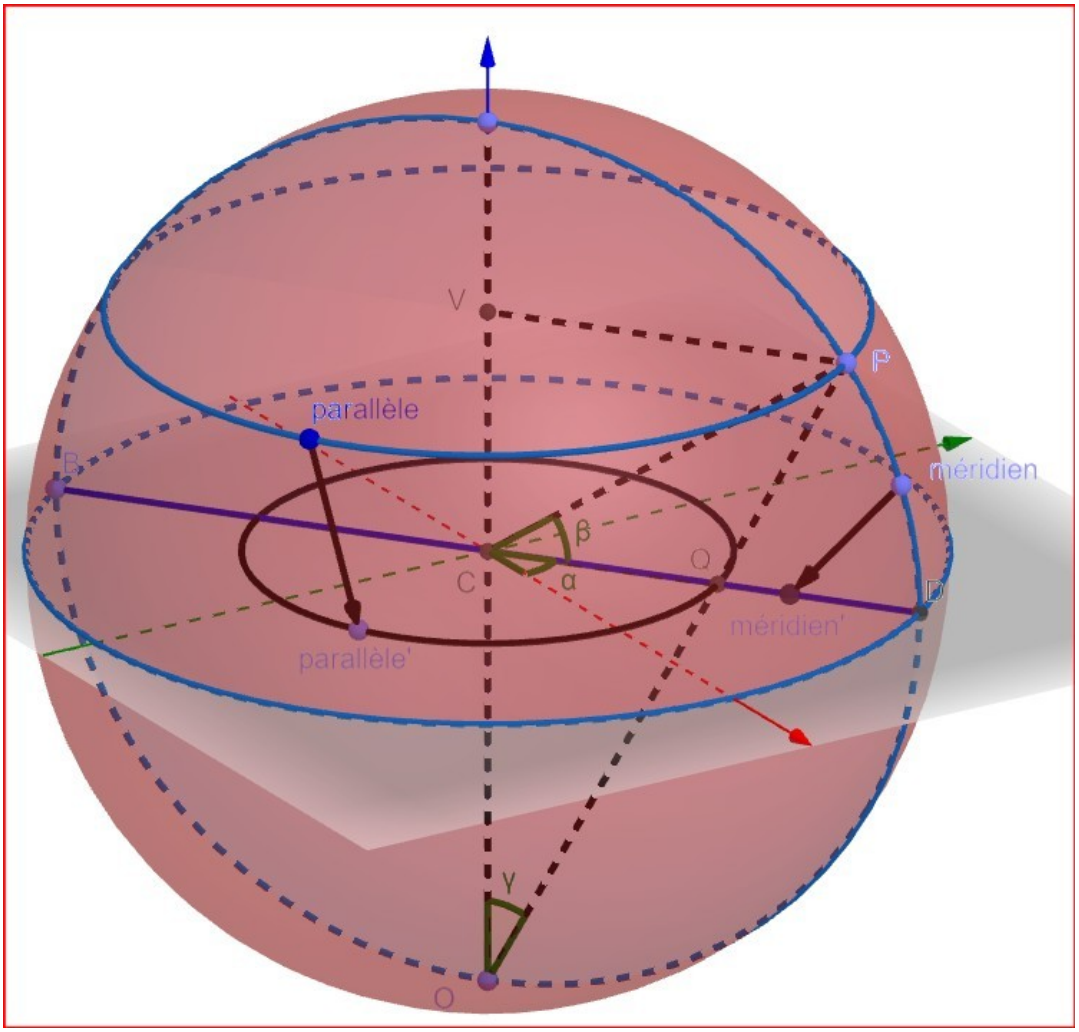
où on a utilisé les 2 dernières formes de l'expression de $\tan\gamma$ qui figurent dans la formule .

$$\boxed{QQ' \;=\; \frac{2}{\cos\beta}} \qquad (4b)$$

2.2 Projection des cercles de la sphère

2.2.1 Projection des parallèles et des méridiens relatifs au pôle de la projection

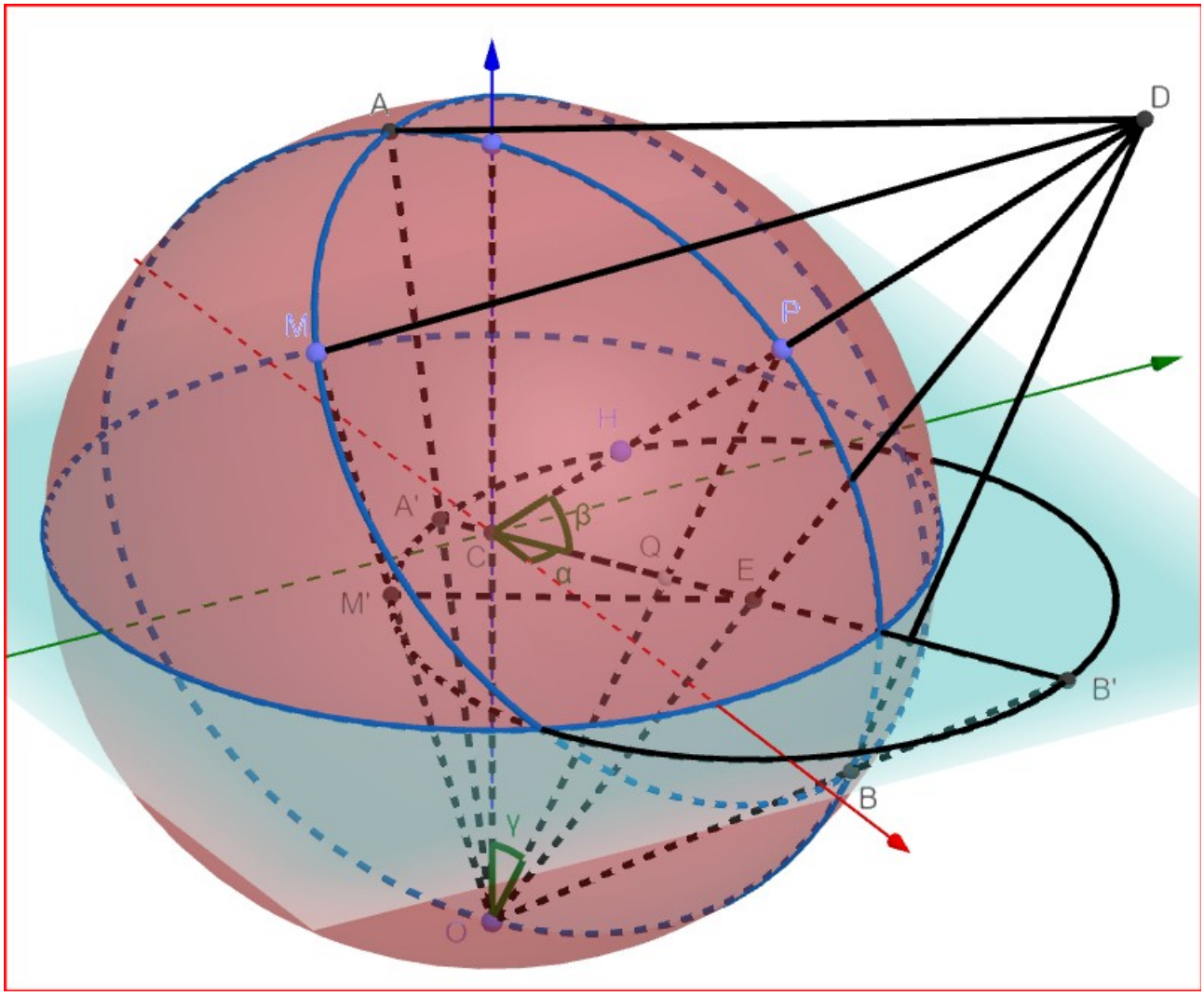
Les grands cercles méridiens qui sont des intersections des plans verticaux contenant l'axe OC sont transformés en droites passant par le centre C



Les cercles parallèles qui sont intersection des plans orthogonaux à l'axe OC avec la sphère sont transformés en cercles de centre 0.

La projection stéréographique est conforme. L'angle de 2 vecteurs tangents au point d'intersection de deux courbes de la sphère qui se coupent sur la sphère est conservé. Les angles des vecteurs tangents au point d'intersection des courbes projetées est le même que celui sur la sphère. Ainsi les droites projetées des méridiens coupent les cercles projetés des parallèles à angle droit.

2.2.2 Projection des cercles quelconques



Considérons un cercle quelconque. Il est défini par la normale CP au plan qui le contient et par son centre H sur cette normale. Le grand cercle méridien défini par le plan contenant O, C, H et P coupe le cercle quelconque en A et B diamétralement opposés sur le cercle étudié.

Les projetés de A et B sont A' et B', situés sur la droite passant par C, transformée du méridien contenant P.

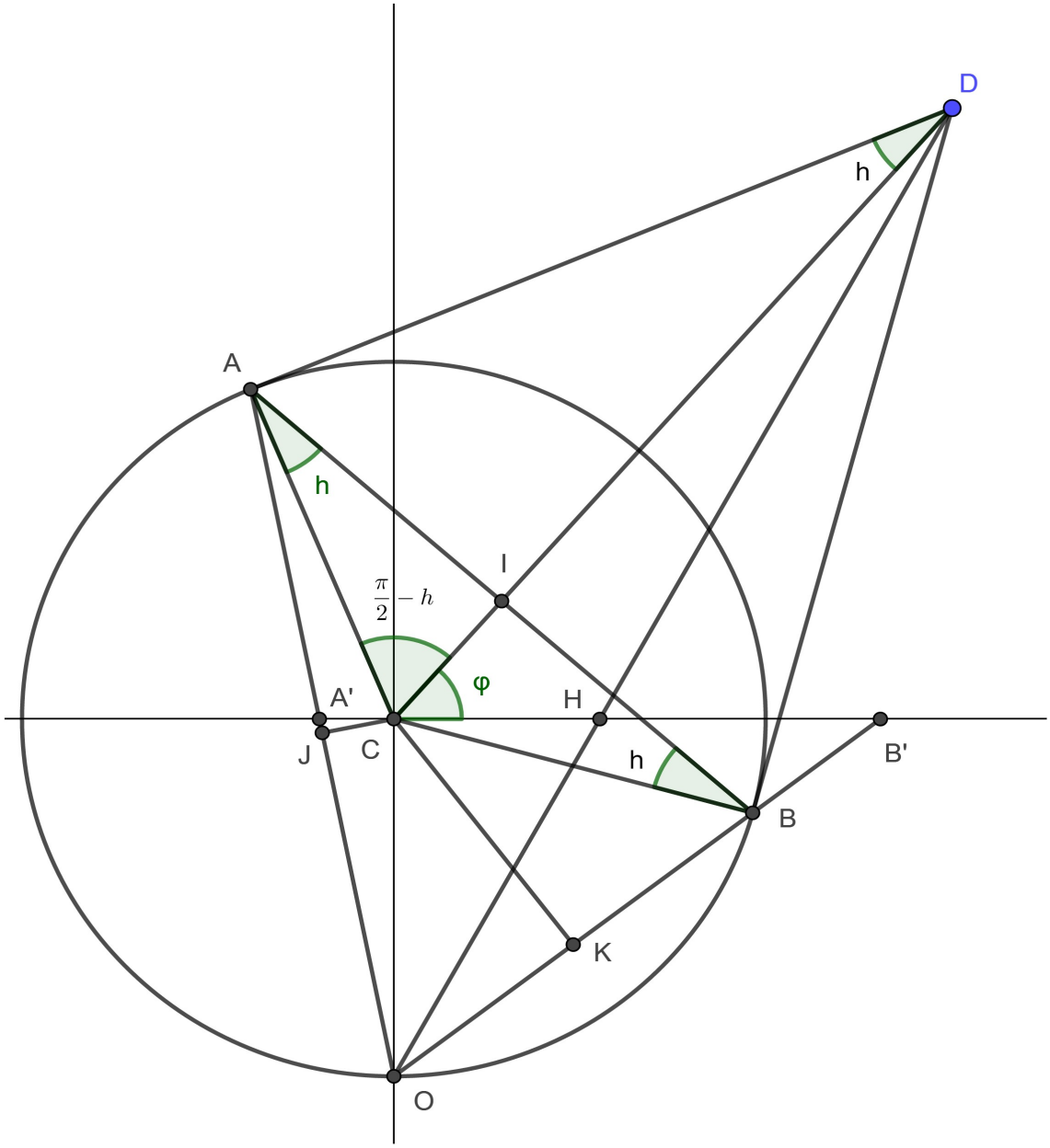
Considérons les tangente en A et B au méridien. Elles se coupent en D qui est sur l'axe CP du cercle étudié. Le point D est le sommet du cône tangent à la sphère selon le cercle étudié.

Considérons un point quelconque M du cercle étudié et son transformé M' intersection de OM et du plan xCy. M' est dans le plan DMO (car sur MO).

Considérons le point E situé à l'intersection des segments A'B' et du segment OD. E étant sur OD est dans le plan DMO. Le segment EM' est donc dans ce même plan car M' est dans le plan DMO car sur MO.

MD est tangent à la sphère et orthogonal au cercle étudié en M car c'est une génératrice du conne. Comme la projection est conforme, le vecteur tangent en M à la sphère et orthogonal au cercle étudié est projeté en un vecteur orthogonal en M' au projeté du cercle. Or en M' ce vecteur sera dans

le plan DMO, donc selon la direction de M'E. Le point E est donc l'intersection de toutes les normales au projeté du cercle étudié. Ce projeté est donc un cercle de centre E et de diamètre A'B'.



Considérons la coupe dans le plan méridien passant par le sommet D du cône.

Dans ce plan, l'angle polaire du point A est $a=\varphi+(\frac{\pi}{2}-h)$ et l'angle polaire du point B est $b=\varphi-(\frac{\pi}{2}-h)$.

Ainsi les abscisses des points B' et A' sont données par :

$$\overline{CB'}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2})=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi+h}{2})=\cot\frac{\varphi+h}{2}$$

$$\overline{CA'}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})=\tan(\frac{h-\varphi}{2})$$

Le diamètre du cercle projeté est donné par :

$$\oslash = \overline{CB'} - \overline{CA'} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi + h}{2}\right) - \tan\left(\frac{h - \varphi}{2}\right)$$

Appliquons l'identité $\tan p - \tan q = \sin \frac{(p-q)}{cosp \cos q}$. Il vient :

$$\oslash = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\sin\left(\frac{\varphi + h}{2}\right)\cos\left(\frac{h - \varphi}{2}\right)}$$

Appliquons l'identité $2 \sin p \cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q)$. Il vient :

$$\boxed{\oslash = \frac{2 \cos h}{\sin h \ + \ \sin \varphi}} \qquad (5)$$

L'abscisse du centre H du cercle projeté est donnée par :

$$2\overline{CH} = \overline{CB'} + \overline{CA'} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi + h}{2}\right) + \tan\left(\frac{h - \varphi}{2}\right)$$

En appliquant l'identité $\tan p + \tan q = \sin \frac{(p+q)}{cosp \cos q}$ on obtient :

$$2\overline{CH} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi + h}{2}\right)\cos\left(\frac{h - \varphi}{2}\right)}$$

et en appliquant l'identité $2 \sin p \cos q = \sin(p+q) + \sin(p-q)$ on obtient finalement :

$$\boxed{\overline{CH} = \frac{\cos \varphi}{\sin h \ + \ \sin \varphi}} \qquad (6)$$

2.2.3 Projection d'un grand cercle quelconque

Un grand cercle est un cercle dont le plan qui le contient passe par le centre C de la sphère. Dans ce cas sa hauteur *h* est nulle. Les formules () et () deviennent :

Diamètre : $\boxed{\oslash = \frac{2}{\sin \varphi}}$

Abscisse du centre : $\boxed{\overline{CH} = \frac{1}{\tan \varphi}}$

2.2.4 Repérage par colatitude θ

Nous avons repéré la direction de la normale au plan contenant le cercle étudié par ses coordonnées sphériques, azimut et site φ . Si on remplace par son complémentaire équivalent de la colatitude, alors les formules précédentes deviennent :

Cercle quelconque :

Diamètre cercle projeté: $\boxed{\varnothing = \dfrac{2\cos h}{\sin h \ + \ \cos\theta}}$

Abscisse du centre : $\boxed{\overline{CH} = \dfrac{\sin\theta}{\sin h \ + \ \cos\theta}}$

Cas d'un grand cercle $(h=0)$:

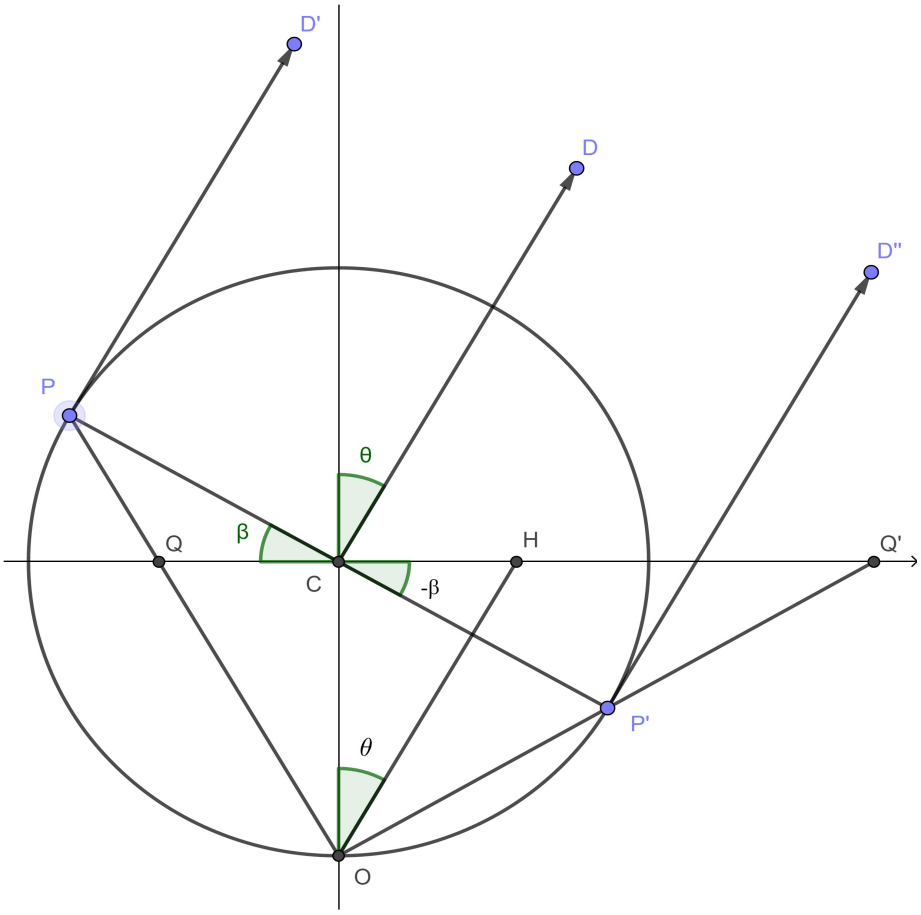
Diamètre cercle projeté :

$$\boxed{\varnothing = \frac{2}{\cos\theta}} \tag{7}$$

Abscisse du centre

$$\boxed{\overline{CH} = \tan\theta} \tag{8}$$

Remarque : On a établi au chapitre 2, la relation () $QQ' \ = \ \dfrac{2}{\cos\beta}$ qui donne la distance entre 2 points projetés Q et Q' des 2 points diamétralement opposés sur la sphère P et P' dont le site de l'un est égal à β .



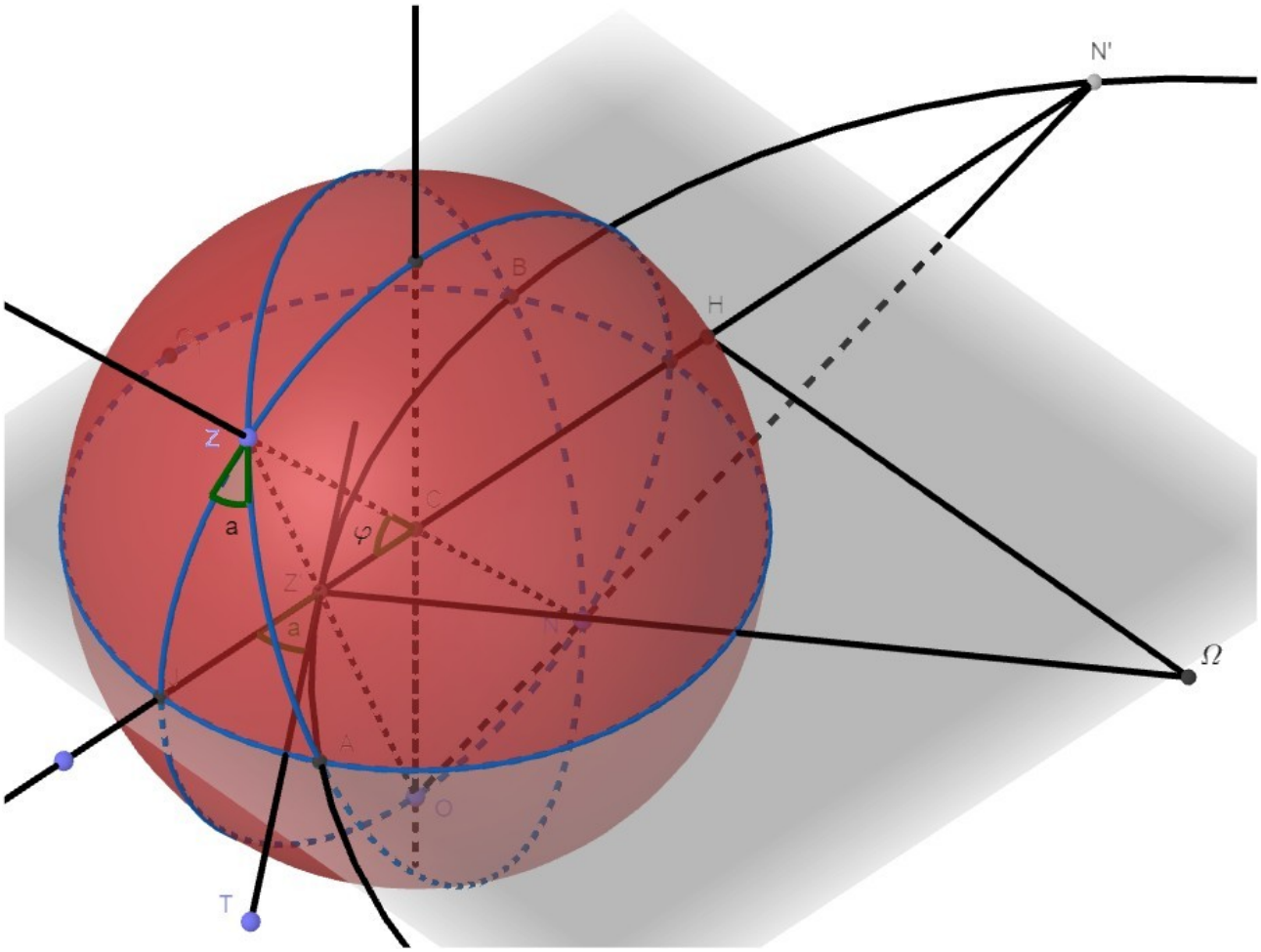
Si on considère un grand cercle dont la direction de la normale au plan qui le contient a pour colatitude , les deux points P et P' qui ont les sites minimum et maximum sur ce grand cercle ont pour site . Leurs projetés Q et Q' constituent un diamètre du cercle projeté de longueur $QQ' = \frac{2}{\cos\beta} = \frac{2}{\cos\theta}$. On retrouve ainsi la relation () qui donne le diamètre dans le cas du grand cercle.

La relation () $CH = \tan\theta$ donnant l'abscisse du centre est également évidente sur la figure, car H est dans la direction de CD ou D est le point à l'infini d'intersection des tangentes en P et P' au grand cercle.

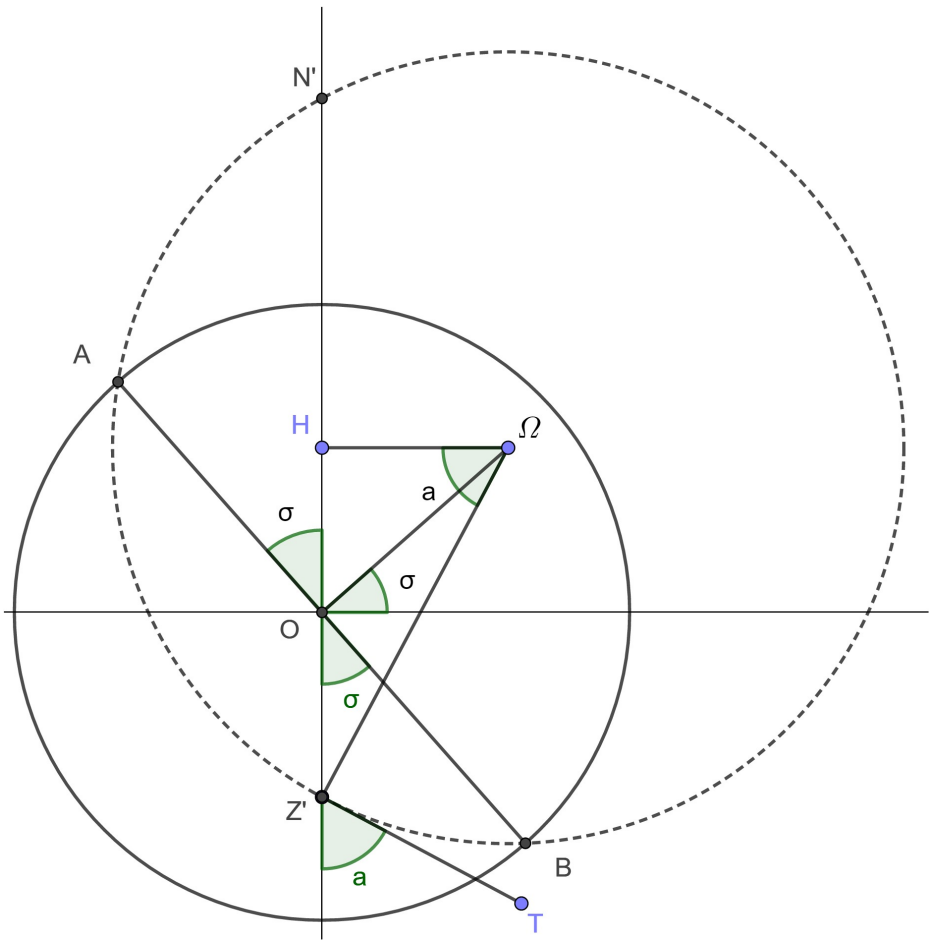
2.2.5 Projection d'un grand cercle d'azimut dans l'astrolabe

Le tympan d'un astrolabe est une projection stéréographique de la sphère céleste sur l'équateur depuis le pôle Sud. Les cas étudiées dans les paragraphes précédents permettent de tracer les projetés suivants :

- Le projeté du pôle Nord qui est le centre du tympan.
- Les méridiens, qui mesurent les angles horaires des étoiles, passant par les pôles deviennent des diamètres qui se coupent au centre du tympan, projeté du pôle Nord.
- Les cercles parallèles qui mesurent les déclinaisons des étoiles deviennent des cercles concentriques. On trace en particulier ceux qui sont relatifs au tropique du Cancer, à l'équateur (c'est le cercle invariant dans la projection), et au tropique du Capricorne qui généralement est la frontière du tympan.
- Le projetés Z' et N' du zénith Z et du Nadir N du lieu de construction de l'astrolabe. Si φ est la latitude du lieu, on aura $|Z'N'| = \frac{2}{\cos\varphi}$
- Les projetés des cercles de hauteur du lieu de construction. Le cercle de hauteur $h = 0°$ est l'intersection du plan horizontal du lieu avec la sphère céleste et le cercle de hauteur $h = 90°$ est réduit à un point, le Zénith. On utilisera pour tracer ces projetés, les relations des paragraphes 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4.
- Les projetés des cercles d'azimut, grands cercles qui passent par le Zénith et le Nadir et qui font un dièdre d'angle *a* avec le vertical Nord-Sud, qui est celui d'entre eux qui passe par les pôles. Les projetés de ces cercles sont également des cercles que nous allons préciser dans ce qui suit.



La figure précédente montre le méridien origine et un grand cercle d'azimut qui se coupent au zénith Z et au Nadir N selon un angle dièdre *a*. Le grand cercle d'azimut *a* coupe l'équateur en A et B qui sont invariants dans la projection. Le cercle projeté est donc circonscrit aux projetés Z', N', A et B de ces points. En fait pour trouver le centre du cercle, les points A et B ne sont pas utilisés. On utilise le fait qu'on connaît l'angle que fait la tangente au cercle projeté en Z' avec la direction CZ'. En effet, puisque la transformation est conforme, on retrouve l'angle dièdre *a* des tangentes aux grands cercles en Z. On trace donc un segment ZT qui fait un angle a avec la direction CZ' et le centre se trouve à l'intersection de la perpendiculaire à ce segment, et de la médiatrice au segment Z'N'.



Si Φ est la latitude du lieu, on a $\overline{OZ'}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})$ et $\overline{ON'}=\frac{-1}{\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})}$ avec $\|Z'N'\|=\frac{2}{\cos\varphi}$ et $\|HZ'\|=\frac{1}{\cos\varphi}$.

Il en résulte que :

$$y_C=\overline{OH}=\overline{OZ'}-\overline{HZ'}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})-\frac{1}{\cos\varphi}=\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{1}{\cos\varphi}$$

soit :

$$y_C=-\tan\varphi$$

Attention : Sur la figure précédente $y_C > 0$ est vers le bas !!! et xc > 0 vers la gauche.

Par ailleurs :

$$|\frac{H\Omega}{HZ'}|=|\tan(\frac{\pi}{2}-a)|=|\frac{1}{\tan a}|$$

d'où :

$$|x_C|=H\Omega \ = \ |\frac{\cos a}{\sin a \ \ \cos\varphi}|$$

Avec notre choix de sens positif de y_C et de l'azimut a, on a :

$$x_C = \frac{-\cos a}{\sin a \quad \cos\varphi}$$

Le rayon du cercle projeté $r = \|\Omega Z'\|$ est donné par $\frac{\mathrm{HZ}'}{\Omega Z'} = |\sin a|$

d'où :

$$r \;=\; \left|\frac{1}{\sin a \quad \cos\varphi}\right|$$

Les coordonnées des points A et B se calculent facilement à partir de l'angle σ de AB avec l'axe des y qui est égal (angles à cotés perpendiculaires) à l'angle polaire de Ω , tel que :

$$\tan\sigma = \frac{y_C}{x_C} = -\sin\varphi \quad \tan a$$

Mais, dans le cas de l'astrolabe, on limite ne limite pas le tracé du cercle projeté par l'équateur mais par le cercle projeté de l'horizon du lieu et du tropique du Capricorne

3 Tracés dans l'astrolabe

Les tracés qui figurent sur le tympan de l'astrolabe sont les projetés stéréographiques des divers cercles intéressants de la sphère céleste. Pour expliquer ces tracés, on considère dans ce qui suit un repère équatorial ***local*** qui a l'axe Z_E vers dirigé vers le pôle Nord, l'axe X_E intersection du plan équatorial et du méridien du lieu (qui est le plan contenant l'axe des pôles et la verticale locale joignant le Nadir au zénith), et enfin l'axe Y_E intersection du plan équatorial avec le plan horizontal local et dirigé vers l'Est.

Les projetés de l'astrolabe sont définis dans un plan de l'équateur avec l'axe y_a dirigé vers le sud et l'axe x_a dirigé vers l'Ouest. On a donc $y_a = X_E$ et $x_a = -Y_E$. Dans ce plan on peut utiliser des coordonnées polaires (ρ, θ) , mais il faut faire attention au fait que si α est l'angle polaire dans (X, Y) , on a

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Autrement dit si $\alpha = \mathrm{atan2}(y_a, x_a)$ alors $\theta = \mathrm{atan2}(X_E, -Y_E)$.

Remarque à propos des notations. Dans ce qui suit nous réservons la lettre ρ aux rayons des cercles projetés qui sont centrés au centre de la sphère, qui est aussi l'origine du plan de projection. Les rayons des cercles projetés dont le centre est décalé par rapport à cette origine seront notés différemment, *r* par exemple.

3.1 Orientation du plan de projection

Les planiciels (cartes du ciel) et les logiciels de planétarium représentent les figures dans le plan de projection vues depuis le pôle de projection O, c'est-à-dire vues par en dessous. Les constellations ont la forme habituelle qui correspond à notre vision du ciel. Par contre la position des points cardinaux Est et Ouest est inhabituelle avec l'Ouest droite alors qu'il est à gauche sur les cartes de géographie.

Dans le cas de l'astrolabe, la projection est vue depuis le dessus. Elle présente donc une symétrie miroir par rapport à notre vision traditionnelle du ciel, par contre si le Nord est en haut, l'Ouest est à gauche comme sur les cartes de géographie. Ptolémée qui a conçu l'astrolabe a choisi cette solution.

Si on regarde les étoiles en direction de l'horizon sud, on a la sensation qu'elles se déplacent dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour suivre leur mouvement avec l'astrolabe, il faut faire tourner l'araignée dans ce sens, alors que c'est l'inverse avec un planiciel où pour suivre le mouvement horaire des astres, il faut tourner le disque mobile du planiciel en sens inverse des aiguilles d'une montre.

Les lignes de coordonnées en azimut et hauteur ne sont tracées qu'au-dessus de l'horizon qui limite notre champ visuel. De plus les tracés sont limitées à leur intersection avec le tropique du capricorne car les étoiles dont la déclinaison les positionne sous ce tropique ne sont pas observables dans nos régions. cette limite intervient avant celle de l'horizon sud.

Sur les parallèles qui intersectent l'horizon, lorsqu'il fait nuit les astres se lèvent à l'horizon Est et se couchent à l'horizon Ouest.

3.2 Projeté du zénith

L***a direction du zénith*** du lieu est définie par la latitude φ du lieu. Ses cosinus directeurs sont donnés par $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$. Il se projette en $x=0$, $y=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2})$.

3.3 Projetés des lignes du repère équatorial

Les grandes lignes de coordonnées relatives au repère équatorial sont les méridiens qui sont les grands cercles qui passent par les deux pôles et les parallèles qui sont les cercles contenus dans des plans parallèles à l'équateur.

3.3.1 Projeté du parallèle de déclinaison *β (*ou latitude *φ)*

Un ***cercle d'égale déclinaison β*** qui est aussi un ***cercle parallèle de latitude*** φ est orthogonal à la direction $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Son projeté est un cercle de paramètres :

$$\text{centre : } \begin{cases} x_o=0 \\ y_o=0 \end{cases}$$

$$\text{rayon : } \rho=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}) .$$

3.3.2 Projeté du méridien d'angle horaire *H*

Un méridien est un demi grand cercle joignant un pôle à l'autre; mais pour la commodité des tracés on considère le grand cercle en entier, qui concerne H et $H=-12h$.

L'angle horaire local H d'un astre est mesuré à partir du Sud dans le sens des aiguilles d'une montre. À midi solaire, l'angle horaire local du Soleil vaut $H = 0$h, c'est-à-dire 0°. Une heure plus tard son angle horaire local vaut 1h, soit $H = 1$h, c'est-à-dire 15°. Le méridien origine $H = 0$ passe par le zénith du lieu.

Le grand ***cercle méridien d'angle horaire local H*** est orthogonal à la direction $\begin{pmatrix} \cos H \\ -\sin H \\ 0 \end{pmatrix}$. Son projeté une ***droite*** passant par O d'angle polaire :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - H \ .$$

Intersection méridien - parallèle

Le projeté du point d'intersection d'un parallèle de latitude φ avec un méridien d'angle horaire local H a pour coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \rho & = & \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ \theta & = & \frac{\pi}{2} - H \end{cases}$$

3.4 Projetés des lignes du repère horizontal

Le repère horizontal est le repère local qui a sont axe Z_H dirigé vers le zénith, son axe X_H horizontal dirigé vers le Sud, et son axe Y_H dirigé vers l'Est. La direction Y_H est confondue avec Y_E, et Z_H et X_H sont contenus dans le méridien local.
La matrice de rotation de l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ (colatitude) autour de l'axe Y_E :

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(matEH)}$$

fait passer du repère équatorial local au repère horizontal.

Les grandes lignes de coordonnées relatives au repère horizontal sont les ***verticaux*** qui sont les grands cercles qui passent par le Zénith du Lieu et le Nadir et les ***almicantarats*** qui sont les cercles contenus dans des plans parallèles au plan horizontal (on trouve également les orthographes suivantes : almucantarat, almuquantarat, almucantarath,...)

Le vertical qui passe par les points cardinaux Nord et Sud, passe également par les pôles. Il est confondu avec le méridien dit local qui passe par le Zénith et Nadir du lieu. Les autres verticaux font un angle dièdre d'***azimut*** *a* avec ce vertical origine, origine qui était choisie coté Sud par les astronomes , mais qui est de plus en plus choisie coté Nord suite à l'influence grandissante des applications de navigation.

Les almicantarats sont des cercles de la sphère céleste qui intersectent un plan parallèle au plan horizontal. Ce sont en quelque sorte des parallèles de hauteur h par rapport au plan horizontal, le mot parallèle tout court étant réservé aux cercles contenus dans les plans parallèles à l'équateur.

3.4.1 Projeté de l'almicantarat de hauteur *h*

Les points du ***cercle d'égale hauteur h***, également appelé ***almicantarat de hauteur h*** sont orthogonaux au vecteur $\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$. Son projeté est le cercle de paramètres :

$$\text{centre} \begin{cases} x_C &= 0 \\ y_C &= \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi + \sin h} \end{cases}$$

$$\text{rayon} \quad r = \frac{\cos h}{\sin\varphi + \sin h}$$

3.4.1.1 Projeté de l'horizon

L'almicantarat de hauteur $h = 0$ est l'horizon. C'est donc le cercle de paramètres :

$$\begin{cases} x_H &= 0 \\ y_H &= \dfrac{1}{\tan\varphi} \\ r_H &= \dfrac{1}{\sin\varphi} \end{cases}$$

Coté Nord, le projeté de l'horizon limite le tracé des projeté des verticaux qui seront décrits plus loin.

3.4.1.2 Projeté des almicantarats de crépuscule.

Sous l'horizon, on trace encore trois almicantarats :

- celui de hauteur -6°. Entre 0° et -6° c'est le crépuscule civil.
- celui de hauteur -12°. Entre -6° et -12° c'est le crépuscule nautique.
- celui de hauteur -18°. Entre -12° et -18° c'est le crépuscule astronomique.

3.4.2 Intersection d'un almicantarat avec un parallèle

Un parallèle de déclinaison β ne coupe un almicantarat de hauteur h d'un lieu de latitude φ que si :

$$\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - h\right) \leq \beta \leq \varphi + \left(\frac{\pi}{2} - h\right)$$

Dans tous les cas l'intersection se trouvant dans le plan $Z = \sin\beta$, on déduit de la relation (ro) la valeur de la distance polaire des points d'intersection :

$$\rho = \frac{\cos\varepsilon}{1 + \sin\varepsilon} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$$

mais il reste à calculer l'angle polaire θ.

3.4.2.1 Intersection puis projection

L'almicantarat de hauteur h est contenu dans le plan $X\cos\varphi+Z\sin\varphi=\sin h$. Ce plan intersecte le plan $Z=\sin\beta$ du parallèle de déclinaison β en $X=\frac{\sin h-\sin\varphi\sin\beta}{\cos\varphi}$ et

$$Y_{1,2}=\pm\sqrt{1-\sin^2\beta-\left(\frac{\sin h-\sin\varphi\sin\beta}{\cos\varphi}\right)^2}=\pm\frac{\sqrt{(\cos(\varphi+\beta)+\sin h)(\cos(\varphi-\beta)-\sin h)}}{\cos\varphi}$$

formulation qui est a priori plus compliquée que $Y_{1,2}=\pm\sqrt{1-X^2-Z^2}$.

Les coordonnées polaires des projetés s'écrivent :

$$\begin{cases}\rho &= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\\ \theta &= \operatorname{atan2}(X,-Y_{1,2})\end{cases}$$

Intersection avec l'horizon : Les formules se simplifient légèrement avec l'horizon (almicantarat de hauteur $h=0$). Il vient :

$$X=-\sin\beta\tan\varphi \text{ et } Y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{\cos(\varphi+\beta)\cos(\varphi-\beta)}}{\cos\varphi}$$

D'où :

$$\begin{cases}\rho &= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\\ \theta &= \operatorname{atan2}\left(-\sin\beta\tan\varphi,\mp\frac{\sqrt{\cos(\varphi+\beta)\cos(\varphi-\beta)}}{\cos\varphi}\right)\end{cases}$$

3.4.2.2 projection puis intersection

Le projeté du parallèle de déclinaison β est un cercle de paramètres :

$$\begin{cases}x_o &= 0\\ y_o &= 0\\ \rho &= \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\end{cases}$$

Le projeté de l'almicantarat de hauteur h pour la latitude φ est un cercle de paramètres :

$$\begin{cases}x_C &= 0\\ y_C &= \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi+\sin h}\\ r &= \frac{\cos h}{\sin\varphi+\sin h}\end{cases}$$

L'intersection de ces deux cercles peut être calculée comme décrit dans le mémo sur la formule de Héron, mais ici les calculs sont simplifiés car le deuxième centre est sur l'axe des y. La distance k de la corde au centre est ici l'ordonnée des points d'intersection. On a donc :

$$\begin{cases} y &= \dfrac{y_C^2+\rho^2-r^2}{2y_c} \\ x &= \pm\sqrt{(\rho^2-y^2)} \end{cases}$$

3.4.3 Vertical d'azimut *a*

Un vertical d'azimut *a* est un demi-grand cercle de même azimut *a*. Pour la commodité du tracé on considère le grand cercle en entier, qui concerne les azimuts *a* et $a \pm \pi$.

La matrice de rotation de l'angle d'azimut *a* autour de l'axe vertical Z_H :

$$\begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

fait pivoter le repère local de l'angle d'azimut. Le résultat du produit de la matrice (matEH) par cette matrice :

$$\begin{pmatrix} \sin\varphi\cos a & -\sin\varphi\sin a & \cos\varphi \\ \sin a & \cos a & 0 \\ -\cos\varphi\cos a & \cos\varphi\sin a & \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(matEA)}$$

contient en colonnes les cosinus directeurs des vecteurs de base $\vec{i_A}$, $\vec{j_A}$, $\vec{k_H}$ du repère résultant de ces rotations.

Les points des grands cercles verticaux d'azimut a sont orthogonaux à la direction :

$$\begin{pmatrix} u &= -\sin a\sin\varphi \\ v &= \cos a \\ w &= \sin a\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{(ja)}$$

avec $u^2+v^2+w^2=1$. Leurs projetés sont des cercles de paramètres :

$$\text{centre : } \begin{cases} x_C &= \dfrac{-\cos a}{\sin a \ \cos\varphi} \\ y_C &= -\tan\varphi \end{cases}$$

$$\text{rayon } r = \left|\frac{1}{\sin a \ \cos\varphi}\right|$$

à l'exception de celui d'azimut $a=0$ ou π qui est réduit à l'axe des y_a .

Remarquons que tous les centres sont sur la parallèle à l'axe des x d'ordonnée , et que tous les projetés se coupent au projeté du zénith.

Les projetés des grands cercles verticaux d'azimut *a* sont limités coté Sud par le tropique du Capricorne et coté Nord par l'horizon.

3.4.4 Intersection d'un vertical avec un parallèle

Ici aussi, l'intersection se trouvant dans le plan $Z=\sin\beta$, on déduit de la relation (ro) la valeur de la distance polaire des points d'intersection :

$$\rho=\frac{\cos\varepsilon}{1+\sin\varepsilon}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

mais il reste à calculer l'angle polaire θ .

Le calcul des intersections sur la sphère, puis la projection des intersections n'est pas plus simple que le calcul de l'intersection des cercles projetés. Comme ceux-ci sont a priori déjà calculés, nous nous limitons à ce cas.

On recherche donc les points d'intersection du projeté du parallèle de déclinaison β qui est un cercle de paramètres $\begin{cases} x_o & = & 0 \\ y_o & = & 0 \\ \rho & = & \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right) \end{cases}$

avec le projeté du vertical d'azimut a qui est un cercle de paramètres : $\begin{cases} x_C & = & \frac{-\cos a}{\sin a \quad \cos\varphi} \\ y_C & = & -\tan\varphi \\ r & = & \left|\frac{1}{\sin a \quad \cos\varphi}\right| \end{cases}$

Comme dans le cas de l'almicantarat, l'intersection des deux cercles peut être calculée comme décrit dans le mémo sur la formule de Héron, mais ici il n'y a pas de simplification.

On calcule les valeurs d, k et h données par : $\begin{cases} d & = & \sqrt{x_C^2+y_C^2} \\ k & = & \frac{d^2+\rho^2-r^2}{2d} \\ h & = & \sqrt{\rho^2-k^2} \end{cases}$

Les points d'intersections sont alors donnés par :

$$\begin{cases} x_{1,2} & = & k\frac{x_C}{d}\pm h\frac{y_c}{d} \\ y_{1,2} & = & k\frac{y_C}{d}\mp h\frac{x_c}{d} \end{cases}$$

Faire attention à la concordance des $\pm$ et $\mp$, les signes du haut sont à affecter à une solution et les signes du bas à l'autre.

Le cas particulier de l'intersection avec le projeté du tropique du capricorne est intéressant, afin de limiter le tracé des verticaux, coté sud, à leur rencontre avec le projeté de ce parallèle.

3.4.5 Intersection d'un vertical avec l'horizon

Il est intéressant de calculer ces points pour limiter le tracé des verticaux, coté nord, à leur rencontre avec le projeté de l'horizon.

L'intersection avec l'horizon se fait à l'extrémité du vecteur de base du repère local tourné de l'azimut a, qui a pour cosinus directeurs la première colonne de la matrice (matEA), c'est-à-dire le point de la sphère de coordonnées .

Le calcul des coordonnées polaires est ainsi direct. Elles sont données par $\rho=\frac{\sqrt{1-Z^2}}{(1+Z)}$ et $\theta=\text{atan2}(y_a,x_a)=\text{atan2}(X,-Y)$. D'où :

$$\begin{cases} \rho_1 & = & \frac{\sqrt{1-(\cos\varphi\cos a)^2}}{1-\cos\varphi\cos a} \\ \theta_1 & = & \text{atan2}(\sin\varphi\cos a,-\sin a) \end{cases}$$

L'autre intersection étant donnée par $\rho_2=\frac{1}{\rho_1}$ et $\theta_2=\theta_1\pm\pi$.

On peut également, calculer ces points d'intersection par l'intersection des cercles projetés comme au paragraphe précédent, avec les projetés des parallèles.

Autre approche plus calculatoire avec l'intersection des projetés :

On recherche les points d'intersection du projeté de l'horizon qui est un cercle de paramètres

$$\begin{cases} x_H & = & 0 \\ y_H & = & \frac{1}{\tan\varphi} \\ \rho & = & \frac{1}{\sin\varphi} \end{cases}$$

avec le projeté du vertical d'azimut *a* qui est un cercle de paramètres : $\begin{cases} x_A & = & \frac{-\cos a}{\sin a \ \cos\varphi} \\ y_A & = & -\tan\varphi \\ r & = & \left|\frac{1}{\sin a \ \cos\varphi}\right| \end{cases}$

On utilise la méthode décrite au paragraphe précédent 3.4.4. Mais ici le premier cercle n'étant pas centré à l'origine, on déplace l'origine en son centre en posant :

$$\begin{cases} x_C & = & x_A \\ y_C & = & y_A-y_H \end{cases}$$

Il faut ensuite corriger les cordonnées obtenues $y_{1,2}$ en leur ajoutant y_H .

3.5 Les heures inégales

Sur la partie inférieure du tympan, entre le projeté de l'horizon et le projeté du capricorne, on n'a présenté jusqu'à présent que les tracés des projetés des almicantarats de crépuscule. Sur cette partie, on trace également des lignes appelées heures inégales qui ne sont plus d'utilité depuis très longtemps, et qui correspondent au découpage égyptien de la durée de la nuit (plus longue en hiver qu'en été dans notre hémisphère) en 12 parties égales.

Considérons un parallèle de déclinaison β situé entre les tropiques. Il intersecte l'horizon en deux points qui correspondent au coucher et lever des astres qui ont pour déclinaison β et donc au soleil lorsqu'il est à cette déclinaison. La portion d'arc au-dessus de l'horizon correspond à la visibilité de l'astre, c'est-à-dire à la durée du jour dans le cas du soleil. La mesure de l'arc de ce parallèle qui est en-dessous de l'horizon correspond à la durée de la nuit. Cet arc est divisé en 12 parties égales, numérotées en heures avec 0h à droite coté Ouest au moment où la nuit commence et 12h coté Est lorsque la nuit finit. Le point 6h étant le point d'intersection de cet arc avec l'axe vertical. En joignant les points des divers parallèles qui correspondent à la même heure, on obtient la ligne qui correspond à cette heure inégale.

Le calcul des lignes est simplifié par le fait que la ligne 6h est simplement l'axe des *y*. La ligne 0h - 12h est l'horizon. Les lignes 6+n et 6-n sont symétriques par rapport à l'axe des y. Il suffit donc de calculer les cinq lignes 1h à 5h.

Pour calculer les points à une déclinaison β donnée, on calcule les coordonnées polaires (ρ, θ) du point d'intersection coté Ouest. La longueur d'une heure *inégale* est alors de $\frac{\pi+2\theta}{12}$, et le point correspondant à l'heure n a pour coordonnées polaires :

$$(\rho, \theta - k\frac{\pi+2\theta}{12})$$

Comme le calcul fournit tous les points horaires d'une même déclinaison, le calcul des 5 lignes est fait simultanément.

3.6 Détails de construction

3.6.1 L'araignée

Pour décrire l'araignée, on peut considérer un repère orthogonal d'***origine le projeté du pôle Nord***, avec l'axe des *x* passant par le point γ. L'axe des *x* de l'araignée coïncide avec l'axe de *x* du tympan toutes les 23h56m (24h sidérales), et en particulier il y a coïncidence à l'instant du coucher du soleil (18h solaire) le jour de l'équinoxe de printemps. ***Pour décrire l'araignée, on la considère superposée au tympan à cet instant là.***

Sur l'araignée le projeté de ***l'écliptique*** est le cercle projeté d'un grand cercle centré sur l'axe des *y*, dont le centre est le point milieu entre le point haut du projeté du tropique du Cancer et le point bas du projeté du tropique du Capricorne. Ce cercle est donc tangent en haut projeté du tropique du Cancer et en bas au projeté du tropique du Capricorne. Il est décalé vers le bas par rapport à l'axe des x qui passe par le projeté du pôle et joint les projetés des points γ et γ'.

Le contour externe de l'araignée est le cercle projeté du tropique du Capricorne. Il est gradué dans le sens positif en ascensions droites, à partir du point γ sur l'axe des *x* et en jours de l'année, avec le 21 mars au même niveau.
Si la graduation en jours de l'année est régulière, on aura un fonctionnement équivalent à celui d'un planiciel. Il semble que traditionnellement cette graduation servait à positionner le soleil, il faut alors la modifier pour prendre en compte l'équation du temps (retard ou avance du soleil vrai sur le soleil moyen due à l'ellipticité et à l'obliquité de l'orbite) et la graduer avec l'ascension droite du soleil vrai.

Les cercles d'égale déclinaison ne sont pas tracés sur l'araignée. On voit à travers les tropiques et l'équateur sur le tympan, mais on dispose d'une réglette (ostenseur ou alidade de repérage) avec une graduation non linéaire en déclinaisons (90° au niveau du pôle, 23° au niveau du tropique du cancer, 0° au niveau de l'équateur,...). Les distances à l'origine sont en $\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{4})$ avec 1 au niveau de l'équateur.

3.7 Le tympan

Comme un planiciel, l'extérieur du tympan est gravé en heures sidérales avec 12h en haut et 0h = 24h en bas.

Nous avons vu comment tracer le zénith (le Nadir est trop loin), les parallèles des tropiques et de l'équateur, les verticaux d'azimut, les almicantarats et en particulier l'horizon et les lignes de crépuscule.

Sur l'horizon, on porte les points cardinaux Nord, Est et Ouest (le point cardinal Sud est trop loin).