Étalonnage d'un télescope

Septembre 2018

llibre.michel@wanadoo.fr

Abstract

English : This paper presents a method for identifying telescope setup errors, zeros for right ascension and declination control angles, and the alignment error between tube axis and the right ascension axis. These errors are estimated by the least squares method from the measurements of the pointing errors on stars.

I do not know if this method is already used to calibrate a telescope, or if it is effective in this case, but I used it successfully in the 1980s to improve the positional control of manipulator robots

Français : Ce document présente une méthode d'identification des erreurs de mise en station d'un télescope, des zéros des angles de commande en ascension droite et déclinaison et de l'erreur conique d'alignement de l'axe du tube sur l'axe d'ascension droite de la monture. Ces erreurs sont estimées par la méthode des moindres carrés à partir des mesures des erreurs de pointage sur des d'étoiles.

Je ne sais pas si cette méthode est déjà utilisée pour étalonner un télescope, ni si elle est efficace dans ce cas, mais je l'ai utilisée avec succès dans les années 1980 pour améliorer la commande en position des robots manipulateurs.

1 Modèle de l'effet des mésalignements

Considérons un observateur situé à la latitude φ et une direction stellaire de coordonnées horaires (H, β) où H est l'angle horaire et β est la déclinaison. *Attention, dans ce qui suit nous prenons pour l'angle horaire une convention de signe opposée à la convention classique afin de lui donner le même sens de variation que l'ascension droite,* et afin que ces deux angles soient égaux à une quasi-constate près. Ainsi, dans le repère équatorial d'axe Z dirigé selon l'axe polaire et d'axe X situé dans le plan méridien local, les cosinus directeurs de cette étoile s'écrivent simplement :

$$\begin{pmatrix} \cos H \cos\beta \\ \sin H \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

Pour un support de monture de télescope censé être horizontal et aligné Nord-Sud, on peut considérer les 3 mésalignements angulaires suivants, exprimés en radians :

- ε_A en azimut (angle de micro-rotation autour d'un axe Oz monture dirigé vers le Zénith),
- ε_N en niveau (angle de micro-rotation autour d'un axe Ox monture dirigé vers le Sud),
- ε_E en élévation (site, altitude,...) (angle de micro-rotation autour d'un axe Oy monture dirigé vers l'Est).

Les mésalignements font que dans le repère équatorial de la monture les coordonnées de la direction stellaire sont entachées d'une erreur ΔH en ascension droite et $\Delta\beta$ en déclinaison. Elles sont égales à $(H + \Delta H, \beta + \Delta\beta)$. Dans ces conditions, les cosinus directeurs de cette étoile dans le repère équatorial de la monture s'écrivent au deuxième ordre près :

$$\begin{pmatrix} \cos H \cos\beta - \Delta\beta \cos H \sin\beta - \Delta H \sin H \cos\beta \\ \sin H \cos\beta + \Delta H \cos H \cos\beta - \Delta\beta \sin H \sin\beta \\ \sin\beta + \Delta\beta \cos\beta \end{pmatrix}$$

On considérant que les angles de mésalignement sont de très petits angles, on peut leur faire correspondre, dans le repère horaire de la monture, la matrice de micro-rotation suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_A & \varepsilon_E \\ \varepsilon_A & 1 & -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E & \varepsilon_N & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de rotation qui applique ces mésalignements aux cosinus directeur dans le repère équatorial est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_A & \varepsilon_E \\ \varepsilon_A & 1 & -\varepsilon_N \\ -\varepsilon_E & \varepsilon_N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}$$

La dernière matrice transforme les cosinus directeurs dans le repère horaire de la monture, la deuxième matrice fait subir les 3 erreurs de mésalignement à ces cosinus directeurs et la première (inverse de la dernière) re-transforme le résultat dans le repère équatorial de la monture.

Ainsi, aux petits angles, on peut écrire la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos H\cos\beta - \Delta\beta\cos H\sin\beta - \Delta H\sin H\cos\beta \\ \sin H\cos\beta + \Delta H\cos H\cos\beta - \Delta\beta\sin H\sin\beta \\ \sin\beta + \Delta\beta\cos\beta \end{pmatrix} \simeq M \begin{pmatrix} \cos H\cos\beta \\ \sin H\cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \tag{1}$$

En identifiant les deux membres de ce système, tous calculs faits, on trouve les expressions suivantes pour $\Delta\beta$ et ΔH :

$$\Delta\beta = -\varepsilon_E\cos H + (\varepsilon_A\cos\varphi + \varepsilon_N\sin\varphi)\sin H$$

$$\Delta H = (\varepsilon_A\sin\varphi - \varepsilon_N\cos\varphi) - \tan\beta\left[\varepsilon_E\sin H + (\varepsilon_A\cos\varphi + \varepsilon_N\sin\varphi)\cos H\right]$$

Posons :

$$\begin{aligned} \varepsilon_Z &= \varepsilon_A\sin\varphi - \varepsilon_N\cos\varphi \\ \varepsilon_X &= \varepsilon_A\cos\varphi + \varepsilon_N\sin\varphi \end{aligned}$$

Les 3 valeurs $(\varepsilon_X, \varepsilon_E, \varepsilon_Z)$ sont les composantes des 3 mésalignement angulaires dans le repère méridien local, mais d'axe z dirigé vers le pôle céleste. Avec ces valeurs les expressions précédentes se simplifient en :

$$\Delta\beta = -\varepsilon_E\cos H + \varepsilon_X\sin H$$

$$\Delta H = \varepsilon_Z - \tan\beta\,(\varepsilon_E\sin H + \varepsilon_X\cos H)$$

En ce qui concerne l'erreur en déclinaison $\Delta\beta$, on voit que pour $H = 0$ ou 180°, on retrouve intégralement l'erreur d'élévation (rotation autour d'un axe orthogonal à l'axe polaire perpendiculaire au méridien), alors que pour $H = \pm 90°$, c'est l'erreur ε_X en rotation autour d'un axe orthogonal à l'axe polaire situé dans le plan du méridien).

En ce qui concerne l'erreur en angle horaire (ou en ascension droite), si l'étoile est situé dans le plan équatorial, on retrouve exactement la composante ε_Z autour de l'axe polaire des mésalignements initiaux (le mésalignement en site n'ayant alors pas d'effet). Dès que la déclinaison augmente, à la composante ε_Z qui est toujours là, s'ajoute une combinaison complexe des mésalignements autour des axes orthogonaux à l'axe polaire. Cette combinaison peut prendre des valeurs énormes lorsque la déclinaison tend vers ±90° mais ceci n'a pas de conséquence catastrophique au niveau de la direction visée car ce n'est qu'un effet de la singularité $\beta = \pm 90°$ pour laquelle l'angle H n'est pas défini. En fait, il faut remarquer que dans l'expression (1) ΔH intervient systématiquement par le produit $\Delta H\cos\beta$. Ainsi quelle que soit la valeur de β, l'erreur provenant du produit $\Delta H\cos\beta$ prend la valeur $\sin\beta\,(\varepsilon_E\sin H + \varepsilon_X\cos H)$ où dans l'expression entre parenthèses figure le mésalignement produit par le couple $(\varepsilon_X, \varepsilon_E)$, orthogonal à celui qu'il produit en $\Delta\beta$.

2 Procédure d'étalonnage

En plus de ces 3 mésalignements, la monture présente des erreurs de zéros sur ses axes motorisées :

- ε_H erreur angulaire de zéro sur l'axe horaire,
- ε_β erreur angulaire de zéro sur l'axe de déclinaison.

Il y a donc 5 inconnues à identifier : ε_A,ε_N, ε_E, ε_H et ε_β à l'aides des 2 équations :

$$\begin{pmatrix} \Delta H \\ \Delta\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin H & \sin\varphi\sin H & -\cos H & 1 & 0 \\ (\sin\varphi + \tan\beta\cos\varphi\cos H) & -(\cos\varphi + \tan\beta\sin\varphi\cos H) & -\tan\beta\sin H & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_H \\ \varepsilon_\beta \end{pmatrix} \tag{2}$$

que l'on résume sous la forme :

$$y = AX.$$

Lors d'une procédure d'étalonnage, pour chaque étoile connue pointée, un couple $(\Delta H, \Delta\beta)$ peut être mesuré.

2.1 Étalonnage une étoile

En supposant la mise en station parfaite, la procédure d'alignement une étoile fournit une estimation des erreurs ε_H et ε_β, en négligeantε_A,ε_N et ε_E,. On peut estimer que :

$$\begin{aligned}\varepsilon_H &= \Delta H\\ \varepsilon_\beta &= \Delta\beta\end{aligned}$$

2.2 Étalonnage deux étoiles

Deux possibilités s'offrent dans ce cas.

Soit on considère que la mise en station est parfaite et on en déduit les $\varepsilon_H$et ε_β en moyennant leurs estimations :

$$\begin{aligned}\varepsilon_H &= \frac{1}{2}\left(\Delta H_1 + \Delta H_2\right)\\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{2}\left(\Delta\beta_1 + \Delta\beta_2\right)\end{aligned}$$

Soit, en négligeant l'erreur de niveau ε_N, on peut estimer l'erreur d'azimut ε_A et l'erreur d'élévation ε_E en plus des erreurs ε_H et ε_β.

Posons :

$$\begin{array}{cc} a_i = \cos\varphi\sin H_i & b_i = -\cos H_i \\ c_i = \sin\varphi + \tan\beta\cos\varphi\cos H_i & d_i = -\tan\beta\sin H_i \end{array}$$

Le système à résoudre $Y = \boldsymbol{A}X$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix}\Delta H_1\\ \Delta\beta_1\\ \Delta H_2\\ \Delta\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 & 0\\ c_1 & d_1 & 0 & 1\\ a_2 & b_2 & 1 & 0\\ c_2 & d_2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_A\\ \varepsilon_E\\ \varepsilon_H\\ \varepsilon_\beta\end{pmatrix}$$

Il a pour déterminant :

$$D = (a_1d_1 - c_1b_1) + (a_2d_2 - c_2b_2) + (c_2b_1 - a_1d_2) + (c_1b_2 - a_2d_1)$$

La matrice inverse de ce système s'écrit :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} (d_1 - d_2) & (b_2 - b_1) & (d_2 - d_1) & (b_1 - b_2)\\ (c_2 - c_1) & (a_1 - a_2) & (c_1 - c_2) & (a_2 - a_1)\\ a_2\left(d_2 - d_1\right) + b_2\left(c_1 - c_2\right) & (a_2b_1 - a_1b_2) & a_1\left(d_1 - d_2\right) + b_1\left(c_2 - c_1\right) & (a_1b_2 - a_2b_1)\\ (c_1d_2 - c_2d_1) & c_2\left(b_1 - b_2\right) + d_2\left(a_2 - a_1\right) & (c_2d_1 - c_1d_2) & c_1\left(b_2 - b_1\right) + d_1\left(a_1 - a_2\right)\end{pmatrix}$$

et la solution s'obtient par :

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_A\\ \varepsilon_E\\ \varepsilon_H\\ \varepsilon_\beta\end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}\Delta H_1\\ \Delta\beta_1\\ \Delta H_2\\ \Delta\beta_2\end{pmatrix}$$

2.3 Étalonnage 3 étoiles, ou plus

Avec trois étoiles ou plus, on dispose d'un système $Y = \boldsymbol{A}X$ avec $Y = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_n\end{bmatrix}$ de dimension $2n \times 5$ dont les matrices internes A_i sont définies en (2). Ce système redondant a pour solution des moindres carrés :

$$X = \left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^TY$$

Une méthode numérique de résolution rapide ne passe pas par l'inversion de la matrice 5×5 $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)$, mais par la procédure suivante : On calcule effectivement la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ et le vecteur $Z = \boldsymbol{A}^TY$, puis on résout le système $\boldsymbol{B}X = Z$ où la matrice $\boldsymbol{B}$ est une matrice 5×5 symétrique, soit par décomposition LU (lower-upper), soit par la méthode de Cholesky (la version sans racine carrée qui est plus robuste).

3 Prise en compte du mésalignement du tube

Le mésalignement du tube se traduit, dans le repère horaire de la monture par deux micro-rotations :

- Une première micro-rotation autour de l'axe de déclinaison que l'on ignore car elle ne peut être distinguée de l'erreur ε_β de zéro en déclinaison, ce qui fait que la quantité ε_β estimée inclut ces deux erreurs.
- Une deuxième micro-rotation d'angle ε_I autour de la perpendiculaire commune aux axes polaire et de déclinaison.

Dans le repère horaire en cours, l'étoile a pour cosinus directeurs $\begin{pmatrix} \cos\beta \\ 0 \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ qui deviennent $\begin{pmatrix} \cos\beta \\ -\varepsilon_I \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ en présence de l'erreur ε_I d'alignement du tube.

L'erreur horaire ΔH produisant les mêmes cosinus directeurs est donnée par $\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \Delta H \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ -\varepsilon_I \\ \sin\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi, si on cherche à identifier ce mésalignement, il faut considérer le système :

$$\begin{pmatrix} \Delta H \\ \Delta\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin H & \sin\varphi\sin H & -\cos H & \frac{-1}{\cos\beta} & 1 & 0 \\ (\sin\varphi + \tan\beta\cos\varphi\cos H) & -(\cos\varphi + \tan\beta\sin\varphi\cos H) & -\tan\beta\sin H & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_N \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_I \\ \varepsilon_H \\ \varepsilon_\beta \end{pmatrix} \tag{3}$$

Les procédures d'étalonnage 1 et 2 étoiles sont inchangées, l'erreur ε_I est ignorée. Pour la procédure 3 étoiles et plus, l'erreur ε_I peut être prise en compte. Les matrices élémentaires A_i définies par l'expression (3) sont de dimension 2×6. La matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$ sera de dimension $2n \times 6$ et la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$ sera de dimension 6×6.

4 Utilisation

Les erreurs estimées ε_A, ε_N, ε_E, ε_I, ε_H et ε_β peuvent être utilisées pour calculer des corrections ΔH en ascension droite et $\Delta\beta$ en déclinaison au moyen des relations (2) ou (3) à appliquer aux angles d'ascension droite et de déclinaison commandés.

On peut également utiliser les valeurs ε_A,ε_N et ε_E trouvées pour proposer une correction de la mise en station de la monture. Après cette correction on itèrera la procédure pour estimer les erreurs résiduelles servant à élaborer les corrections ΔH et $\Delta\beta$.