Navigation Astro

Miche Llibre, Club d'astronomie de Quint-Fontsegrives

Décembre 2023

Table des matières

1 Introduction....1
2 La relation fondamentale de la navigation astro....1
3 La méthode de la droite de hauteur....2
3.1 Principe théorique....2
3.2 Mise en oeuvre traditionnelle....3
4 Influence de la précision de l'heure....4
5 Corrections de la hauteur mesurée....5
5.1 La dépression apparente de l'horizon....5
5.2 La réfraction atmosphérique....6
5.3 La parallaxe....7
5.4 Les autres erreurs....8

1 Introduction

J'ai rédigé ce petit mémo pour voir d'où venaient les équations utilisées pour faire le point avec un sextant. Généralement ces équations sont établies à l'aide de la trigonométrie sphérique qui a pour moi le gros inconvénient de mon incapacité à les retenir et à les retrouver facilement. Finalement, ces équations peuvent s'établir assez simplement en n'utilisant que les produits scalaires des vecteurs et la différenciation des sinus et cosinus.Ce mémo présente cette approche. Je ne présente pas la mise en oeuvre effective de la méthode, on en trouve de nombreuses sur internet.

Le principe général de la navigation astronomique consiste à mesurer la hauteur d'un astre (Soleil, Lune, étoile) tout en notant l'instant précis de la mesure. Le points sur Terre qui voient l'astre à cette même hauteur se trouvent sur un cercle centré au pied de cet astre (le point où la droite centre Terre - Astre traverse la surface de la Terre). On possède ainsi un lieu des points qui correspondent à notre position. Avec une deuxième mesure, on possède un deuxième lieu. A priori on se trouve à l'intersection de ces deux lieux.

2 La relation fondamentale de la navigation astro

Si φ est la latitude de l'observateur, les cosinus directeur du zénith dans le repère équatorial local sont :

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Notons δ la déclinaison de l'astre et H_G son angle horaire (à Greenwich). Dans le cas d'une étoile, on peut calculer l'angle horaire H_G à partir de l'ascension droite α et du temps sidéral T_s par la

relation $H_G = T_s - \alpha$. Dans le cas du Soleil (et de la Lune) il faudra le chercher la valeur de H_G et la déclinaison dans les éphémérides.

Si L est la longitude de l'observateur, l'angle horaire local de l'astre H_L vaut :

$$H_L = H_G + L$$

en comptant la longitude positive vers l'Est. Dans ces conditions, les cosinus directeurs de l'astre dans le repère équatorial local valent :

$$\begin{pmatrix} \cos\delta \cos H_L \\ -\cos\delta \sin H_L \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

Le produit scalaire de ces deux directions (zénith et astre) est égal au cosinus de l'angle de leurs directions qui est la distance zénithale z de l'astre. Il en résulte la relation :

$$\cos z = \cos\varphi \cos\delta \cos(H_G + L) + \sin\varphi \sin\delta$$

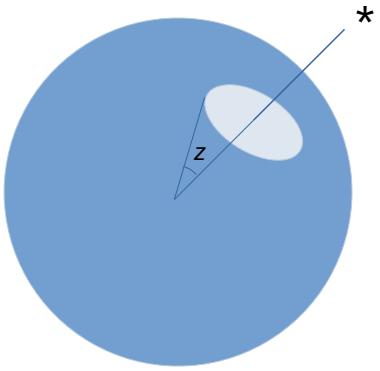
où on a remplacé H_L par $H_G + L$. En faisant intervenir la hauteur h de l'astre reliée à sa distance zénithale z par :

$$z = \frac{\pi}{2} - h$$

on obtient la relation fondamentale de la navigation astro :

$$\boxed{\sin h = \cos\varphi \cos\delta \cos(H_G + L) + \sin\varphi \sin\delta}$$

Dans cette relation la latitude φ et la longitude L sont nos inconnues. Cette relation indique que le lieu recherché se trouve, à la surface de la terre sur le cône d'angle au centre z centré sur la direction de l'astre visé.



Avec 2 visées on aura deux cercles de positions potentielles, la solution se trouvant à une de leurs deux intersections. Avec plusieurs visées, on peut espérer améliorer la solution.

3 La méthode de la droite de hauteur

3.1 Principe théorique

Étant donné une position estimée (L_e, φ_e) on calcule la hauteur estimée h_e de l'astre vu de cette position au moyen de la relation fondamentale, d'où :

$$h_e = \arcsin\left[\cos\varphi_e \cos\delta \cos(H_G + L_e) + \sin\varphi_e \sin\delta\right]$$

En différenciant la relation fondamentale, il vient :

$$\Delta h \cos h_e = \Delta\varphi\left[\cos\varphi_e \sin\delta - \sin\varphi_e \cos\delta \cos(H_G + L_e)\right] - \Delta L\left[\cos\varphi_e \cos\delta \sin(H_G + L_e)\right]$$

Cette relation lie donc les deux composantes $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_e$, $\Delta L = L - L_e$ de l'erreur de position à l'erreur de hauteur $\Delta h = h - h_e$ où h est la hauteur mesurée, *corrigée des imperfections*.

Avec une deuxième visée, on aura une deuxième équation linéaire aux inconnues $(\Delta\varphi, \Delta L)$ qui permettra de les calculer et d'en déduire $\varphi = \varphi_e + \Delta\varphi$ et $L = L_e + \Delta L$.

Dans le plan local tangent à la Terre au point de coordonnées (L_e, φ_e) , on considère le repère orthonormé de coordonnées $(\Delta L, \Delta\varphi)$. Dans ce repère on trace les droites de hauteurs :

$$a_i \Delta L + b_i \Delta\varphi = c_i$$

avec :

$$\begin{aligned} a_i &= -\cos\varphi_e \cos\delta_i \sin(H_{Gi} + L_e) \\ b_i &= \cos\varphi_e \sin\delta_i - \sin\varphi_e \cos\delta_i \cos(H_{Gi} + L_e) \\ c_i &= \Delta h_i \cos h_{ei} \end{aligned}$$

pour chaque astre "i" considéré qui est caractérisé par ses coordonnées (H_{Gi}, δ_i) , sa hauteur estimée h_{ei} et l'erreur avec sa hauteur mesurée $\Delta h_i = h_{mi} - h_{ei}$. Avec 2 mesures l'intersection des 2 droites fournira une estimation de l'erreur $(\Delta\varphi, \Delta L)$. Avec plus de mesures on peut mettre en oeuvre une résolution par moindres carrés itératifs. La variante qui traite une mesure après l'autre étant particulièrement intéressante car elle ne nécessite aucune inversion matricielle (voir https://llibre.fr/michel/copie_cert/DCSD-2008_069-NOT-001-1.0.pdf, paragraphe 4.4.5, page 18)

3.2 Mise en oeuvre traditionnelle

La mise en oeuvre traditionnelle utilise un positionnement avec des coordonnées cartésiennes équivalentes sur les 2 axes. Dans le cas précédent, une erreur de une minute sur $\Delta\varphi$ en latitude produit une erreur de 1860 m alors qu'une erreur de une minute sur ΔL en longitude produit une erreur de $1860\cos\varphi$ mètres (erreur nulle aux pôles). Pour éviter cette distorsion due à la latitude, les coordonnées utilisées dans la résolution sont $y = \Delta\varphi$ et $x = \cos\varphi\,\Delta L$ ce qui conduit à des variations de distances identiques en latitude et longitude. Dans ce repère localement orthonormé la droite de hauteur a pour équation :

$$a_i x + b_i x = c_i$$

avec :

$$\begin{aligned} a_i &= -\cos\delta_i \sin(H_{Gi} + L_e) \\ b_i &= \cos\varphi_e \sin\delta_i - \sin\varphi_e \cos\delta_i \cos(H_{Gi} + L_e) \\ c_i &= \Delta h_i \cos h_{ei} \end{aligned}$$

où seul le coefficient a_i est changé.

Dans ce cas les directions sont significatives. La droite de hauteur (qui est la tangente au cercle de hauteur) est orthogonale à la direction de cosinus directeurs $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ qui est dirigée vers le pied de l'étoile. L'azimut de la direction du pied de l'étoile, comptée positif dans le sens trigonométrique à partir du Nord (direction de y) est ainsi donné par :

$$\tan A_{zimut} = \frac{a_i}{b_i} = \frac{\cos\delta_i \sin(H_{Gi} + L_e)}{\cos\varphi_e \sin\delta_i - \sin\varphi_e \cos\delta_i \cos(H_{Gi} + L_e)}$$

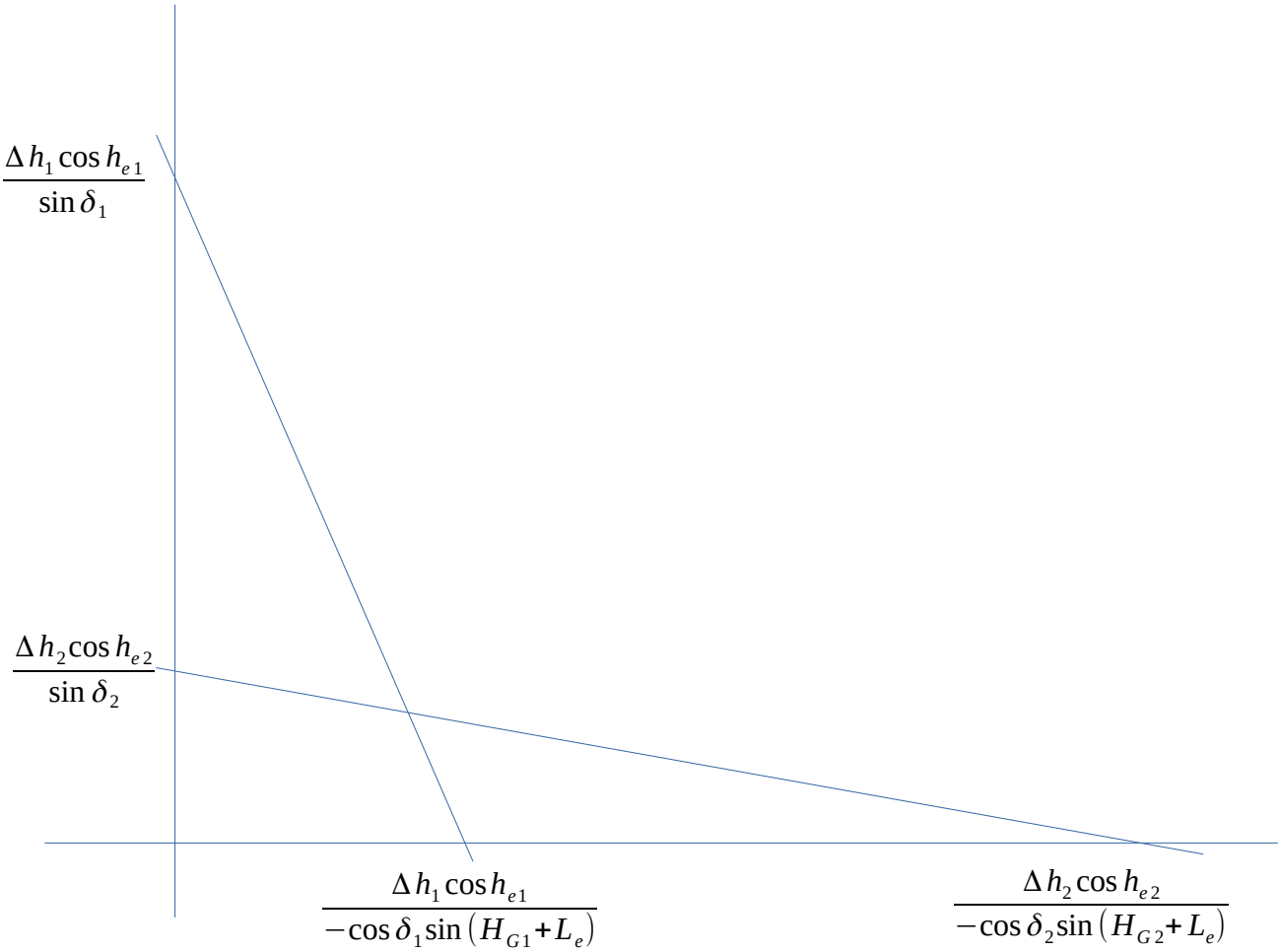
Remarquons que dans cette relation les signes du numérateur et dénominateur sont significatifs ce qui permet de préciser l'azimut sur 360°. En programmation on utilise pour cela la fonction atan2 qui prend les 2 arguments, avant la division.

On peut éviter ce calcul en prenant pour azimut celui de l'astre mésuré en même temps que sa hauteur, à condition d'avoir un bon compas corrigé de la déclinaison magnétique.

4 Influence de la précision de l'heure

L'angle horaire H_G de l'astre est obtenue en fonction de notre horloge. Examinons les effets de sa précision. Pour simplifier les équations considérons une position proche de l'équateur avec $\varphi = 0$.

Dans ce cas les droites de hauteur coupent l'axe des x au point d'abscisse $\frac{\Delta h_i \cos h_{ei}}{-\cos\delta_i \sin(H_{Gi} + L_e)}$.



La division par $\sin(H_{Gi}+L_e)$ montre que lorsque cette valeur est faible une toute petite erreur sur l'heure déplace les droites de manière considérable d'où l'importance de la précision des horloges utilisées dans la navigation astro. A titre d'exemple lors de la visée d'un astre à sa culmination, lorsqu'il passe au méridien, l'angle horaire local $H_L=H_G+L_e$ est voisin de 0. D'où la valeur faible de $\sin(H_{Gi}+L_e)$ et le report en longitude de l'erreur sur l'heure (H_G) .

Rappelons qu'une minute de temps correspond à $\frac{40000}{24\times 60}=27.8$ km à l'équateur.

L'imprécision des horloges utilisées aux siècles précédents est à l'origine de nombreux naufrages. Le plus célèbre est celui de 4 navires d'une escadre britannique qui ont heurté la côte au large des Cornouailles, faisant 2000 morts en 1707. Cela a conduit le parlement britannique à voter le *Longitude Act* qui offrait une forte récompense à quiconque trouverait le moyen de mesurer précisément la longitude. Quelques années plus tard sont apparus les premiers chronomètres de marine qui ne dérivaient que de quelques secondes par mois.

5 Corrections de la hauteur mesurée

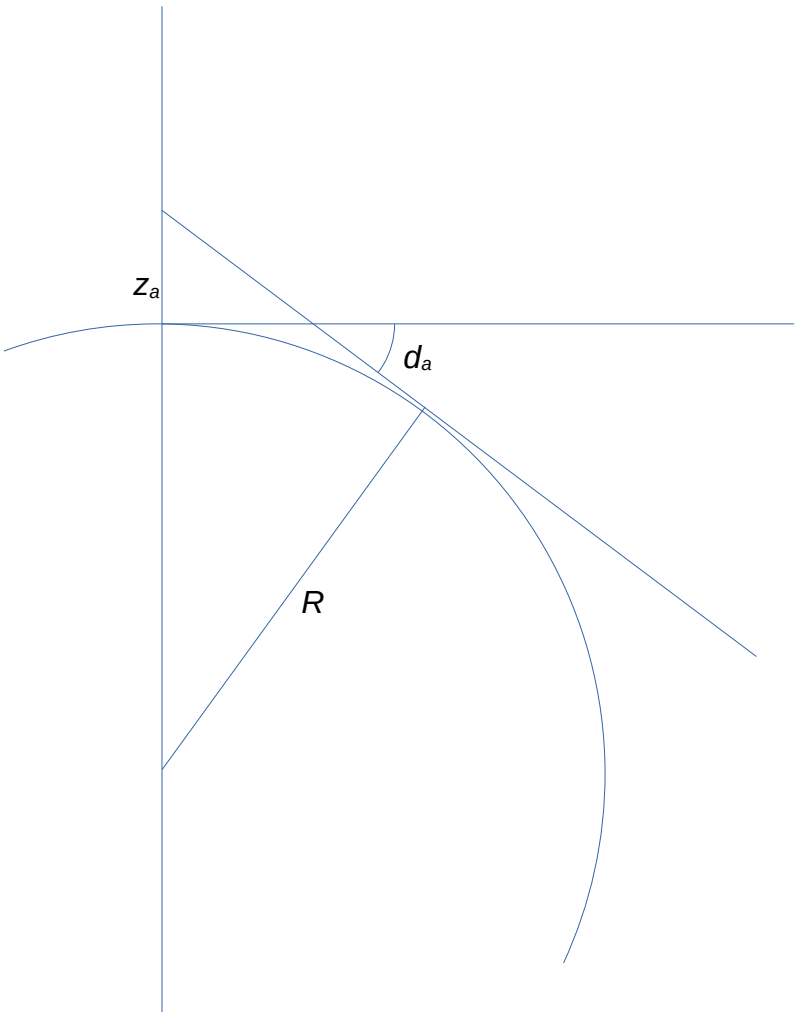
L'erreur effectuée sur la mesure de la hauteur de l'astre peut induire une erreur du même ordre sur la latitude et longitude estimée. L'effet est donc moins important que celui de l'heure, mais une erreur d'une minute d'arc sur la hauteur peut se traduire par une erreur de l'ordre de 2 km sur la localisation. Il est donc important de corriger toutes les causes qui faussent l'estimation de la hauteur de l'astre. Pour chaque hauteur mesurée h_m on calcule la hauteur h corrigée des imperfections par la formule

$$h=h_m-d_a-r_a+p_a$$

où d_a est la dépression apparente de l'horizon, r_a est la réfraction atmosphérique et p_a est la parallaxe. Ces éléments sont décrits ci-après.

5.1 La dépression apparente de l'horizon

L'altitude z_a de l'observateur abaisse son horizon de vue d'un angle $\mathbf{d_a}$ appelé ***dépression apparente*** de l'horizon.



Aux petits angles la longueur de l'arc de rayon R et d'angle au centre d_a vaut $R\,d_a$ et le coté horizontal du petit triangle vaut $\frac{1}{2}R\,d_a$ au troisième ordre près, d'où $d_a \simeq \frac{z_a}{\frac{1}{2}R\,d_a}$ ce qui fournit l'approximation suivante $d_a \simeq \sqrt{\frac{2\,z_a}{R}}$.

Généralement, on fait intervenir un facteur $1-\gamma$ dépendant de la pression, de l'humidité et de la température avec grossièrement $\gamma = 0.04$ par temps sec et $\gamma = 0.16$ par temps humide, d'où l'approximation :

$$d_a \simeq (1-\gamma)\sqrt{\frac{2\,z_a}{R}}$$

En exprimant h en ***mètres***, on obtient pour d_a par l'approximation numérique suivante exprimée en ***minutes*** d'arc :

$$d_a \simeq 1.93(1-\gamma)\sqrt{z_a}$$

5.2 La réfraction atmosphérique

L'atmosphère produit un effet de loupe qui abaisse également les rayons atteignant l'observateur, d'autant plus que la cible est proche de l'horizon. La valeur r_a de cet abaissement est donné en fonction de la hauteur de la cible (angle de site) h par la formule de G.G. Bennet suivante :

$$r_a = \frac{K}{\tan\left(h + \frac{7.31}{h+4.4}\right)}$$

où l'angle h est exprimé en ***degrés*** et l'angle r_a est obtenu en ***minutes d'arc***. En première approximation on peut prendre $K = 1$. C'est un paramètre d'ajustement qui est donné en fonction de la pression et température par :

$$K = \frac{P}{1010} \times \frac{283}{T+273}$$

avec P en ***millibars*** et T en ***degrés Celsius***. Avec $P = 1010$ et $T = 20$, on obtient bien $K = 1$.

On trouve très souvent la formule suivante :

$$r_a = 0.97167 \tan\left(\frac{\pi}{2} - h\right) - 0.00112 \tan^3\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$$

qui donne r_a en ***minutes d'arc***. Attention, elle ne doit **pas être utilisé pour *h* inférieur à 5°** car sous ce seuil elle donne des valeurs aberrantes.

5.3 La parallaxe

Les coordonnées des astres utilisées dans les calculs de navigation astro ont leur origine au centre de la Terre. Le fait d'observer à la surface (en supposant une Terre sphérique de rayon R introduit une erreur de parallaxe p_a représentée sur la figure suivante :

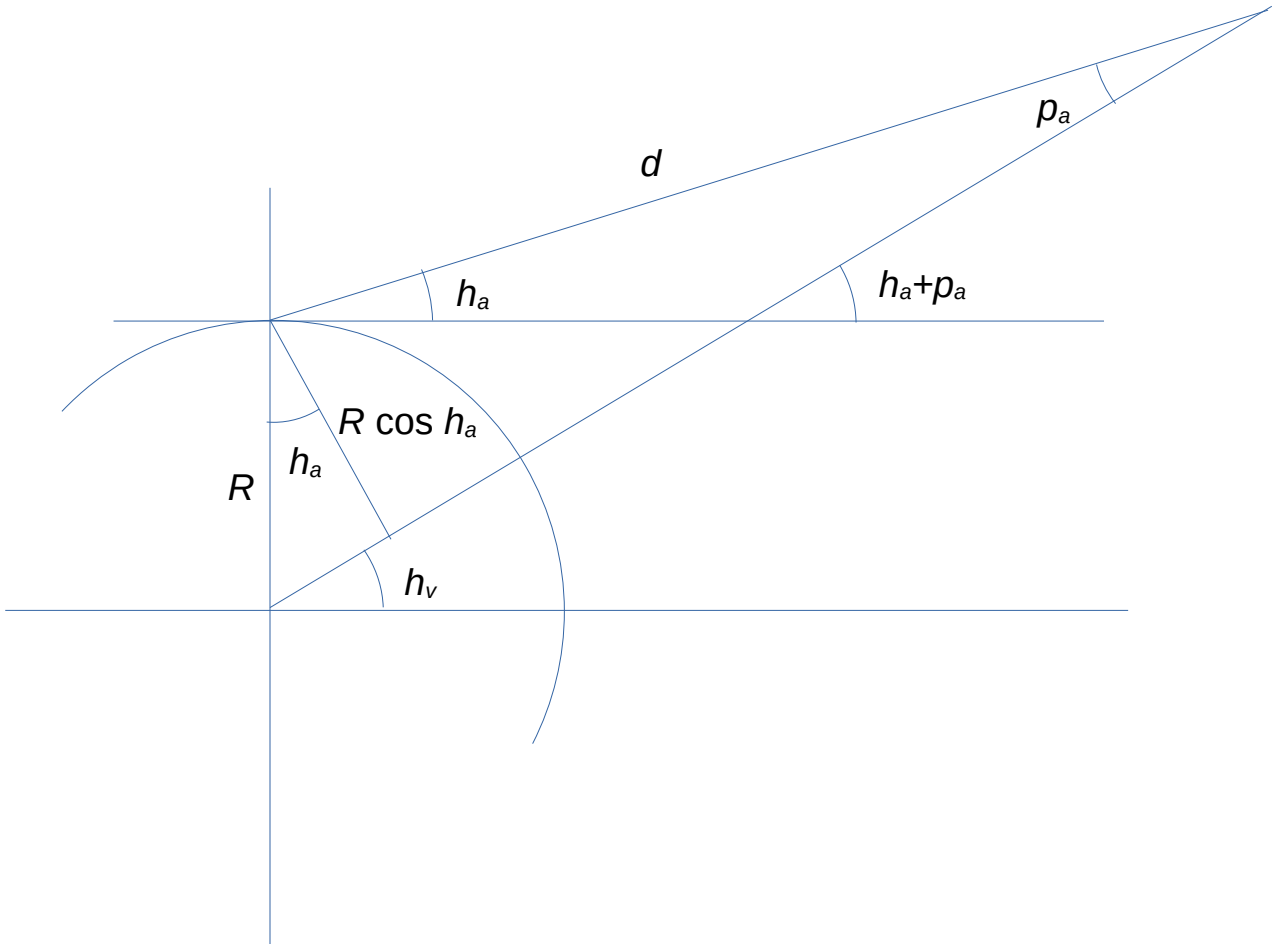
Notons h_a la hauteur apparente exacte, calculée après avoir corrigé la hauteur observé de la dépression apparente de l'horizon et de la réfraction atmosphérique et h_v la hauteur vrai de l'astre observée depuis le centre de la Terre. La distance d de l'astre étant très grande devant le rayon terrestre R (ce n'est pas le cas pour la Lune), l'angle parallaxe p_a est petit et on peut faire l'approximation : $p_a \simeq \frac{R \cos h_a}{d}$.

Le rapport :

$$\rho = \frac{R}{d}$$

qui correspond à la parallaxe lorsque l'astre visé à une hauteur apparente nulle $(h_a = 0)$ est appelée parallaxe horizontale de l'astre. On la trouve dans les éphémérides nautiques. Elle permet de calculer la parallaxe p_a par :

$$p_a = \rho \cos h_a$$



On en déduit :

$$h_v = h_a + p_a$$

5.4 Les autres erreurs

Dans le cas du Soleil et de la Lune, si la visée correspondait à un bord de l'astre, il faut corriger de la moitié de son diamètre apparent, soit environ 15'.

Au niveau du sextant il ya l'erreur d'excentricité qui provient du fait que le centre du limbe qui porte les graduations en hauteur ne coïncide pas parfaitement avec le centre de rotation de l'alidade. Il y a aussi l'erreur de collimation qui provient de l'erreur de positionnement du zéro de la graduation du limbe.