
Trajectoires optimales

Version 1.0

23 novembre 2010

Michel Llibre

Ref. DCSD-2009_008-NOT-010-1.0



Table des matières

1	Application de la P.N.L. à la commande optimale	7
1.1	Conventions et rappels	7
1.1.1	Notations matricielles	7
1.1.2	Minimum d'une fonction scalaire sans contraintes - Conditions d'optimalité . . .	9
1.1.3	Minimum avec contraintes égalités - Multiplicateurs de Lagrange	9
1.1.4	Minimum avec contraintes inégalités - Paramètres de Karush-Kuhn-Tucker . . .	10
1.2	Problème étudié	10
1.3	Résolution par la programmation non linéaire	11
1.3.1	Lagrangien	11
1.3.2	Conditions nécessaires de stationnarité	11
1.3.3	Résolution du problème aux deux bouts	13
1.3.4	Commande en boucle fermée	14
1.3.5	Systèmes linéaires discrets avec critère quadratique	16
2	Application de la P.D. à la commande optimale	23
2.1	Exemple simple	23
2.2	Problème type	26
2.3	Résolution : Le principe de Bellman	26
2.3.1	Cas de l'horizon fixé	26
2.3.2	Cas de l'horizon libre	27
2.4	Mise en oeuvre sur ordinateur	27
2.4.1	Initialisation	27
2.4.2	Algorithme	28
2.5	Systèmes linéaires discrets avec critère quadratique	28
2.5.1	Problème type	29
2.5.2	Principe de résolution	29
2.5.3	Initialisation de l'équation de Riccati	29
2.5.4	Exercice	33
3	Principe du maximum	37
3.1	Problème type traité	37
3.2	Du principe de Bellman au principe du maximum	38
3.2.1	L'équation d'Hamilton-Jacobi	38

3.2.2	Méthode de résolution	39
3.2.3	Conditions aux limites	42
3.3	De la PNL au principe du maximum	45
3.3.1	Discrétisation du problème	45
3.3.2	Equations d'optimalité par la PNL	46
3.3.3	Retour au continu	47
3.4	Problèmes de mise en oeuvre	48
3.4.1	Le problème aux deux bouts	48
3.4.2	Prise en compte des contraintes intégrales	48
3.4.3	Trajectoires singulières	51
3.4.4	Vérification de l'optimalité	51
3.5	Systèmes linéaires avec critère quadratique	51
3.5.1	Exemple introductif	51
3.5.2	Problème type	53
3.5.3	Principe de résolution	54
3.5.4	Principe de résolution de l'équation de Ricatti	56
3.6	Systèmes à commutations	56
3.6.1	Exemple introductif (tricycle)	56
3.6.2	$1/P^2$ en temps minimal à vitesse et accélération bornées	58
3.6.3	$1/P^3$ en temps minimal à jerk borné	64
3.7	Du calcul des variations au principe du maximum	70
3.7.1	Historique	70
3.7.2	Variation d'une variable	71
3.7.3	Variation d'une fonction	72
3.7.4	Variation d'une fonctionnelle	72
3.7.5	Conditions nécessaires de stationnarité	72
3.7.6	Application à la commande	74
4	Résumés	77
4.1	Résumé programmation dynamique inverse	77
4.2	Résumé P.N.L.	78
4.3	Résumé principe du maximum	79
	Bibliographie	82

Introduction

Ce polycopié décrit l'utilisation des techniques d'optimisation pour calculer la trajectoire et la commande d'un processus déterministe, discret ou continu, qui optimisent un critère donné.

La formulation de ce problème en continu est connue sous le nom de *problème de Bolza* :

Il s'agit de trouver la trajectoire optimale $\hat{x}(t)$ d'un système continu pour t appartenant à l'*horizon* $[t_0, t_F]$:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

à partir d'un état initial $x(t_0) = x_0$ libre ou contraint par r_0 relations :

$$h(x_0, t_0) = 0$$

jusqu'à un état final $x(t_F) = x_F$ libre ou contraint par r_F relations :

$$l(x_F, t_F) = 0$$

soumis également à des contraintes instantanées :

$$\gamma(x, u, t) \leq 0$$

qui minimise le critère :

$$C(t_0, x_0, t_F, x_F, u(t)) = p(x_0, t_0) + s(x_F, t_F) + \int_{t_0}^{t_F} r(x, u, t) dt$$

Remarque : La connaissance de la trajectoire de commande $\hat{u}(t)$ pour $t \in [t_0, t_F]$ et de \hat{x}_0 (ou \hat{x}_F) permet de retrouver $\hat{x}(t)$ par intégration directe (ou rétrograde) de 1.

Les méthodes de résolution se décomposent en deux grands groupes : Les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Les méthodes directes visent à trouver directement les inconnues \hat{x} et \hat{u} qui minimisent le critère tout en respectant les contraintes égalités et les contraintes inégalités. En discrétisant ces équations on obtient un problème typique de *programmation non linéaire* (PNL) en grande dimension, mal conditionné a priori à cause de la multitude des contraintes non linéaires.

Pour diminuer le nombre des inconnues, on peut imposer une structure, par exemple à la commande \hat{u} fonction d'un nombre limité de paramètres. Les *méthodes directes de tir* consistent à rechercher le lot réduit d'inconnues constitué par les états initiaux et les paramètres qui respectent l'ensemble des contraintes et minimisent le critère. C'est un problème de PNL plus réduit mais qui repose sur une connaissance a priori de la structure de la commande optimale.

Une autre approche qui permet de réduire le nombre d'inconnues, constituée par les *techniques de transcription* dites de *collocation* est en train de prendre de l'importance.

Les méthodes directes sont simples à mettre en oeuvre (une seule phase d'optimisation) et la prise en compte des contraintes inégalités y est relativement aisée. Elles sont adaptées aux problèmes de dimension réduite avec un horizon court ou un faible niveau précision.

Les méthodes indirectes sont basées sur l'utilisation d'une équation d'optimalité qui fournit la commande optimale \hat{u} . Ce sont ces méthodes que nous présentons dans ce polycopié :

- Le premier chapitre est consacré aux problèmes discrets où la commande optimale \hat{u} est obtenue par la minimisation d'un Lagrangien prenant en compte les équations d'état sous forme de contraintes. C'est l'application de la PNL (*programmation non-linéaire*) au calcul de la commande optimale.
- Le deuxième chapitre est consacré aux problèmes discrets où la commande optimale \hat{u} est obtenue à partir du principe de *Bellman* (1957). C'est l'application de la PD (*programmation dynamique*) au calcul de la commande optimale.
- Le troisième chapitre est consacré aux problèmes continus où la commande optimale \hat{u} est obtenue à partir du *principe du maximum de Pontryagin*¹.

Le problème à résoudre se présentera sous la forme d'un *problème aux deux bouts* avec :

- une optimisation interne pour calculer la commande optimale à chaque instant,
- une procédure d'intégration directe des systèmes physique et adjoint à partir des états physique et adjoint initiaux (ou une intégration rétrograde des systèmes physique et adjoint à partir des états physique et adjoint finaux)
- une recherche des états physique et adjoint initiaux qui conduisent aux états physiques et adjoints finaux respectant les contraintes terminales (ou des états physique et adjoint finaux qui conduisent aux états physiques et adjoints initiaux respectant les contraintes initiales).

Pour les approches PNL et principe du maximum, la recherche des inconnues que constitue le problème aux deux bouts est un problème de résolution d'un système d'équations non linéaires à plusieurs inconnues généralement très mal conditionné (il est linéaire dans le cas d'un système linéaire avec des contraintes quadratiques). Les méthodes de résolution sont parfois désignés comme des *méthodes indirectes de tir*. Elles sont généralement traités par la PNL comme un problème de minimisation de l'erreur quadratique sur les contraintes finales (resp. initiales).

En l'absence de contraintes globales, la programmation dynamique permet de résoudre facilement ce problème (sans système adjoint à considérer), mais elle est limitée aux systèmes physiques d'ordre réduit (inférieur ou égal à 5 par exemple).

Remerciements :

Merci à Jean-Louis Farges [3] qui n'a pas compté son temps pour m'aider à éclaircir les points les plus délicats.

Merci à Michel Corrège qui est toujours disponible pour écouter et détecter les failles dans les raisonnements.

Merci à Jacques Delmas [2] qui nous a initiés et formés à ces techniques d'optimisation.

1. Ce principe est dû à Pontryagin (1956) et à ses élèves Boltianski et Gamkrelidzé. On peut l'obtenir à partir du principe de Bellman, ou à partir du Calcul des Variations initié par Bernouilli (1696) avec le problème du brachistochrome et développé par Euler et Lagrange.

Chapitre 1

Application de la P.N.L. à la commande optimale

Avant d'entrer dans le vif du sujet, introduisons nos conventions et rappelons quelques résultats de PNL.

1.1 Conventions et rappels

Dans une version ultérieure, nous prévoyons de mettre en lettres grasses les vecteurs et les matrices pour mieux les distinguer des scalaires. Il peut arriver que cela soit fait dans certains paragraphes.

1.1.1 Notations matricielles

Etant donnés des points u et v appartenant aux espaces ponctuels \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q et des scalaires s et t de \mathbb{R} , nous noterons :

	objet	type	dimension	élément(s)
$\dot{s} = \frac{ds(t)}{dt}$		scalaire de \mathbb{R}	1	$\frac{ds}{dt}$
$s_t = \frac{\partial s(u,t)}{\partial t}$		scalaire de \mathbb{R}	1	$\frac{\partial s}{\partial t}$
$s_u = \frac{\partial s(u,t)}{\partial u}$		vecteur (gradient) de \mathbb{R}^p	$p \times 1$	$\frac{\partial s}{\partial u_i}$
$s_{ut} = \frac{\partial^2 s(u,t)}{\partial u \partial t}$		vecteur (gradient) de \mathbb{R}^p	$p \times 1$	$\frac{\partial^2 s}{\partial u_i \partial t}$
$s_{uu} = \frac{\partial^2 s(u,t)}{\partial u \partial u}$		Matrice de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$	$p \times p$	$\frac{\partial^2 s}{\partial u_i \partial u_j}$
$\dot{v} = \frac{dv(t)}{dt}$		vecteur de \mathbb{R}^q	$q \times 1$	$\frac{dv_i}{dt}$
$v_t = \frac{\partial v(u,t)}{\partial t}$		vecteur de \mathbb{R}^q	$q \times 1$	$\frac{\partial v_i}{\partial t}$
$v_u = \frac{\partial v(u,t)}{\partial u}$		Matrice de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$	$q \times p$	$\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$

Pour les éléments des matrices, i est l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

Ainsi, les vecteurs naturels u , v et leurs dérivées temporelles \dot{v} , v_t sont considérés comme des vecteurs colonnes. Il en est de même des gradients de scalaires.

Pour bénéficier du produit matriciel, on représente le gradient d'un vecteur par une matrice. Mais un problème de choix de notation se pose à ce niveau du gradient d'un vecteur. Si on note v_u cette matrice gradient du vecteur v par rapport à u , deux possibilités sont offertes. Nous avons choisi celle qui laisse les composantes de v en ligne et développe les composantes du gradient en colonne. Ainsi, avec L une matrice constante de $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$,

- si $v = Lu$, on aura $v_u = L$,
- si $s = v^T Lu = u^T L^T v$, on aura $s_u = L^T v$ et $s_v = Lu$.

Cette convention est assez pratique. On peut la mémoriser en notant que, dans le cas de facteurs linéaires en u , le gradient par rapport à u d'un scalaire ($s = b^T u = u^T b$) est obtenu en prenant le facteur de u^T ($s_u = b$) alors que le gradient par rapport à u d'un vecteur ($v = Lu$) est obtenu en prenant le facteur de u ($v_u = L$). Elle présente toutefois une incohérence dans le fait que si le vecteur v est de dimension 1×1 alors v_u est de dimension $1 \times q$ ce qui fait que dans ce cas le gradient d'un scalaire est représenté par un vecteur ligne.

Avec l'autre possibilité v_u représenterait une matrice dont le nombre de lignes n'est pas celui de v , mais celui de u . On aurait alors $v_u = L^T$ lorsque $v = Lu$ et $s_u = L^T v$ lorsque $s = v^T Lu = u^T L^T v$. Ici le gradient par rapport à u est systématiquement obtenu en prenant le facteur de u^T . L'inconvénient réside dans le fait que si v est de dimension $q \times 1$, v_u est de dimension $p \times q$ avec un passage de nombre de lignes en nombre de colonnes. Cette deuxième possibilité n'a pas été retenue afin de rester proche des notations utilisées en [2] et [3].

Avec la convention choisie, on note :

$$u^T s_u = s_u^T u \text{ le produit scalaire } \langle u \cdot s_u \rangle = \sum_i u_i \frac{\partial s}{\partial u_i}$$

$$s_{uu}u = s_{uu}^T u \text{ le vecteur résultat du produit matriciel } \sum_j u_j \frac{\partial^2 s}{\partial u_i \partial u_j}$$

$$u^T s_{uu}u = u^T s_{uu}^T u \text{ le scalaire } \sum_{ij} u_i u_j \frac{\partial^2 s}{\partial u_i \partial u_j}$$

$$v_u u \text{ le vecteur résultat du produit matriciel } \sum_j u_j \frac{\partial v_i}{\partial u_j}$$

$$v^T v_u \text{ le vecteur résultat du produit matriciel } \sum_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial u_j}$$

$$v^T v_u u = u^T v_u^T v \text{ le scalaire } \sum_{ij} v_i u_j \frac{\partial v_i}{\partial u_j}$$

Si A est une matrice constante de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, b et c deux vecteurs constants de \mathbb{R}^p et s un scalaire tel que :

$$s = u^T A u + b^T u + u^T c$$

la dérivée partielle par rapport à u s'obtient en prenant dans s tous les facteurs de u^T (mettre tous les u présents sous la forme u^T) d'où :

$$s_u = Au + A^T u + b + c = 2Au + b + c$$

b provient de $u^T b$ car $b^T u = u^T b$ et $A^T u$ provient de la factorisation du deuxième u dans $u^T A u$ que l'on met sous la forme $u^T A^T u$. De plus, si A n'était pas symétrique au départ, on la remplace par la matrice symétrique $A_s = \frac{1}{2} (A + A^T)$.

1.1.2 Minimum d'une fonction scalaire sans contraintes - Conditions d'optimalité

Considérons une fonction scalaire $r(x)$ du point x de \mathbb{R}^m , différentiable par rapport à x . Soit \hat{x} un minimum relatif de $r(x)$. Pour alléger les notations nous noterons :

$$\begin{aligned} - r_{\hat{x}} &= r_x(\hat{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} r(x) \right)_{x=\hat{x}} \\ - r_{\hat{x}\hat{x}} &= r_{xx}(\hat{x}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} r(x) \right)_{x=\hat{x}} \end{aligned}$$

Quelle que soit la direction de δx on a :

$$\left. \begin{aligned} r(\hat{x}) \leq r(\hat{x} + \delta x) &\rightarrow r_{\hat{x}}^T \delta x \geq 0 \\ r(\hat{x}) \leq r(\hat{x} - \delta x) &\rightarrow r_{\hat{x}}^T \delta x \leq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow r_{\hat{x}}^T \delta x = 0 \rightarrow r_{\hat{x}} = 0$$

Conditions nécessaires du premier ordre :

Pour que \hat{x} soit un minimum relatif de $r(x)$ il est nécessaire que $r_{\hat{x}} = 0$.

De plus si $r(x)$ est doublement différentiable, on a :

$$r(\hat{x}) \leq r(\hat{x} + \delta x) = r(\hat{x}) + r_{\hat{x}}^T \delta x + \frac{1}{2} \delta x^T r_{\hat{x}\hat{x}} \delta x$$

D'où, compte tenu du fait que $r_{\hat{x}} = 0$:

$$\delta x^T r_{\hat{x}\hat{x}} \delta x \geq 0 \Leftrightarrow r_{\hat{x}\hat{x}} \text{ définie non négative}$$

Conditions du deuxième ordre :

Pour que \hat{x} soit un minimum relatif de $r(x)$ il est nécessaire que $r_{\hat{x}} = 0$ et que $r_{\hat{x}\hat{x}}$ soit définie non négative.

Si $r_{\hat{x}} = 0$ et si $r_{\hat{x}\hat{x}}$ est définie positive, \hat{x} est un minimum relatif strict de $r(x)$.

1.1.3 Minimum avec contraintes égalités - Multiplicateurs de Lagrange

Supposons que x soit contraint par les p égalités suivantes :

$$h(x) = 0$$

Si \hat{x} est un minimum relatif de $r(x)$ vérifiant les p équations $h(\hat{x}) = 0$, $r_{\hat{x}}^T \delta x = 0$ quel que soit δx tel que $h(\hat{x} + \delta x) = 0$. Les δx autorisés sont donc tels que $h_{\hat{x}} \delta x = 0$. Ils engendrent un sous-espace tangent τ de dimension $m - p$. Le vecteur $r_{\hat{x}}$ doit être orthogonal à τ . $r_{\hat{x}}$ est donc limité au sous espace complémentaire de dimension p , engendré par les vecteurs lignes de $h_{\hat{x}}$ qui sont orthogonaux à τ . $r_{\hat{x}}$ est combinaison linéaire des p vecteurs lignes $h_{\hat{x}}$. En notant $-\lambda$ le vecteur des coefficients de cette combinaison linéaire, il vient :

$$r_{\hat{x}} + \lambda^T h_{\hat{x}} = 0$$

Cette expression est la condition nécessaire du premier ordre pour la fonction (**le lagrangien**) :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = r(x) + \lambda^T h(x)$$

relative à la variable x . La condition nécessaire du premier ordre relative à la variable λ redonne la contrainte.

Les coefficients de λ sont appelés des multiplicateurs ou **paramètres de Lagrange**.

La condition du deuxième ordre impose que \mathcal{L}_{xx} soit définie non négative dans le sous espace τ , ce qui est équivalent à :

$$\text{Toutes les racines } s \text{ de } \begin{vmatrix} sI - \mathcal{L}_{xx} & h_{\hat{x}}^T \\ h_{\hat{x}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ sont non négatives.}$$

1.1.4 Minimum avec contraintes inégalités - Paramètres de Karush-Kuhn-Tucker

Supposons x soit contraint par les p inégalités suivantes :

$$\gamma(x) \leq 0$$

Elles sont ramenées aux contraintes égalités :

$$\gamma^i(x) + y_i^2 = 0$$

Les conditions du premier ordre relatives au lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \mu, y) = r(x) + \sum \mu_i (\gamma^i(x) + y_i^2)$$

s'écrivent :

$$\mathcal{L}_x = 0 \rightarrow r_x + \gamma_x^T \mu = 0$$

$$\mathcal{L}_y = 0 \rightarrow \mu_i y_i = 0$$

Elles sont équivalentes à considérer le lagrangien sans terme y :

$$\mathcal{L}(x, \mu) = r(x) + \mu^T \gamma(x)$$

et envisager les 2^p cas :

1. contrainte inactive : résoudre avec $\mu_i = 0$, puis vérifier a posteriori que $\gamma^i(x) \leq 0$,
2. contrainte active ou saturée : résoudre avec $\gamma^i(x) = 0$, puis vérifier a posteriori que $\mu_i \geq 0$.

Cette deuxième condition vient du fait qu'il faut vérifier qu'il n'y ait pas de δx admissible tel que $r(\hat{x} + \delta x)$ soit inférieur à $r(\hat{x})$ avec $\gamma^i(\hat{x} + \delta x) < 0$. Or $\gamma^i(\hat{x} + \delta x) = \gamma^i(\hat{x}) + \gamma^{iT} \delta x = \gamma_x^{iT} \delta x < 0$. De plus $r(\hat{x} + \delta x) = r(\hat{x}) + r_x^T \delta x \geq r(\hat{x})$ implique $r_x^T \delta x \geq 0$. Or $\mathcal{L}_x = r_x + \gamma_x^T \mu = 0$ implique $\delta x^T r_x + \delta x^T \gamma_x^T \mu = 0$, implique $\delta x^T \gamma_x^T \mu \leq 0$ quel que soit δx admissible, c'est-à-dire tel que $\gamma_x \delta x \leq 0$. Il faut donc que tous les $\mu_i \geq 0$.

Les μ_i sont appelés **paramètres de Kuhn et Tucker**.

La condition du deuxième ordre est identique à celle utilisée avec les paramètres de Lagrange, en ne faisant intervenir que les paramètres des contraintes saturées.

Remarque : Les paramètres de Kuhn et Tucker associés aux contraintes saturées doivent être du signe opposé au signe désiré pour la fonction dans le cas d'une minimisation et du même signe dans le cas d'une maximisation en supposant qu'ils sont introduits dans le lagrangien par une *addition* du terme paramètre \times fonction.

1.2 Problème étudié

Dans tout ce qui suit, l'état x est de dimension m et la commande u est de dimension l .

Il s'agit de trouver la séquence des commandes optimales $\{\hat{u}_n\}_0^{N-1}$ pour le système discret :

$$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n)$$

soumis aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_n(x_n, u_n, n) \leq 0 & : \text{ Contraintes instantanées} \\
g(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1}) \leq 0 & : \text{ Contraintes globales} \\
h(x_0) = 0 & : \text{ Contraintes état initial} \\
l(x_N) = 0 & : \text{ Contraintes état final}
\end{aligned}$$

tout en minimisant un critère de la forme :

$$C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1})$$

1.3 Résolution par la programmation non linéaire

1.3.1 Lagrangien

On considère le lagrangien

$$\mathcal{L} = C + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^T (f_n - x_{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^T \gamma_n + \lambda^T g + \eta^T h + \xi^T l$$

obtenu à partir du critère et des contraintes auxquelles on a associé les paramètres de Lagrange et de Kuhn et Tucker suivants :

Relation	Paramètres	Dimension
$x_{n+1} = f_n(x_n, u_n)$	ψ_{n+1} (L)	$N \times m$
$\gamma_n(x_n, u_n) \leq 0$	μ_n (K&T)	$N \times p$
$g(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1}) \leq 0$	λ (K&T)	q
$h(x_0) = 0$	η (L)	$r_0 \leq m$
$l(x_N) = 0$	ξ (L)	$r_N \leq m$

1.3.2 Conditions nécessaires de stationnarité

Les conditions nécessaires de stationnarité du premier ordre conduisent aux équations suivantes :

Equation d'**optimalité de la commande** : $\mathcal{L}_{u_n} = 0 \Rightarrow N \times l$ équations ($0 \leq n \leq N-1$) :

$$C_{u_n} + f_{u_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{u_n}^T \mu_n + g_{u_n}^T \lambda = 0$$

Système adjoint : $\mathcal{L}_{x_n} = 0 \Rightarrow (N-1) \times m$ équations ($1 \leq n \leq N-1$) :

$$C_{x_n} + f_{x_n}^T \psi_{n+1} - \psi_n + \gamma_{x_n}^T \mu_n + g_{x_n}^T \lambda = 0 \quad (1.1)$$

Equation de **transversalité** pour l'état initial : $\mathcal{L}_{x_0} = 0 \Rightarrow m$ équations :

$$C_{x_0} + f_{x_0}^T \psi_1 + \gamma_{x_0}^T \mu_0 + g_{x_0}^T \lambda + h_{x_0}^T \eta = 0 \quad (1.2)$$

Equation de **transversalité** pour l'état final : $\mathcal{L}_{x_N} = 0 \Rightarrow m$ équations :

$$C_{x_N} - \psi_N + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi = 0 \quad (1.3)$$

Si dans l'équation de transversalité pour l'état initial, on pose :

$$\psi_0 = -h_{x_0}^T \eta$$

on obtient l'extension des équations du système adjoint pour $n = 0$. Dans ces conditions les conditions de stationnarité du premier ordre s'écrivent :

$$\begin{array}{lll}
 \text{Opt. cde. (1)} & : & C_{u_n} + f_{u_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{u_n}^T \mu_n + g_{u_n}^T \lambda = 0 & : & [0, N-1] \times l \\
 \text{Syst. adj. (2)} & : & \psi_n = C_{x_n} + f_{x_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{x_n}^T \mu_n + g_{x_n}^T \lambda & : & [0, N-1] \times m \\
 \text{Trans. ini. (3)} & : & \psi_0 = -h_{x_0}^T \eta & : & m \\
 \text{Trans. fin. (4)} & : & \psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi & : & m
 \end{array}$$

Remarque : f_{x_n} , γ_{x_n} , g_{x_n} représentent les matrices $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, $\frac{\partial \gamma_n}{\partial x_n}$, $\frac{\partial g_n}{\partial x_n}$. L'indice n n'est mis qu'une fois, accolé à x pour alléger les notations. La même convention est utilisée pour f_{u_n} , γ_{u_n} , g_{u_n} où l'indice n n'est mis qu'une fois, accolé à u .

Conditions sur les paramètres de Kuhn et Tucker :

$$\begin{array}{l}
 \mu_n^i \gamma_n^i = 0 \rightarrow \text{Si } \begin{cases} \mu_n^i = 0, \text{ vérifier que } \gamma_n^i \leq 0 \\ \gamma_n^i = 0, \text{ vérifier que } \mu_n^i \geq 0 \end{cases} \\
 \lambda^i g^i = 0 \rightarrow \text{Si } \begin{cases} \lambda^i = 0, \text{ vérifier que } g^i \leq 0 \\ g^i = 0, \text{ vérifier que } \lambda^i \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Conditions d'optimalité du deuxième ordre :

Les conditions du deuxième ordre sont très complexes à écrire. On se contente généralement de bien poser le problème au niveau du critère et de vérifier l'optimalité du résultat a posteriori.

Inventaire des équations et des inconnues :

Afin de voir si le problème est bien posé, vérifions que nous avons autant d'équations que d'inconnues.

Inconnues	Nombre	Equations associées	Nombre	Déséquilibre
$\{x_n\}_{n=0}^N$	$m \times (N+1)$	$\{x_{n+1} = f_n(x_n, u_n)\}_{n=0}^{N-1}$	$m \times N$	$-m$
$\{u_n\}_{n=0}^{N-1}$	$l \times N$	Opt. cde. (1)	$l \times N$	$=$
$\{\psi_n\}_{n=0}^N$	$m \times (N+1)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Syst. adj. (2)} \\ \text{Trans. ini. (3)} \\ \text{Trans. fin. (4)} \end{array} \right.$	$m \times (N+2)$	$+m$
η et ξ	$(r_0 + r_N)$	$h(x_0) = 0$ et $l(x_N) = 0$	$(r_0 + r_N)$	$=$

En ce qui concerne les paramètres de Kuhn et Tucker, il y a correspondance immédiate entre inconnues et équations, car soit on se donne une inconnue (on la fixe à zéro, et il faut vérifier que la contrainte inégalité associée est respectée), soit on sature la contrainte inégalité, la transformant ainsi en équation associée à cette inconnue.

Remarque 1 : L'association entre inconnues et équations est arbitraire. Elle n'est là que pour aider le décompte.

Remarque 2 : Sans l'inconnue supplémentaire ψ_0 , il n'y aurait que $m \times N$ inconnues $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ associées aux $m \times (N+1)$ équations (1.1), (1.2) et (1.3), ce qui fait toujours le même surplus de m équations pour les ψ_n .

Remarque 3 : Sans compter les paramètres de Kuhn et Tucker, on a un total de $K = 2m \times (N+1) + l \times N + r_0 + r_N$ inconnues et autant d'équations. Si toutes les équations sont linéaires en fonction des inconnues, le problème se ramène ainsi à la résolution d'un énorme système linéaire. Nous allons voir que sa structure est telle qu'une itération particulière permet de ramener le nombre d'inconnues à un nombre compris entre m et $2m$.

Remarque 4 : La présence de contraintes inégalités instantanées rend cette méthode inapplicable dès que le nombre d'étapes N dépasse quelques unités. En effet, il faut tester toutes les combinaisons possibles de saturation ou non des contraintes, ce qui amène à une explosion combinatoire. Par contre cette méthode s'accommode fort bien d'une, deux ou trois contraintes globales qui dans le pire des cas conduiront à 2, 4 ou 8 résolution du système à K inconnues.

Remarque 5 : Si certaines équations ne sont pas linéaires en fonction des inconnues, la résolution ne peut raisonnablement être envisagée que si les méthodes de résolution utilisées ne fournissent qu'une seule solution par inconnue pour éviter une explosion combinatoire.

1.3.3 Résolution du problème aux deux bouts

La résolution traditionnelle utilise une expression de la commande optimale \hat{u}_n en fonction de x_n, ψ_n, μ_n , et λ . Si C_{u_n} et g_{u_n} ne dépendent que de x_n, u_n et n (pas liaisons autres qu'additives entre des termes associés à des instants différents dans le revenu et dans les contraintes globales) l'équation d'optimalité de la commande $\mathcal{L}_{u_n} = 0$ ne comporte que des terme en $u_n, x_n, \psi_{n+1}, \mu_n$, et λ . Si elle est résoluble en u_n on obtient :

$$\mathcal{L}_{u_n} = 0 \rightarrow \hat{u}_n = B_n(x_n, \psi_{n+1}, \mu_n, \lambda)$$

qui reporté dans :

$$\begin{array}{ll} x_{n+1} = f_n(x_n, u_n) & \text{donne} \quad \hat{x}_{n+1} = D_n(\hat{x}_n, \hat{\psi}_{n+1}, \hat{\mu}_n, \hat{\lambda}) \\ \mathcal{L}_{x_n} = 0 & \text{donne} \quad \hat{\psi}_n = E_n(\hat{x}_n, \hat{\psi}_{n+1}, \hat{\mu}_n, \hat{\lambda}) \end{array}$$

Principe de résolution

La résolution suppose l'inversion d'un des deux systèmes, généralement le second.

$$\hat{\psi}_{n+1} = E'_n(\hat{x}_n, \hat{\psi}_n, \hat{\mu}_n, \hat{\lambda})$$

Initialisation : Paramétrée en x_0 et ψ_0 .

Intégration : Donne x_N et ψ_N fonction de x_0 et ψ_0 . Il y a $2m$ équations pour les $4m$ inconnues.

Résolution : Utilisation des $2m$ conditions de transversalité.

Utilisation pratique des conditions de transversalité

Etat initial :

x_0 **donné**

Alors : $\psi_0 = -\eta$. Or η de dimension m est quelconque $\rightarrow \psi_0$ est libre inconnu.

x_0 **libre**

Alors : $\psi_0 = 0$.

x_0 **partiellement contraint** par r_0 relations $h(x_0) = 0$ avec $r_0 \leq m$

Alors : $\psi_0 = -h_{x_0}^T \eta$ (ψ_0 est \perp à la surface $h(x_0) = 0$). L'élimination des r_0 composantes inconnues de η dans ces m équations fournit $m - r_0$ relations entre les composantes de ψ_0 qui avec les r_0 relations $h(x_0) = 0$ font un total de m relations liant les composantes de ψ_0 et de x_0 .

Dans tout les cas, sur les $2m$ conditions initiales nécessaires à l'intégration directe, seules m sont connues. On est donc, dans le cas de l'intégration directe, obligé d'intégrer en fonction de m paramètres inconnus.

Etat final :

x_N **donné**

Alors : $\psi_N = f(\xi)$. Or ξ de dimension m est quelconque $\rightarrow \psi_N$ est libre inconnu.

x_N **libre**

Alors : $\psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda$. ψ_N s'obtient en fonction de x_N .

x_N **partiellement contraint** par r_N relations $l(x_N) = 0$ avec $r_N \leq m$

Alors : $\psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi$. Comme précédemment l'élimination des r_N composantes inconnues de ξ dans ces m équations fournit $m - r_N$ relations entre les composantes de ψ_N et x_N qui avec les r_N relations $l(x_N) = 0$ font un total de m relations liant ces composantes.

Dans tout les cas, sur les $2m$ conditions finales nécessaires à l'intégration rétrograde, seules m sont connues. On est donc, dans le cas de l'intégration rétrograde, obligé d'intégrer en fonction de m paramètres inconnus.

Conclusion : Que l'intégration soit directe ou rétrograde, elle se fait en fonction de m paramètres donnés et de m paramètres inconnus. A l'issue de cette intégration, les m conditions initiales dans le cas direct ou finales dans le cas rétrograde fournissent les m équations qui permettent de calculer ces paramètres inconnus.

Remarque : Les paramètres η et ξ sont systématiquement éliminés pour établir des relations qui lient ψ et x . Ensuite, ils ne servent plus à rien dans le traitement du problème.

1.3.4 Commande en boucle fermée

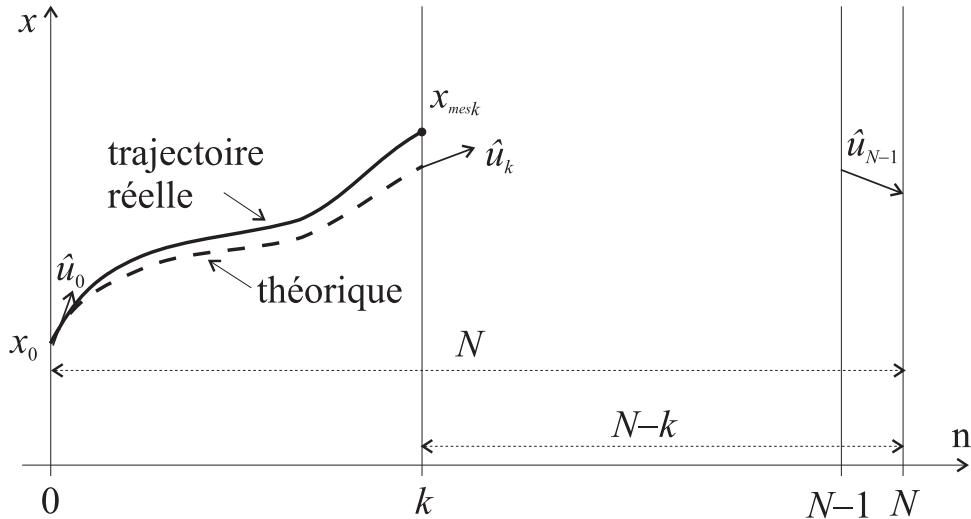
Principe

Problème type permettant d'obtenir une commande en boucle fermée :

- un système stationnaire : $f_n(x_n, u_n, u) = f(x_n, u_n)$,
- avec conditions initiales données,
- sans contraintes inégalités,
- avec un critère sous forme de somme de revenus élémentaires stationnaires.

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n) \text{ avec } \begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ l(x_N) = 0 \end{cases}$$

$$\min_{\{x_n, u_n\}} \left[s(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} r(x_n, u_n) \right]$$



S'il existe solution analytique que l'on peut exprimer sous la forme $\hat{u}_k = e(x_k, k, N)$, figurée par une flèche sur la figure ci-dessus, cette commande est dite commande optimale en boucle ouverte. Les perturbations et les imperfections de modélisation auront pour effet d'écarter la trajectoire réelle de la trajectoire théorique. On peut essayer d'améliorer la commande en remplaçant dans la formule précédente le x_k théorique par l'état mesuré à l'instant k , x_{mesk} . Mais on peut apporter une amélioration bien meilleure en constatant que :

$$\hat{u}_0 = e(x_0, 0, N)$$

est une commande de type boucle fermée, puisque qu'à l'instant initial on dispose du vrai x_0 . Le problème de trouver la commande optimale à l'instant k , en fonction x_{mesk} avec les mêmes conditions terminales à atteindre dans $N - k$ étapes, est le même (déjà résolu) que celui de trouver la commande optimale à l'instant 0, en fonction de x_0 avec les mêmes conditions terminales à atteindre dans N étapes. Il en résulte que la commande optimale \hat{u}_{kBF} s'obtient à partir de \hat{u}_0 en remplaçant x_0 par x_{mesk} et N par $N - k$:

$$\hat{u}_{kBF} = e(x_{mesk}, 0, N - k)$$

Petit exemple :

Soit le système linéaire discret du premier ordre :

$$x_{n+1} = x_n - u_n$$

que l'on désire ramener en N coups d'un état quelconque donné x_0^* à l'origine $x_N = 0$, en minimisant le critère :

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2$$

Solution par la PNL :

$$\text{Lagrangien : } \mathcal{L} = \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1} (x_n - u_n - x_{n+1}) + \eta (x_0 - x_0^*) + \xi x_N$$

$$\text{Optimalité de la commande : } \mathcal{L}_{u_n} = 0 \rightarrow 2u_n - \psi_{n+1} = 0 \rightarrow \hat{u}_n = \frac{1}{2} \psi_{n+1}$$

$$\text{Système adjoint rétrograde : } \mathcal{L}_{x_n} = 0 \rightarrow \psi_{n+1} - \psi_n = 0 \rightarrow \psi_n = \psi_{n+1} = \psi = \text{cte.}$$

Conditions de transversalité :

Initiale : $\mathcal{L}_{x_0} = 0 \rightarrow \psi + \eta = 0$. η est inconnu et aucune relation supplémentaire ne le contraint $\rightarrow \psi$ est inconnu.

Finale : $\mathcal{L}_{x_N} = 0 \rightarrow -\psi + \xi = 0$. ξ est inconnu et aucune relation supplémentaire ne le contraint $\rightarrow \psi$ est inconnu.

Problème au deux bouts :

Des deux conditions initiales nécessaires pour intégrer dans le sens direct (x_0, ψ) une seule est connue (x_0^*) . On intègre en fonction de l'inconnue ψ .

L'intégration de ce processus est simple :

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2}\psi \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\psi$$

d'où :

$$x_1 = x_0^* - \frac{1}{2}\psi$$

$$x_2 = x_1 - \frac{1}{2}\psi$$

$$x_2 = x_2 - \frac{1}{2}\psi$$

...

$$x_N = x_{N-1} - \frac{1}{2}\psi$$

$$x_N = x_0^* - \frac{N}{2}\psi$$

On utilise la condition terminale pour calculer ψ : $x_N = 0 \rightarrow \psi = \frac{2}{N}x_0^*$

D'où la commande boucle ouverte : $\hat{u}_n = \frac{1}{N}x_0^*$

D'où la première commande : $\hat{u}_0 = \frac{1}{N}x_0^*$

D'où la commande boucle fermée : $\hat{u}_{kBF} = \frac{1}{N-k}x_{mesk}$

1.3.5 Systèmes linéaires discrets avec critère quadratique

Cas particulier résoluble. La commande obtenue est linéaire en x .

Problème type :

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n, \begin{cases} x_0 \text{ donné qcq} \\ x_N \text{ donné } = 0 \end{cases}$$

$$\text{critère : } C = \min_{\{x_n, u_n\}} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^T R u_n$$

Lagrangien :

$$\mathcal{L} = C + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^T (f_n - x_{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^T \gamma_n + \lambda^T g + \eta^T h + \xi^T l$$

Transversalités : ψ_0 et ψ_N libres.

Résolution :

$$\mathcal{L}_{x_n} = 0 \rightarrow \psi_n = A^T \psi_{n+1} \rightarrow \psi_{n+1} = (A^T)^{-1} \psi_n$$

$$\psi_n = (A^T)^{-n} \psi_0$$

$$\mathcal{L}_{u_n} = 0 \rightarrow Ru_n + B^T \psi_{n+1} = 0 \rightarrow \hat{u}_n = -R^{-1} B^T \psi_{n+1}$$

$$\hat{u}_n = -R^{-1} B^T (A^T)^{-(n+1)} \psi_0$$

D'où :

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 - BR^{-1}B^T (A^T)^{-1} \psi_0 \\ x_2 &= A \left(Ax_0 - BR^{-1}B^T (A^T)^{-1} \psi_0 \right) - BR^{-1}B^T (A^T)^{-2} \psi_0 \\ &\dots \\ x_N &= A^N x_0 - \left(\sum_{k=1}^N A^{N-k} BR^{-1}B^T (A^T)^{-k} \right) \psi_0. \end{aligned}$$

Or $x_N = 0$. D'où :

$$x_0 = \left(\sum_{k=1}^N A^{-k} BR^{-1}B^T (A^T)^{-k} \right) \psi_0$$

Posons :

$$Q_N = \sum_{k=1}^N A^{-k} BR^{-1}B^T (A^T)^{-k}$$

La première commande s'écrit :

$$\hat{u}_0 = -R^{-1}B^T (A^T)^{-1} Q_N^{-1} x_0$$

d'où la commande optimale en boucle fermée :

$$\hat{u}_{kBF} = -R^{-1}B^T (A^T)^{-1} Q_{N-k}^{-1} x_{mesk}$$

Petit exemple :

Soit le système linéaire discret du deuxième ordre, à modes séparés :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + u_n \\ y_{n+1} = by_n + u_n \end{cases}$$

que l'on désire amener en N coups de l'origine ($x_0 = 0, y_0 = 0$) sur la droite :

$$x_N + y_N = 1$$

en minimisant le critère :

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2$$

Solution par la PNL :

Lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 + \sum_{n=0}^{N-1} [\varphi_{n+1} (ax_n + u_n - x_{n+1}) + \psi_{n+1} (by_n + u_n - y_{n+1})] \\ &\quad + \eta x_0 + \eta' y_0 + \xi (x_N + y_N - 1) \end{aligned}$$

Optimalité de la commande : $\mathcal{L}_{u_n} = 0 \rightarrow u_n + \varphi_{n+1} + \psi_{n+1} = 0 \rightarrow \hat{u}_n = -\varphi_{n+1} - \psi_{n+1}$

Système adjoint rétrograde : $\mathcal{L}_{x_n} = 0 \rightarrow \begin{cases} a\varphi_{n+1} - \varphi_n = 0 \\ b\psi_{n+1} - \psi_n = 0 \end{cases}$

Conditions de transversalité :

$$\text{Initiales : } \mathcal{L}_{x_0} = 0 \rightarrow \begin{cases} a\varphi_1 + \eta = 0 \\ b\psi_1 + \eta' = 0 \end{cases} .$$

η et η' inconnus sont délaissés. φ_1 et ψ_1 seront les paramètres inconnus.

$$\text{Finales : } \mathcal{L}_{x_N} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\varphi_N + \xi = 0 \\ -\psi_N + \xi = 0 \end{cases} .$$

ξ inconnu est éliminé, d'où :

$$\varphi_N - \psi_N = 0$$

C'est la deuxième relation qui avec $x_N + y_N = 1$ fournira le système permettant de calculer les paramètres inconnus φ_1 et ψ_1 .

Problème au deux bouts :

Des 4 conditions initiales nécessaires pour intégrer dans le sens direct $(x_0, y_0, \varphi_1, \psi_1)$ seuls x_0 et y_0 sont connus (nuls). On intègre en fonction des paramètres inconnus φ_1 et ψ_1 .

L'inversion puis l'intégration du système adjoint est immédiate :

$$\begin{cases} \varphi_n = a^{-n}\varphi_0 \\ \psi_n = b^{-n}\psi_0 \end{cases}$$

On substitue les inconnues φ_0 et ψ_0 à φ_1 et ψ_1 (en étendant les équations du système adjoint à $n = 0$) pour simplifier les expressions qui vont suivre.

Intégration du processus :

La commande optimale s'écrit :

$$\hat{u}_{n-1} = -\varphi_n - \psi_n = -(a^{-n}\varphi_0 + b^{-n}\psi_0)$$

Les modes étant découplés on peut intégrer la première équation (on introduit une condition initiale non nulle x_0 pour pouvoir calculer la commande en boucle fermée) :

$$x_1 = ax_0 - a^{-1}\varphi_0 - b^{-1}\psi_0$$

$$\begin{aligned} x_2 &= a^2x_0 - (\varphi_0 + ab^{-1}\psi_0 + a^{-2}\varphi_0 + b^{-2}\psi_0) \\ &= a^2x_0 - [a^{-2}\varphi_0(1+a^2) + b^{-2}\psi_0(1+ab)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= a^3x_0 - [a^{-3}\varphi_0(a^2+a^4) + b^{-3}\psi_0(ab+(ab)^2) + a^{-3}\varphi_0 + b^{-3}\psi_0] \\ &= a^3x_0 - [a^{-3}\varphi_0(1+a^2+a^4) + b^{-2}\psi_0(1+ab+(ab)^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_N &= a^Nx_0 - a^{-N}\varphi_0(1+a^2+\dots+a^{2(N-1)}) \\ &\quad - b^{-N}\psi_0(1+ab+\dots+(ab)^{N-1}) \end{aligned}$$

soit :

$$x_N = a^Nx_0 - \left[\left(\frac{1-a^{2N}}{1-a^2} \right) \frac{\varphi_0}{a^N} + \left(\frac{1-(ab)^N}{1-ab} \right) \frac{\psi_0}{b^N} \right]$$

Symétriquement, on obtient :

$$y_N = b^Ny_0 - \left[\left(\frac{1-b^{2N}}{1-b^2} \right) \frac{\psi_0}{b^N} + \left(\frac{1-(ab)^N}{1-ab} \right) \frac{\varphi_0}{a^N} \right]$$

Calcul des paramètres inconnus :

Utilisons les deux conditions terminales :

$$\begin{cases} \varphi_N = \psi_N \\ x_N + y_N = 1 \end{cases}$$

Elles impliquent :

$$\begin{cases} a^{-N} \varphi_0 = b^{-N} \psi_0 \\ \alpha_N a^{-N} \varphi_0 + \beta_N b^{-N} \psi_0 = (a^N x_0 + b^N y_0) - 1 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1 - a^{2n}}{1 - a^2} + \frac{1 - (ab)^n}{1 - ab} \\ \beta_n &= \frac{1 - b^{2n}}{1 - b^2} + \frac{1 - (ab)^n}{1 - ab} \end{aligned}$$

D'où :

$$a^{-N} \varphi_0 = b^{-N} \psi_0 = \frac{(a^N x_0 + b^N y_0) - 1}{\alpha_N + \beta_N}$$

D'où la commande boucle ouverte :

$$\hat{u}_{n-1} = (a^{N-n} + b^{N-n}) \frac{1 - (a^N x_0 + b^N y_0)}{\alpha_N + \beta_N}$$

D'où la première commande :

$$\hat{u}_0 = (a^{N-1} + b^{N-1}) \frac{1 - (a^N x_0 + b^N y_0)}{\alpha_N + \beta_N}$$

D'où la commande boucle fermée :

$$\hat{u}_{kBF} = (a^{N-1-k} + b^{N-1-k}) \frac{1 - (a^{N-k} x_{mesk} + b^{N-k} y_{mesk})}{\alpha_{N-k} + \beta_{N-k}}$$

A titre d'exemple, pour $k = N - 1$, la dernière commande s'écrit :

$$\hat{u}_{N-1BF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (ax_{mesN-1} + by_{mesN-1})$$

Elle conduit à :

$$\begin{aligned} x_N &= ax_{mesN-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (ax_{mesN-1} + by_{mesN-1}) \\ y_N &= by_{mesN-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (ax_{mesN-1} + by_{mesN-1}) \end{aligned}$$

On a bien :

$$x_N + y_N = 1$$

Application numérique : La figure 1.1 montre la trajectoire optimale obtenue dans le cas $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$ pour $N=3$. On trouve alors :

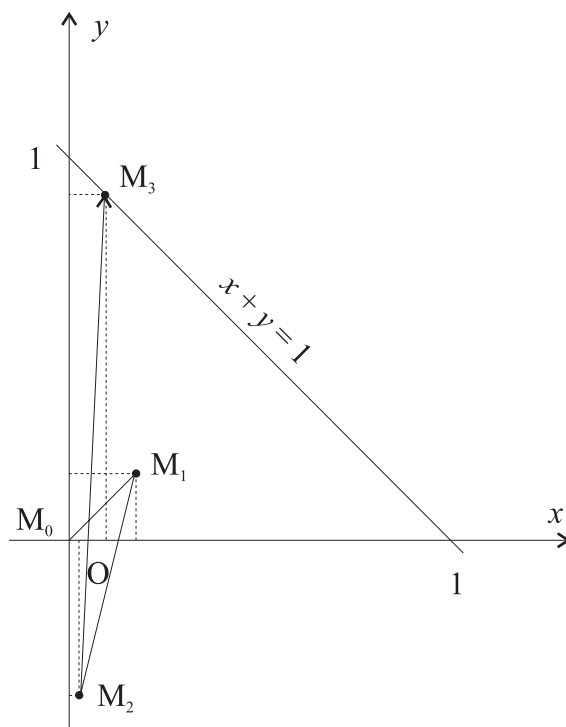


FIGURE 1.1 – Trajectoire optimale en 3 étapes

n	0	1	2	3
x_n	0	0.1748	-0.0257	0.0951
y_n	0	0.1748	-0.4113	0.9049
u_n	0.1748	-0.0617	0.0823	-

On peut constater que $x_3 + y_3 = 1$. Par ailleurs $C = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^2 u_n^2 = 0.0206$.

Variante du problème :

Supposons que le problème consiste à aller au-delà de la ligne $x + y = 1$. Le lagrangien du nouveau problème est identique, à ceci près que ξ devient un paramètre de Kuhn et Tucker associé à la contrainte $x_N + y_N \geq 1$. Les conditions d'optimalité impliquent que le produit $\xi (x_N + y_N - 1)$ doit être nul. Deux cas sont à considérer. Nous venons de traiter le cas où le deuxième terme est nul (contrainte saturée). Pour que le résultat soit bien un minimum, il faut vérifier que le paramètre de Kuhn et Tucker correspondant est négatif (signe opposé à celui désiré pour la contrainte dans le cas de la minimisation).

Or $\xi = \varphi_N = \psi_N$. Pour $x_0 = y_0 = 0$, il vient $\xi = \frac{-1}{\alpha_N + \beta_N}$ quantité qui est effectivement négative (on peut vérifier que α_N et β_N sont positifs $\forall a$ et b pour $N \geq 2$). Dans ce cas, il semble donc inutile de considérer la solution avec $\xi = 0$, c'est-à-dire le cas où on ignore la contrainte mais où on vérifie son respect a posteriori.

En commençant par traiter le cas $\xi = 0$, on a les implications :

$$\varphi_N = \psi_N = \xi'' = 0 \rightarrow \varphi_0 = \psi_0 = 0 \rightarrow \hat{u} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_N = a^N x_0 \\ y_N = b^N y_0 \end{cases}$$

La commande optimale consiste à laisser évoluer le système sur sa dynamique propre. La condition $x_N + y_N \geq 1$ ne sera pas réalisée dans le cas $x_0 = y_0 = 0$.

Si $x_0 \neq 0$ où et si $y_0 \neq 0$, la condition peut être réalisée pour certaines valeurs de x_0, y_0, a, b et N . Dans ce cas particulier, il y a intérêt à commencer par essayer cette solution qui est plus simple à calculer.

Remarque : Autres approche pour intégrer le système

Les équations récurrentes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + u_n \\ y_{n+1} = by_n + u_n \\ a\varphi_{n+1} - \varphi_n = 0 \\ b\psi_{n+1} - \psi_n = 0 \end{cases}$$

avec $\hat{u}_n = -\varphi_{n+1} - \psi_{n+1}$ conduisent au système récurrent linéaire :

$$X_{n+1} = AX_n$$

avec :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ \varphi_{n+1} \\ \psi_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a & 0 & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ 0 & b & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$X_N = A^N X_0$$

Si on note Λ la matrice diagonale des valeurs propres de A et M la matrice des vecteurs propres associés, telles que :

$$AM = M\Lambda$$

Il vient :

$$A = M\Lambda M^{-1} \text{ et } A^N = M\Lambda^N M^{-1}$$

Or A est triangulaire. Ses valeurs propres sont $a, b, \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$. Les vecteurs propres se calculent facilement :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1+ab}{-1+a^2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1+ab}{-1+b^2} \\ 0 & 0 & -1+ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1+ab \end{pmatrix} \text{ et } M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{-1+a^2} & -\frac{1}{-1+ab} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{-1+ab} & -\frac{1}{-1+b^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{-1+ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-1+ab} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$A^N = \begin{pmatrix} a^N & 0 & \frac{a^N - a^{-N}}{1 - a^2} & \frac{a^N - b^{-N}}{1 - ab} \\ 0 & b^N & \frac{b^N - a^{-N}}{1 - ab} & \frac{b^N - b^{-N}}{1 - b^2} \\ 0 & 0 & a^{-N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{-N} \end{pmatrix}$$

Il en résulte que :

$$x_N = a^n x_0 + \frac{a^n - a^{-n}}{1 - a^2} \varphi_0 + \frac{a^n - b^{-n}}{1 - ab} \psi_0$$

$$y_N = b^n y_0 + \frac{b^n - a^{-n}}{1 - ab} \varphi_0 + \frac{b^n - b^{-n}}{1 - b^2} \psi_0$$

qui correspond au résultat précédemment énoncé.

On peut également utiliser la transformée en z pour intégrer les récurrentes. Ici, cette méthode ne fait que compliquer l'obtention du résultat. On prend la transformée en z de l'équation récurrente $X_{n+1} = AX_n$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(X_n) &= \mathcal{X} \\ \mathcal{Z}(AX_n) &= A\mathcal{X} \quad \rightarrow z(\mathcal{X} - X_0) = A\mathcal{X} \\ \mathcal{Z}(X_{n+1}) &= z\mathcal{X} - zX_0 \end{aligned}$$

D'où :

$$(z1 - A)\mathcal{X} = zX_0 \rightarrow \mathcal{X} = (1 - z^{-1}A)^{-1} X_0$$

Soit :

$$\mathcal{X} = (1 + z^{-1}A + z^{-2}A^2 + \dots) X_0$$

qui d'après la définition de la transformée en z conduit tout simplement à :

$$X_n = A^n X_0$$

résultat qui était évident a priori.

Chapitre 2

Application de la P.D. à la commande optimale

Ce chapitre décrit les modalités d'application de la programmation dynamique inverse à la commande optimale des processus déterministes discrets. Cette méthode fournit une commande de type boucle fermée. Le principe utilisé peut également être appliqué en direct. Dans ce cas la commande obtenue n'est pas de type boucle fermée. Cette deuxième approche ne sera pas traitée.

La programmation dynamique s'appuie sur le principe de Bellman [1] qui date de 1957.

Dans tout ce qui suit, l'état x est de dimension m et la commande u est de dimension l .

2.1 Exemple simple

Considérons le processus discret d'équation d'évolution :

$$x_{n+1} = x_n + u_n$$

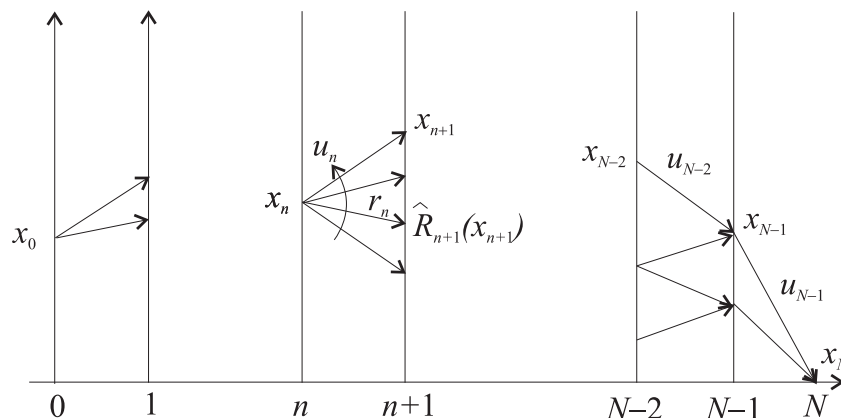


FIGURE 2.1 – Recalage à l'origine de $x_{n+1} = x_n + u_n$

On veut amener ce processus de x_0 quelconque à $x_N = 0$ en N étapes en minimisant le critère :

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} r_n(x_n, u_n, n) \text{ avec } r_n = u_n^2$$

Notons

$$R_n(x_n, u_n, \dots, u_{N-1}) = \sum_{k=n}^{N-1} r_k(x_k, u_k, k)$$

le revenu sur une trajectoire qui commence en x_n à l'étape n et remarquons que :

$$R_n(x_n, u_n, \dots, u_{N-1}) = r_n(x_n, u_n, n) + R_{n+1}(f_n(x_n, u_n, n), u_{n+1}, \dots, u_{N-1}) \quad (2.1)$$

Le revenu sur la trajectoire optimale issue de x_n à l'étape n ne dépend que de x_n . Nous le noterons :

$$\hat{R}_n(x_n) = \text{opt}_{\{u_k\}_{k=n}^{N-1}} R_n(x_n, u_n, \dots, u_{N-1})$$

Procédons en partant de la fin.

A l'étape $n = N - 1$, la commande terminale u_{N-1} est imposée pour assurer $x_N = 0$:

$$0 = x_{N-1} + \tilde{u}_{N-1} = 0 \rightarrow \tilde{u}_{N-1} = -x_{N-1} \quad (2.2)$$

D'où :

$$\hat{R}_{N-1}(x_{N-1}) = \tilde{u}_{N-1}^2 = x_{N-1}^2$$

A l'étape $n = N - 2$, on a :

$$\hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \{u_{N-2}^2 + \tilde{u}_{N-1}^2\}$$

puisque \tilde{u}_{N-1} est imposé. La relation (2.2) permet d'écrire :

$$\hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \{u_{N-2}^2 + x_{N-1}^2\} \quad (2.3)$$

soit :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) &= \min_{u_{N-2}} \{u_{N-2}^2 + (x_{N-2} + u_{N-2})^2\} \\ \hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) &= \min_{u_{N-2}} \{2u_{N-2}^2 + 2x_{N-2}u_{N-2} + x_{N-2}^2\} \\ \frac{\partial}{\partial u_{N-2}} &= 0 \rightarrow 4u_{N-2} + 2x_{N-2} = 0 \rightarrow \hat{u}_{N-2} = -\frac{1}{2}x_{N-2} \\ \hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) &= \frac{1}{2}x_{N-2}^2 \end{aligned}$$

Remarque : la relation (2.3) s'écrit également :

$$\hat{R}_{N-2}(x_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \{u_{N-2}^2 + \hat{R}_{N-1}(x_{N-1})\}$$

On sait donc calculer $\hat{R}_{N-2}(x_{N-2})$ et \hat{u}_{N-2} à partir de $\hat{R}_{N-1}(x_{N-1})$ par cette relation de récurrence. Si à l'étape $n + 1$, on dispose des commandes optimales u_{n+1}, \dots, u_{N-1} correspondant à n'importe quel x_{n+1} , on dispose du revenu optimal :

$$\hat{R}_{n+1}(x_{n+1}) = R_{n+1}(x_{n+1}, \hat{u}_{n+1}, \dots, \hat{u}_{N-1})$$

Or, (2.1) implique :

$$\begin{aligned}\hat{R}_n(x_n) &= \min_{\{u_k\}_{n}^{N-1}} \{u_n^2 + R_{n+1}(f_n(x_n, u_n, n), u_{n+1}, \dots, u_{N-1})\} \\ &= \{\hat{u}_n^2 + R_{n+1}(f_n(x_n, \hat{u}_n, n), \hat{u}_{n+1}, \dots, \hat{u}_{N-1})\} \\ &= \{\hat{u}_n^2 + \hat{R}_{n+1}(f_n(x_n, \hat{u}_n, n))\}\end{aligned}$$

Il est évident (après mûre réflexion) que :

$$\hat{R}_n(x_n) = \min_{u_n} \{u_n^2 + \hat{R}_{n+1}(x_{n+1})\} \text{ avec } x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n)$$

puisque quelque soit x_{n+1} produit par le couple (x_n, u_n) , on dispose ensuite des commandes optimales adaptées.

Faisons l'hypothèse que $\hat{R}_{n+1}(x_{n+1})$ est (comme \hat{R}_{N-1}) quadratique en x_n :

$$\hat{R}_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{1}{\alpha_{n+1}} x_{n+1}^2$$

On a alors :

$$\hat{R}_n(x_n) = \min_{u_n} \left\{ u_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{\alpha_{n+1}} \right\} = \min_{u_n} \left\{ u_n^2 + \frac{(x_n + u_n)^2}{\alpha_{n+1}} \right\}$$

implique :

$$2\hat{u}_n + \frac{2(x_n + \hat{u}_n)}{\alpha_{n+1}} = 0 \rightarrow \hat{u}_n = -\frac{x_n}{(1 + \alpha_{n+1})}$$

d'où :

$$\hat{R}_n(x_n) = \left[\frac{1}{(1 + \alpha_{n+1})^2} + \frac{1}{\alpha_{n+1}} \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha_{n+1})} \right)^2 \right] x_n^2 = \frac{x_n^2}{(1 + \alpha_{n+1})} \triangleq \frac{x_n^2}{\alpha_n}$$

qui vérifie l'hypothèse de la forme quadratique de $\hat{R}_n(x_n)$.

On a ainsi la récurrence :

$$\alpha_n = 1 + \alpha_{n+1}$$

Or $\hat{R}_{N-1}(x_{N-1}) = x_{N-1}^2$ implique $\alpha_{N-1} = 1$. A partir de cette initialisation, on obtient par une intégration à rebours de la relation de récurrence :

$$\alpha_n = N - n$$

D'où la commande optimale :

$$\hat{u}_n = -\frac{x_n}{N - n}$$

On constate que la commande optimale est de type boucle fermée.

2.2 Problème type

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n, n), \begin{cases} x_0 \text{ donné qcq, } x_N \text{ donné ou non} \\ N \text{ fixé ou pas} \\ u_n \in \mathcal{U}(x_n, n) \end{cases}$$

critère : opt. de $C = s(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} r(x_n, u_n, n)$

Typiquement u_n est borné.

2.3 Résolution : Le principe de Bellman

On considère le sous-critère de k à N :

$$R_k \triangleq s(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} r(x_n, u_n, n)$$

Equation récurrente d'optimalité : Principe de Bellman

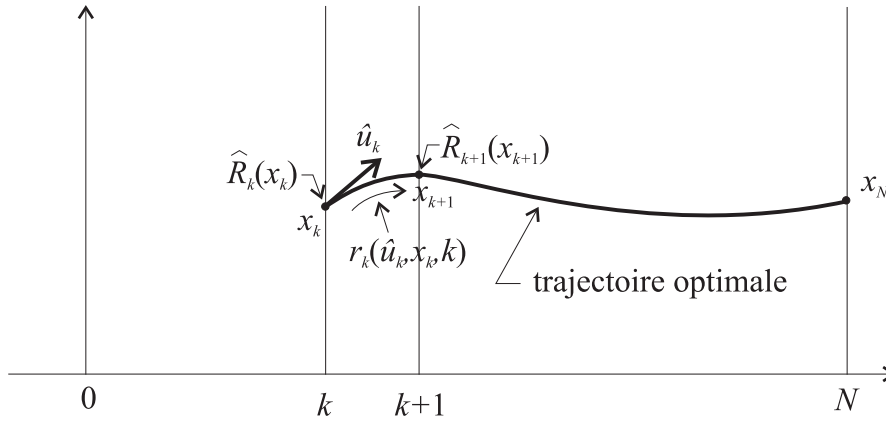


FIGURE 2.2 – Trajectoire optimale issue de x_k

L'optimum de R_k , noté $\hat{R}_k(x_k)$, ne dépend que de x_k . Si x_{k+1} est sur la trajectoire optimale issue de x_k , la trajectoire optimale solution au problème formulé à partir de $k+1$ et de l'état x_{k+1} coïncide pour $n \geq k+1$ avec la trajectoire optimale issue de x_k . D'où :

$$\hat{R}_k(x_k) = \underset{u_k \in \mathcal{U}(x_k, k)}{\text{opt.}} \{ r(x_k, u_k, k) + \hat{R}_{k+1}(f(x_k, u_k, k)) \}$$

On est en présence d'une équation rétrograde. Il y aura a priori, comme en P.N.L., un problème aux deux bouts à résoudre.

2.3.1 Cas de l'horizon fixé

Si x_N est libre, $\hat{R}_N(x_N) = s(x_N)$ puis calcul rétrograde des commandes pour tous les x_N possibles. On ne dispose de la première commande qu'à la fin de la récurrence.

Si x_N est fixé, les k dernières commandes $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ sont imposées pour amener l'état en x_N avec :

$$\frac{m}{l} \leq k \leq m$$

Si $k = \frac{m}{T}$, $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ est déterminé de manière unique pour réaliser le recalage, d'où :

$$\hat{R}_{N-k}(x_{N-k}) = s(x_N) + \sum_{n=N-k}^{N-1} r(x_n, \tilde{u}_n, n)$$

On effectue ensuite la résolution rétrograde. Dans le cas contraire, il y a une infinité de séquence $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ possibles. Une optimisation préalable de cette séquence est nécessaire à l'initialisation de $\hat{R}_{N-k}(x_{N-k})$.

Fonction de pénalisation :

Le cas x_N fixé (à la valeur x_N^*) est en pratique traité comme x_N libre en utilisant une fonction de pénalisation :

$$s(x_N) = \mu (x_N - x_N^*)^T C (x_N - x_N^*)$$

avec $\mu > 0$ et C définie positive.

2.3.2 Cas de l'horizon libre

Dans ce cas, le revenu optimal est indépendant de l'étape. Il ne dépend que de l'état :

$$\hat{R}_n(x_n) = \hat{R}_k(x_k) = \hat{R}(x) \text{ si } x_n = x_k = x$$

Généralement on considère que ce revenu est nul si l'état appartient à un domaine terminal Φ :

$$\hat{R}(x^*) = 0 \text{ pour } x^* \in \Phi$$

Pour $x \notin \Phi$, on cherche la solution en régime permanent de l'équation implicite :

$$\hat{R}(x) = \text{opt.}_{u \in \mathcal{U}(x)} \{ r(x, u) + \hat{R}(f(x, u)) \}$$

Exemple : Temps minimal (nombre d'étapes) pour atteindre $x^* = 0$:

$$\hat{T}(x) = \text{opt.}_{u \in \mathcal{U}(x)} \{ 1 + \hat{T}(f(x, u)) \} \text{ et } \hat{T}(0) = 0$$

2.4 Mise en oeuvre sur ordinateur

Elle est basée sur une quantification des états et de la commande.

- q_x pas de quantification de $x_n \rightarrow q_x^m$ mémoires,
- q_u pas de quantification de $u_n \rightarrow q_u^l$ commandes à tester.

2.4.1 Initialisation

Initialisation des q_x^m valeurs $\hat{R}_N(x_N)$ à :

- $s(x_N)$ si x_N vérifie la condition terminale,
- l^∞ si x_N ne la vérifie pas.

Si x_N est donné il suffit de prendre $s(x_N) = 0$ si $x_N = x_N^*$.

2.4.2 Algorithme

Récurrence rétrograde pour $n = N - 1$ à 0.

- **Boucle** sur les q_x^m points x_n
- $\hat{R}_n(x_n) = \infty$ (initialisation)
 - **Boucle** sur les q_u^l commandes u_n
 - $x_{n+1} = f(x_n, u_n)$
 - $R =$ interpolation de $\hat{R}_{n+1}(x_{n+1})$ (dans hypercube qui contient x_{n+1})
 - $R_m = r(x_n, u_n, n) + R$
 - Si $R_m < \hat{R}_n(x_n) \rightarrow \hat{R}_n(x_n) = R_m$ et $\hat{u}_n = u_n$
 - **Fin boucle** sur u_n
- **Fin boucle** sur x_n
- Imprimer \hat{u}_n et des $\hat{R}_n(x_n)$ pour tous les x_n de l'étape n .
- Transfert : $\hat{R}_{n+1}(x_{n+1}) \leftarrow \hat{R}_n(x_n)$

Fin récurrence sur n .

Cet algorithme nécessite :

- $2 \times q_x^m$ mémoires pour ranger les $\hat{R}_n(x_n)$ et $\hat{R}_{n+1}(x_{n+1})$
- $N \times l \times q_x^m$ mémoires pour ranger les $\hat{u}_n(x_n)$.

On ne dispose de la première commande à appliquer, pour un état initial donné, qu'à l'issue de l'algorithme. Les N tableaux $\hat{u}_n(x_n)$ contiennent les commandes en boucle fermée.

La table suivante donne pour la quantité de mémoire nécessaire pour stocker les commandes optimales calculées à **chaque étape** dans le cas d'un système mono-commande ($l = 1$).

$q_x^m \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
10	10	100	1k	10k	100k	1M	10M
100	100	10k	1M	100M	10G	∞	∞
1000	1k	1M	1G	∞	∞	∞	∞

Les cases marquées ∞ marquent les limites pratiques actuelles (année 2000).

Remarque sur l'interpolation. Pour interpoler une valeur $R_{(u,v)}$ entre les 4 valeurs $R_{(0,0)}$, $R_{(0,1)}$, $R_{(1,0)}$, $R_{(1,1)}$ on utilise généralement la formule classique :

$$R(u, v) \simeq (1 - u)(1 - v)R_{(0,0)} + (1 - u)vR_{(0,1)} + u(1 - v)R_{(1,0)} + uvR_{(1,1)}$$

Elle s'étend facilement pour un maillage rectangulaire avec des intervalles quelconques et pour $m > 2$.

Nous concluons ce chapitre en notant que la programmation dynamique n'est pas adaptée au traitement des problèmes avec des contraintes globales. Par contre, contrairement à la P.N.L., elle s'accommode très bien des contraintes instantanées qui tout simplement éliminent les transitions qui conduisent à leur non respect, réduisant ainsi le nombre de comparaisons de revenus à effectuer.

Enfin citons l'ouvrage de Robert E. Larson [4] dans lequel on trouvera une description détaillée de la mise en oeuvre sur ordinateur des algorithmes de programmation dynamique.

2.5 Systèmes linéaires discrets avec critère quadratique

Cas particulier résoluble. La commande obtenue est linéaire en x .

2.5.1 Problème type

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = Ax_n + Bu_n, \text{ (éventuellement } A_n \text{ et } B_n) \\ \text{critère : } \min \sum_{n=0}^{N-1} (x_n^T Q x_n + u_n^T R u_n), \text{ (éventuellement } Q_n, R_n \dots) \end{array} \right.$$

Remarque : Ne pas confondre le scalaire revenu R_n avec la matrice R du revenu élémentaire $u_n^T R u_n$. Nous utilisons la même lettre R pour cette matrice car c'est la notation traditionnelle utilisée dans les critères quadratiques en u .

2.5.2 Principe de résolution

Hypothèse : $\hat{R}_n(x_n)$ est quadratique en x_n .

$$\hat{R}_n(x_n) = x_n^T P_n x_n$$

Résolution par l'équation récurrente d'optimalité :

$$\hat{R}_n(x_n) = \min_{u_n} \left\{ x_n^T Q x_n + u_n^T R u_n + (Ax_n + Bu_n)^T P_{n+1} (Ax_n + Bu_n) \right\}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_n} = 0 \rightarrow Ru_n + B^T P_{n+1} (Ax_n + Bu_n) = 0$$

D'où :

$$\hat{u}_n = -K_n x_n \quad \text{avec} \quad K_n = (R + B^T P_{n+1} B)^{-1} B^T P_{n+1} A$$

La commande est linéaire en x_n . Reportée dans $\hat{R}_n(x_n)$ il vient :

$$x_n^T P_n x_n = x_n^T Q x_n + x_n^T A^T P_{n+1} (A - BK_n) x_n$$

D'où la récurrence rétrograde sur P_n :

$$P_n = Q + A^T P_{n+1} (A - BK_n)$$

soit :

$$P_n = Q + A^T P_{n+1} A - A^T P_{n+1} B (R + B^T P_{n+1} B)^{-1} B^T P_{n+1} A$$

qui est une équation de Riccati pour le cas discret.

2.5.3 Initialisation de l'équation de Riccati

En horizon fixé

Cas sans contraintes terminales x_N est libre.

$\hat{R}_N(x_N)$ est initialisé à 0 si aucun critère terminal, où à $x_N^T Q_N x_N$ sinon.

$$P_N = Q_N$$

Boucle rétrograde de $n = N - 1$ à 0

$$K_n = (R + B^T P_{n+1} B)^{-1} B^T P_{n+1} A$$

$$P_n = Q + A^T P_{n+1} (A - BK_n)$$

Fin boucle rétrogradeInitialiser x_0 **Boucle** directe de 0 à $N - 1$

$$u_n = -K_n x_n$$

$$x_{n+1} = Ax_n + Bu_n$$

Fin boucle directe**Cas avec contraintes terminales Cas x_N donné**

Considérons :

$$U_k^T = (u_{N-k}^T, \dots, u_{N-2}^T, u_{N-1}^T)$$

$$G_k = \begin{bmatrix} A^{k-1}B & A^{k-2}B & \dots & AB & B \end{bmatrix}$$

U_k^T est le vecteur des k dernières commandes concaténées (kl composantes) et G_k est la matrice de commandabilité. On a :

$$x_N = A^k x_{N-k} + G_k U_k$$

D'où :

$$G_k U_k = x_N - A^k x_{N-k}$$

Pour résoudre ce système, il faut que $kl \geq m$, afin d'avoir au moins autant d'inconnues que d'équations. Le théorème de Cayley-Hamilton indiquant que les matrices $A^p B$ sont dépendantes des matrices $A^{p-n} B$ pour $p \geq m$ et $1 \leq n \leq p$, il est inutile de prendre des valeurs de k supérieures à m . Considérons une valeur de k telle que $\frac{m}{l} \leq k \leq m$. Si :

- $\text{rang}[G_k] < m$ le recalage n'est pas possible (système non gouvernable),
- $\text{rang}[G_k] = m = kl$, le recalage est réalisé par une solution unique, fonction de x_{N+1-k} .
- $\text{rang}[G_k] = m < kl$, il existe une infinité de solutions réalisant le recalage.

La plus petite valeur v de k telle que $\text{rang}[G_k] = m$ est appelée index de gouvernabilité. Si elle existe (système gouvernable), elle est donc telle que :

$$\frac{m}{l} \leq v \leq m$$

C'est le nombre minimal d'étapes nécessaires à fixer les m composantes de x_N .

La résolution de ce cas est traitée ci-après dans le contexte plus général de x_N partiellement contraint.

Cas x_N partiellement contraint

Supposons le système gouvernable. Si x_N est contraint par r équations ($r \leq m$) :

$$Lx_N = a$$

les k dernières commandes $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ sont imposées pour réaliser ce recalage avec :

$$\frac{r}{l} \leq k \leq v \leq m$$

soit :

$$LG_k U_k = a - LA^k x_{N-k}$$

Sous-cas recalage déterministe :

Si $k = \frac{q}{l}$, $\{\tilde{u}_n\}_{N-k}^{N-1}$ est déterminé de manière unique par le recalage :

$$U_k = (LG_k)^{-1} \left(a - LA^k x_{N-k} \right)$$

On déduit $\hat{R}_{N-k}(x_{N-k})$ de cette séquence ce qui permet d'initialiser P_{N-k} .

Sous-cas recalage à optimiser :

Si $k > \frac{q}{l}$ il y a une infinité de solutions.

R_{N-k} est une fonction quadratique de x_{N-k} et de U_k de la forme :

$$\hat{R}_{N-k} = x_{N-k}^T C_k x_{N-k} + 2x_{N-k}^T D_k U_k + U_k^T E_k U_k$$

que l'on va minimiser par rapport à U_k . Au préalable, établissons les relations de récurrence qui permettent de calculer C_k , D_k et E_k . Posons :

$$R_{N-p} = x_{N-p}^T C_p x_{N-p} + 2x_{N-p}^T D_p U_p + U_p^T E_p U_p$$

avec $1 \leq p \leq k$.

L'équation récurrente d'optimalité donne :

$$\begin{aligned} R_{N-p} = & x_{N-p}^T Q x_{N-p} + u_{N-p}^T R u_{N-p} + (Ax_{N-p} + Bu_{N-p})^T C_{p-1} (Ax_{N-p} + Bu_{N-p}) \\ & + 2(Ax_{N-p} + Bu_{N-p})^T D_{p-1} U_{p-1} + U_{p-1}^T E_{p-1} U_{p-1} \end{aligned}$$

En regroupant les termes :

$$U_p = \begin{pmatrix} u_{N-p} \\ U_{p-1} \end{pmatrix}$$

il vient :

$$\begin{aligned} C_p &= Q + A^T C_{p-1} A \\ D_p &= [A^T C_{p-1} B \quad A^T D_{p-1}] \\ E_p &= \begin{bmatrix} R + B^T C_{p-1} B & B^T D_{p-1} \\ D_{p-1}^T B & E_{p-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour $p = 1$, on initialise :

$$C_1 = Q, D_1 = 0, E_1 = R$$

et on effectue la boucle rétrograde jusqu'au calcul de C_k , D_k et E_k .

A ce niveau on cherche U_k qui minimise :

$$R_{N-k} = x_{N-k}^T C_k x_{N-k} + 2x_{N-k}^T D_k U_k + U_k^T E_k U_k$$

et tel que :

$$LG_k U_k = a - LA^k x_{N-k}$$

Posons :

$$M = LG_k \text{ et } N = LA^k$$

On considère le lagrangien :

$$\mathcal{L} = x^T Cx + 2x^T DU + U^T EU + \mu^T (MU + Nx - a)$$

où x représente x_{N-k} , U représente U_k , C, D, E représentent C_k, D_k, E_k , etc..

$$\mathcal{L}_U = 2D^T x + 2EU + M^T \mu = 0$$

implique :

$$\hat{U} = -E^{-1} \left(D^T x + \frac{1}{2} M^T \mu \right)$$

qui reporté dans la contrainte implique :

$$ME^{-1} \left(D^T x + \frac{1}{2} M^T \mu \right) = a - Nx$$

$$\mu = 2 (ME^{-1} M^T)^{-1} [a - (N + ME^{-1} D^T) x]$$

D'où finalement :

$$\hat{U} = -E^{-1} \left(D^T x + M^T (ME^{-1} M^T)^{-1} [a - (N + ME^{-1} D^T) x] \right)$$

Posons :

$$K_1 = -E^{-1} M^T (ME^{-1} M^T)^{-1}$$

$$K_2 = E^{-1} \left(M^T (ME^{-1} M^T)^{-1} (N + ME^{-1} D^T) - D^T \right)$$

Il vient :

$$\hat{U}_k = K_1 a + K_2 x_{N-k}$$

qui reporté dans le revenu donne R_{N-k} de la forme :

$$\hat{R}_n(x_n) = x_n^T P_n x_n + 2\beta_n^T x_n + \alpha_n$$

avec :

$$P_{N-k} = C + K_2^T E K_2 + D K_2 + K_2^T D^T$$

$$\beta_{N-k} = (D + K_2^T E) K_1 a$$

$$\alpha_{N-k} = a K_1^T E K_1 a$$

Avec cette initialisation, on procède à la récurrence rétrograde classique utilisant l'équation récurrente d'optimalité.

Exercice :

Etablir les relations de récurrence sur P_n, β_n et α_n à partir de l'équation récurrente d'optimalité.

Utilisation d'une fonction de pénalisation :

Si ce recalage peut être réalisé avec une certaine tolérance, on peut remplacer la contrainte terminale par le critère terminal quadratique :

$$\hat{R}_N(x_N) = \mu (Lx_N - a)^T C (Lx_N - a)$$

avec C définie positive (généralement la matrice unité). Si μ est choisi grand, l'erreur terminale sera faible, mais la somme des autres critères élémentaires sera plus élevée et inversement si μ est choisi petit.

Les matrices P_N , β_N et α_N seront initialisées par :

$$P_N = \mu L^T C L$$

$$\beta_N = \mu a^T C L$$

$$\alpha_N = \mu a^T C a$$

Conclusion *Le problème aux deux bouts est contourné, car l'équation de Riccati s'initialise complètement à la fin et s'intègre à rebours. Elle donne le gain linéaire de la commande à appliquer en boucle fermée à chaque instant.*

Cas de l'horizon libre ou infini

Si le système est **stationnaire** ($A_n = A$, $B_n = B$, $Q_n = Q$, $R_n = R$, ...) alors quand $n \rightarrow \infty$, l'équation de récurrence devient l'équation implicite de Riccati pour les systèmes discrets, utilisée dans la méthode de synthèse de correcteur dite L.Q. (linéaire quadratique) :

$$P = Q + A^T P A - (B^T P A)^T (R + B^T P B)^{-1} (B^T P A)$$

Pour la résoudre par itération, on peut initialiser P à 0 si x_{Final} est libre ou à $\mu L^T C L$ si x_{Final} est contraint.

On en déduit le gain linéaire stationnaire K .

2.5.4 Exercice

Soit le système discret :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} y_n$$

$$y_{n+1} = y_n + u_n$$

que l'on désire réguler (ramener en 0,0). Pour cela on cherche la commande optimale qui minimise le critère élémentaire :

$$r_n = x_n^2 + y_n^2$$

afin que les commandes tendent à annuler x_n et y_n .

Horizon fixé :

Recalage final :

$$0 = x_N = x_{N-1} + \frac{1}{\sqrt{2}} y_{N-1} = \left(x_{N-2} + \frac{1}{\sqrt{2}} y_{N-2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (y_{N-2} + u_{N-2})$$

$$0 = y_{N-1} = y_{N-1} + u_{N-1} = (y_{N-2} + u_{N-2}) + u_{N-1}$$

D'où :

$$u_{N-2} = -\sqrt{2}x_{N-2} - 2y_{N-2}$$

$$u_{N-1} = \sqrt{2}x_{N-2} + y_{N-2}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} R_{N-2}(x_{N-2}, y_{N-2}) &= (x_{N-2}^2 + y_{N-2}^2) + (x_{N-1}^2 + y_{N-1}^2) \\ &= (x_{N-2}^2 + y_{N-2}^2) + \left(x_{N-2} + \frac{1}{\sqrt{2}}y_{N-2}\right)^2 + \left(y_{N-2} - \sqrt{2}x_{N-2} - 2y_{N-2}\right)^2 \\ &= 4x_{N-2}^2 + 3\sqrt{2}x_{N-2}y_{N-2} + \frac{5}{2}y_{N-2}^2 \end{aligned}$$

Si l'horizon de résolution était en $N = 3$ coups, la première commande ($u_0 = u_{N-3}$) s'obtiendrait par :

$$\begin{aligned} R_{N-3}(x, y) &= \min_u \left[(x^2 + y^2) + R_{N-2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, y + u\right) \right] \\ &= \min_u \left[x^2 + y^2 + 4\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + 3\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)(y + u) + \frac{5}{2}(y + u)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial R_{N-3}}{\partial u} = 3\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) + 5(y + u) = 0 \rightarrow \hat{u} = \frac{3\sqrt{2}}{5}x - \frac{8}{5}y$$

$$R_{N-3}(x, y) = \frac{16}{5}x^2 + \frac{21}{10}xy + \frac{11\sqrt{2}}{5}y^2$$

Et ainsi de suite.

Horizon infini :

$R_n(x_n, y_n)$ devient stationnaire. $R_n(x_n, y_n) = R(x, y)$ car il ne dépend plus que de l'état.

L'équation récurrente d'optimalité devient :

$$R(x, y) = \min_u \left[(x^2 + y^2) + R\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, y + u\right) \right]$$

Supposons que $R(x, y)$ soit quadratique de la forme :

$$R(x, y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

Il vient :

$$R(x, y) = \min_u \left[(x^2 + y^2) + \alpha\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + 2\beta\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)(y + u) + \gamma(y + u)^2 \right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \beta\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) + \gamma(y + u) \rightarrow$$

$$\hat{u} = -\frac{\beta}{\gamma}x - \left(1 + \frac{\beta}{\gamma\sqrt{2}}\right)y$$

$$R(x, y) = \left(1 + \alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)x^2 + 2\left(\alpha - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}xy + \left(1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta^2}{2\gamma}\right)y^2$$

D'où les relations de récurrence sur α , β et γ :

$$1 - \frac{\beta^2}{\gamma} = 0 \rightarrow \gamma = \beta^2$$

$$(\alpha - 1)\frac{1}{\sqrt{2}} = \beta \rightarrow \alpha = 1 + \beta\sqrt{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \beta\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \gamma \rightarrow \beta^2 - \beta\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$$

Elles admettent deux solutions :

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = \sqrt{2} \\ \gamma = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

La deuxième solution conduit à $R(x,y) = -\sqrt{2}xy + \frac{1}{2}y^2$ qui est négatif pour $0 < y < 2\sqrt{2}x$, or $R(x,y)$ est forcément positif, d'où :

$$R(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2$$

et :

$$\hat{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{2}y$$

Si on applique cette commande en permanence, le système devient :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sqrt{2}}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_n - \frac{1}{2}y_n \end{cases} \quad \text{soit } X_{n+1} = AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont racines de $\lambda(\lambda - \frac{1}{2}) = 0$. D'où les deux modes $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ associés à la matrice de vecteurs propres :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Notons ξ et η les modes propres tels que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

On a :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

d'où les deux modes propres :

$$\xi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \text{ associé à } \lambda_1 = 0$$

$$\eta = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right) \text{ associé à } \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

On peut vérifier qu'à la première étape :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_0 \\ y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_0 - \frac{1}{2}y_0 \end{cases} \rightarrow x_1 + \sqrt{2}y_1 = 0$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}\xi_1 = 0$. Puis aux étapes suivantes :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 = \frac{1}{2}x_1 \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{2}y_1 = \frac{1}{2}y_1 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \end{cases}$$

c'est-à-dire $\eta_{n+1} = \frac{1}{2}\eta_n$, qui était déjà valable pour $n = 0$.

Chapitre 3

Principe du maximum

Ce chapitre décrit l'application du principe du maximum à la commande optimale des processus déterministes continus. Ce principe qui date de 1956 est dû au mathématicien russe Pontryagin (ou Pontriaguine) et à ses élèves Boltianski et Gamkrelidzé.

L'approche classique établissant le principe du maximum est présentée ci-après en section 3.2. Nous présentons également au paragraphe 3.3 une approche moins orthodoxe, à partir de la méthode utilisée au chapitre précédent pour les systèmes discrets. Il n'y a aucune rigueur dans cette approche qui n'est présentée que pour mettre en relief les similitudes qu'il y a entre ces deux méthodes. Une approche plus rigoureuse, mais plus contraignante quant à ses hypothèses est présentée en section 3.7.

3.1 Problème type traité

Dans tout ce qui suit, l'état x est de dimension m et la commande u est de dimension l .

Processus continu :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Etat initial :

x_0 à l'instant initial t_0 libre ou contraint par r_0 relations :

$$h(x_0, t_0) = 0 \quad (3.1)$$

Etat final :

x_F à l'instant terminal t_F libre ou contraint par r_F relations :

$$l(x_F, t_F) = 0 \quad (3.2)$$

Contraintes instantanées :

$$\gamma(x, u, t) \leq 0$$

Critère à minimiser :

$$\hat{C}(x_0, t_0) = \min_{u(t), t \in [t_0, t_F]} \left\{ p(x_0, t_0) + s(x_F, t_F) + \int_{t_0}^{t_F} r(x, u, t) dt \right\}$$

3.2 Du principe de Bellman au principe du maximum

Nous présentons dans cette section l'approche classique établissant le principe du maximum.

3.2.1 L'équation d'Hamilton-Jacobi

On applique l'équation récurrente d'optimalité au processus discret obtenu par une approximation au premier ordre :

$$x(t+dt) = x(t) + f(x, u)dt$$

On définit pour cela le revenu optimal sur la portion de trajectoire (t, t_F) :

$$\hat{R}(x, t) = \min_{u(t), t \in [t, t_F]} \left\{ s(x_F, t_F) + \int_t^{t_F} r(x, u, t) dt \right\}$$

Supposons qu'on possède les revenus optimaux $\hat{R}[x(t+dt), t+dt]$ à l'instant $t+dt$ pour tous les $x(t+dt)$. Alors le principe de Bellman permet d'écrire l'équation récurrente :

$$\hat{R}[x(t), t] = \min_{u(t) | \gamma(x, u, t) \leq 0} \left\{ r(x, u, t) dt + \hat{R}[x(t+dt), t+dt] \right\}$$

Dans l'hypothèse où $\hat{R}[x(t), t]$ est **continue et dérivable**, on a au premier ordre :

$$\hat{R}[x(t+dt), t+dt] = \hat{R}[x(t), t] + \hat{R}_x^T \dot{x} dt + \hat{R}_t dt$$

qui reporté dans l'équation récurrente d'optimalité donne :

$$\hat{R}[x(t), t] = \min_{u(t) | \gamma(x, u, t) \leq 0} \left\{ r(x, u, t) dt + \hat{R}[x(t), t] + \hat{R}_x^T f(x, u) dt + \hat{R}_t dt \right\}$$

Soit en extrayant de l'optimisation les termes indépendants de u :

$$\hat{R}[x(t), t] = \hat{R}[x(t), t] + \hat{R}_t dt + \min_{u(t) | \gamma(x, u, t) \leq 0} \left\{ r(x, u, t) dt + \hat{R}_x^T f dt \right\}$$

D'où après simplification, l'équation aux dérivées partielles d'**Hamilton-Jacobi-Bellman** :

$$\hat{R}_t = - \min_{u(t) | \gamma(x, u, t) \leq 0} \left\{ r(x, u, t) + \hat{R}_x^T f \right\}$$

Pour prendre en compte les contraintes dans cette minimisation, on peut remplacer le revenu élémentaire r par le lagrangien :

$$\mathcal{L} = r + \mu^T \gamma(x, u, t)$$

avec $\hat{\mu}_i \gamma_i(\hat{x}, \hat{u}, t) = 0$ et $\hat{\mu}_i \geq 0$. D'où :

$$\hat{R}_t = - \min_{u, \mu > 0} \left\{ \mathcal{L} + \hat{R}_x^T f \right\}$$

Exemple extrêmement simple :

Considérons le système simple décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x} = u$$

que l'on désire amener d'un état initial quelconque x_0 donné à l'instant initial t_0 à l'état final $x_F = 0$ imposé à l'instant final t_F , tout en minimisant le critère :

$$C = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_F} u^2 dt$$

La résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi consiste à chercher une fonction $\hat{R}(x, t)$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = - \min_u \left\{ \frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} u \right\}$$

Or :

$$\frac{d}{du} \{ \} = 0 \rightarrow \hat{u} + \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} = 0 \rightarrow \hat{u} = - \frac{\partial \hat{R}}{\partial x}$$

D'où :

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right)^2$$

Finalement $\hat{R}(x, t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\left(\frac{\partial \hat{R}}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = 0$$

avec pour condition :

$$\hat{R}(0, t_F) = 0$$

Même dans ce cas extrêmement simple, on obtient une équation aux dérivées partielles que le commun des automaticiens ne sait pas intégrer.

3.2.2 Méthode de résolution

L'équation aux **dérivées partielles** d'Hamilton-Jacobi est assez difficile à manipuler. Si tous les termes sont continus et doublement différentiables, elle fournit la commande optimale \hat{u} en fonction de \hat{R} , x , t (où \hat{R} est doublement différencié). Dans le cas linéaire à critère quadratique, on arrive à obtenir une équation différentielle de Riccati en faisant l'hypothèse que \hat{R} est quadratique en x . Dans le cas général, l'introduction du vecteur adjoint ψ et du hamiltonien H permet de simplifier le problème en le ramenant à un système d'**équations différentielles classiques du premier ordre**.

Equations différentielles du premier ordre

On définit le **vecteur adjoint** ψ par :

$$\psi = -\hat{R}_x$$

le **hamiltonien** H par :

$$H = \psi^T f - \mathcal{L} = \psi^T f - r - \mu^T \gamma$$

L'**équation d'Hamilton-Jacobi** s'écrit alors :

$$\hat{R}_t = - \min_{u, \mu > 0} \{ -H \}$$

soit :

$$\hat{R}_t = \max_{u, \mu > 0} H$$

La commande optimale est donnée par :

$$\hat{u}(x, \psi, t) = \arg \max_{u, \mu > 0} H$$

La commande optimale maximise le hamiltonien.

— Remarque 1 : Il suffit de trouver ψ (c'est-à-dire $-\hat{R}_x$) pour avoir la commande et la trajectoire optimale. Il est inutile de poursuivre le calcul jusqu'à l'obtention de $\hat{R}(x, t)$.

— Remarque 2 : Il n'est pas obligatoire d'introduire le lagrangien avec les paramètres de Kuhn et Tucker. On définit alors H par $H = \psi^T f - r$ (la valeur optimale est identique avec celle précédemment définie). Mais il faut préciser dans l'équation d'Hamilton-Jacobi que u est contraint : $\hat{R}_t = \max_{u | \gamma \leq 0} H$ et $\hat{u}(x, \psi, t) = \arg \max_{u | \gamma \leq 0} H$

— Remarque 3 : Pour un problème **stationnaire à horizon libre** $\hat{R}[x(t), t] = \hat{R}(x)$. Il en résulte que $\hat{R}_t = 0$ ce qui implique que le hamiltonien optimal est constant et égal à zéro : $\hat{H} = 0$.

Equation différentielle du vecteur adjoint ψ

Dans le changement de variable effectué, on substitue ψ et H aux dérivées partielles de \hat{R} par rapport à x et t et on va considérer que H est une fonction des variables indépendantes ψ, x et t . Mais avant de pouvoir considérer que ψ est indépendant de x , il faut contraindre les dérivées $\dot{\psi}$ et \dot{H} à respecter les implications de l'équation d'Hamilton-Jacobi.

L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$\hat{R}_t = \max_u \{H\} = -\hat{R}_x^T f(x, \hat{u}) - r(x, \hat{u}, t) - \hat{\mu}^T \gamma(x, \hat{u}, t)$$

Sous l'hypothèse où R est doublement différentiable, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{R}_t = -\hat{R}_{xx}^T f(x, \hat{u}) - f_x^T(x, \hat{u}) \hat{R}_x - r_x(x, \hat{u}, t) - \gamma_x^T(x, \hat{u}, t) \hat{\mu} = \hat{R}_{xt}$$

Or :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{d}{dt} \hat{R}_x = -\hat{R}_{xx} \frac{dx}{dt} - \hat{R}_{xt} \\ &= -\hat{R}_{xx} f(x, \hat{u}) - \hat{R}_{xt} \end{aligned}$$

d'où :

$$\dot{\psi} = r_x(x, \hat{u}, t) + f_x^T(x, \hat{u}) \hat{R}_x + \gamma_x^T(x, \hat{u}, t) \hat{\mu}$$

soit :

$$\dot{\psi} = r_x(x, \hat{u}, t) - f_x^T(x, \hat{u}) \psi + \gamma_x^T(x, \hat{u}, t) \hat{\mu}$$

D'où l'équation d'évolution du système adjoint :

$$\dot{\psi} = -H_x(\hat{u}, x, \psi, t)$$

Par ailleurs :

$$\dot{H} = H_x^T \dot{x} + H_u^T \dot{u} + H_\psi^T \dot{\psi} + H_t$$

En prenant en compte le fait que $\dot{x} = f$, $H_{\hat{u}} = 0$ (stationnarité par rapport à \hat{u}), $H_\psi = f$ et $\dot{\psi} = -H_x(\hat{u}, x, \psi, t)$, il vient :

$$\frac{d}{dt} \hat{H} = -\dot{\psi}^T f + f_\psi^T \psi + H_t$$

soit :

$$\frac{d}{dt} \hat{H} = H_t$$

Remarque :

$$\dot{x} = f = H_\psi$$

permet de retrouver les équations d'état.

Exemple extrêmement simple :

Reprenons l'exemple extrêmement simple précédent. On a :

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \arg \max_u \left\{ \psi u - \frac{1}{2} u^2 \right\} \rightarrow \psi - \hat{u} = 0 \rightarrow \hat{u} = \psi \\ \dot{\psi} &= -H_x = 0 \rightarrow \psi = \psi_0 \rightarrow \hat{u} = \psi_0 \end{aligned}$$

D'où :

$$x = x_0 + \psi_0 (t - t_0) \rightarrow x_F = 0 = x_0 + \psi_0 (t_F - t_0) \rightarrow \psi_0 = -\frac{x_0}{t_F - t_0}$$

D'où la trajectoire optimale :

$$x = x_0 \frac{t_F - t}{t_F - t_0}$$

On peut en extraire :

$$x_0 = x \frac{t_F - t_0}{t_F - t}$$

qui permet d'exprimer la commande en boucle fermée¹ :

$$\psi_0 = -\frac{x}{t_F - t}$$

Calculons $\hat{R}(x, t)$:

$$R(x, t) = \frac{1}{2} \int_t^{t_F} u^2 dt$$

D'où :

$$\hat{R}(x, t) = \frac{1}{2} \int_t^{t_F} U^2 dt = \frac{U^2}{2} (t_F - t) = \frac{x^2}{2(t_F - t)}$$

On peut vérifier que $\hat{R}(x, t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles précédemment établie.

1. On obtient directement la commande en boucle fermée à partir de la commande initiale $u = -x_0 / (t_F - t_0)$ en remplaçant x_0 par x_{mes} et $t_F - t_0$ par $t_F - t$.

Cas stationnaire

En stationnaire le hamiltonien $H = \psi^T f - r - \mu^T \gamma$ ne dépend pas explicitement du temps ($f_t = 0$, $r_t = 0$, $\gamma_t = 0$). Il en résulte que $H_t = 0 = \frac{d}{dt} \hat{H}$, soit $\hat{H} = \text{constante}$. **En stationnaire, le maximum du hamiltonien est constant.**

Cas stationnaire à horizon libre

Lorsque l'horizon est libre le revenu optimal $R(\hat{x}, t)$ ne dépend pas de t : $R_t = 0$. L'équation d'Hamilton-Jacobi implique alors que $\hat{H} = 0$. **En stationnaire à horizon libre, le maximum du hamiltonien est nul.**

Résumé

Etant défini le scalaire

$$H = \psi^T f - r - \mu^T \gamma \quad (3.3)$$

la commande optimale \hat{u} et le paramètre optimal $\hat{\mu}$ sont calculés en fonction des variables indépendantes x , ψ et t :

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(x, \psi, t) &= \arg u \quad \left. \begin{array}{l} \max_{u, \hat{\mu}=0} H \\ \hat{\mu} = 0 \end{array} \right\} \text{ si } \gamma(x, \hat{u}, t) \leq 0 \\ \hat{u}(x, \psi, t) &= \arg u \quad \left. \begin{array}{l} \max_{u, \hat{\mu}>0} H \\ \hat{\mu}(x, \psi, t) = \arg \mu > 0 \end{array} \right\} \text{ sinon} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Les trajectoires optimales sont obtenues en intégrant les $2m$ équations différentielles du 1er ordre :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -H_x(\hat{\mu}, \hat{u}, x, \psi, t) \\ \dot{x} &= f(x, \hat{u}) = H_\psi(\hat{\mu}, \hat{u}, x, \psi, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.2.3 Conditions aux limites

Condition de transversalité à l'état initial

Compte tenu du critère initial $p(x_0, t_0)$ le critère global s'écrit :

$$C(x_0, t_0) = p(x_0, t_0) + R(x_0, t_0)$$

Si \hat{x}_0 et \hat{t}_0 sont optimaux, la stationnarité de $C(\hat{x}_0, \hat{t}_0)$ implique $C_{x_0} \delta x_0 + C_{t_0} \delta t_0 = 0$, soit :

$$(p_{x_0} + R_{x_0})^T \delta x_0 + (p_{t_0} + R_{t_0}) \delta t_0 = 0$$

D'où la condition de transversalité à l'instant initial :

$$(p_{x_0} - \psi_0)^T \delta x_0 + (p_{t_0} + \hat{H}_0) \delta t_0 = 0$$

Si les conditions initiales ne lient pas x_0 et t_0 , ce sont alors des variables indépendantes et la condition de transversalité se sépare en deux :

$$\begin{aligned} (p_{x_0} - \psi_0)^T \delta x_0 &= 0 \\ (p_{t_0} + \hat{H}_0) \delta t_0 &= 0 \end{aligned}$$

On a alors les cas suivants :

condition		variations		conséquence
t_0 donné	\rightarrow	$\delta t_0 = 0$	\rightarrow	\hat{H}_0 inconnu
t_0 libre	\rightarrow	$\delta t_0 = \text{qcq}$	\rightarrow	$\hat{H}_0 = -p_{t_0}$
x_0 donné	\rightarrow	$\delta x_0 = 0$	\rightarrow	ψ_0 inconnu
x_0 libre	\rightarrow	$\delta x_0 = \text{qcq}$	\rightarrow	$\psi_0 = p_{x_0}$
$h(x_0) = 0$	\rightarrow	$h_{x_0} \delta x_0 = 0$	\rightarrow	$\psi_0 = p_{x_0} + h_{x_0}^T \eta$

Expliquons le dernier cas. Si x_0 est partiellement contraints par $r_0 < m$ relations $h(x_0) = 0$, δx_0 est contraint par la relation :

$$h_{x_0} \delta x_0 = 0$$

Plus explicitement, δx_0 est assujéti à rester orthogonal à toutes les lignes de la matrice h_{x_0} . Par ailleurs, la condition de transversalité $(p_{x_0} - \psi_0)^T \delta x_0 = 0$ implique que le vecteur $(p_{x_0} - \psi_0)$ doit être orthogonal à δx_0 . Si le vecteur $(p_{x_0} - \psi_0)$ appartient au sous-espace engendré par les lignes h_{x_0} (toutes orthogonales à δx_0), il vérifiera la condition de transversalité. Il en résulte qu'il doit exister un vecteur η à r_0 composantes tel que :

$$\psi_0 - p_{x_0} = h_{x_0}^T \eta$$

ce qui explique la dernière ligne du tableau.

Si x_0 et t_0 sont liés et partiellement contraints par $r_0 < m + 1$ relations $h(x_0, t_0) = 0$, on considère la relation :

$$h_{x_0} \delta x_0 + h_{t_0} \delta t_0 = 0$$

Cette relation et la condition de transversalité s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} (p_{x_0} - \psi_0)^T & (p_{t_0} + \hat{H}_0) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta t_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_{x_0} & h_{t_0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta t_0 \end{pmatrix} = 0$$

Il en résulte qu'il existe un vecteur η à r_0 composantes tel que :

$$\begin{pmatrix} (p_{x_0} - \psi_0) \\ (p_{t_0} + \hat{H}_0) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{x_0}^T \\ h_{t_0}^T \end{bmatrix} \eta \quad (3.6)$$

En remarquant que \hat{H}_0 qui apparaît dans ces conditions de transversalité ne doit pas être considéré comme une inconnue car on dispose de son expression en fonction des autres inconnues à partir de la relation (3.3), on peut constater qu'on a toujours un déficit de m inconnues initiales dans l'ensemble $\{x_0, \psi_0, t_0\}$:

1. Pour x_0 et t_0 non liés :

- si t_0 est libre inconnu, on a une équation supplémentaire $\hat{H}_0 = -p_{t_0}$ qui équilibre le décompte inconnues - équations,
- si t_0 est imposé, on n'a pas cette équation supplémentaire,
- si les m x_0 sont donnés, il subsiste les m inconnues ψ_0 ,
- si les m x_0 sont libres inconnus, les m ψ_0 sont tous nuls (connus) et il subsiste les m inconnues x_0
- si les m x_0 sont liés par les r_0 relations $h(x_0) = 0$, aux $2m + r_0$ inconnues x_0 , ψ_0 et η correspondent les $m + r_0$ équations $\psi_0 - p_{x_0} = h_{x_0}^T \eta$ et $h(x_0) = 0$, soit un déficit de m inconnues.

2. Pour x_0 et t_0 liés par les r_0 relations $h(x_0, t_0) = 0$, aux $2m + 1 + r_0$ inconnues x_0 , ψ_0 , t_0 et η correspondent les $m + 1 + r_0$ équations $\psi_0 - p_{x_0} = h_{x_0}^T \eta$, $p_{t_0} + \hat{H}_0 = h_{t_0}^T \eta$ et $h(x_0, t_0) = 0$, soit un déficit de m inconnues.

Condition de transversalité à l'état terminal

A l'instant terminal :

$$\hat{R}(x_F, t_F) = s(x_F, t_F)$$

D'où en différenciant $s(x_F, t_F) - \hat{R}(x_F, t_F) = 0^2$:

$$(s_{x_F} - \hat{R}_{x_F})^T \delta x_F + (s_{t_F} - \hat{R}_{t_F}) \delta t_F = 0$$

Or $-\hat{R}_{x_F} = \psi_F$ et $\hat{R}_{t_F} = \hat{H}_F$, d'où la condition de transversalité à l'instant terminal :

$$(s_{x_F} + \psi_F)^T \delta x_F + (s_{t_F} - \hat{H}_F) \delta t_F = 0$$

Si les conditions initiales ne lient pas x_F et t_F , ce sont alors des variables indépendantes et la condition de transversalité se sépare en deux :

$$\begin{aligned} (s_{x_F} + \psi_F)^T \delta x_F &= 0 \\ (s_{t_F} - \hat{H}_F) \delta t_F &= 0 \end{aligned}$$

On a alors les cas suivants :

condition	variations	conséquence
t_F donné	$\delta t_F = 0$	\hat{H}_F inconnu
t_F libre	$\delta t_F = \text{qcq}$	$\hat{H}_F = s_{t_F}$
x_F donné	$\delta x_F = 0$	ψ_F inconnu
x_F libre	$\delta x_F = \text{qcq}$	$\psi_F = -s_{x_F}$
$l(x_F) = 0$	$l_{x_F} \delta x_F = 0$	$\psi_F = -s_{x_F} + l_{x_F}^T \xi$

Si x_F et t_F sont liés et partiellement contraints par $r_F < m + 1$ relations $l(x_F, t_F) = 0$, on considère la relation :

$$l_{x_F} \delta x_F + l_{t_F} \delta t_F = 0$$

Il en résulte, comme précédemment, qu'il existe un vecteur ξ à r_F composantes tel que :

$$\begin{pmatrix} (s_{x_F} + \psi_F) \\ (s_{t_F} - \hat{H}_F) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x_F}^T \\ l_{t_F}^T \end{bmatrix} \xi \quad (3.7)$$

Remarque : Ici aussi, on constate un déficit de m inconnues terminales dans l'ensemble $\{x_F, \psi_F, t_F\}$

Exemple : On impose au point terminal d'être sur le cercle de rayon R . On souhaite de plus qu'il soit dans le voisinage du plan $z = 0$, ce qui correspond à minimiser z_F^2 .

$$l(x_F, y_F, z_F) = x_F^2 + y_F^2 + z_F^2 - R^2 = 0 \rightarrow x_F \delta x_F + y_F \delta y_F + z_F \delta z_F = 0 \quad (3.8)$$

$$s(x_F, y_F, z_F) = z_F^2 \rightarrow \psi_1(t_F) \delta x_F + \psi_2(t_F) \delta y_F + (2z_F + \psi_3(t_F)) \delta z_F = 0 \quad (3.9)$$

2. A partir de cette équation, on voit que les conditions terminales et initiales s'obtiennent les unes en fonction des autres en remplaçant l'indice 0 par l'indice F et les revenus $\pm p$ par les revenus $\mp s$.

(3.8) implique que les seuls $\begin{pmatrix} \delta x_F \\ \delta y_F \\ \delta z_F \end{pmatrix}$ autorisés sont dans le plan orthogonal à $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix}$. (3.9) implique que $\begin{pmatrix} \psi_1(t_F) \\ \psi_2(t_F) \\ 2z_F + \psi_3(t_F) \end{pmatrix}$ est orthogonal à tous les $\begin{pmatrix} \delta x_F \\ \delta y_F \\ \delta z_F \end{pmatrix}$ possibles, donc parallèle à $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix}$.
D'où :

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_F) = \xi x_F \\ \psi_2(t_F) = \xi y_F \\ 2z_F + \psi_3(t_F) = \xi z_F \end{pmatrix}$$

En éliminant ξ on trouve deux équations qui avec $x_F^2 + y_F^2 + z_F^2 = R^2$ fournissent les 3 équations relatives à l'état initial.

3.3 De la PNL au principe du maximum

Nous présentons dans cette section comment la plupart des équations du principe du maximum peuvent s'obtenir à partir de la résolution du problème discret par la PNL, en passant à la limite quand la période d'échantillonnage tend vers zéro. Cette présentation n'a rien d'une démonstration. Elle sert uniquement à montrer la correspondance que l'on peut établir entre les deux approches, et ainsi de mieux cerner le rôle des différents paramètres.

Nous donnons au problème de Bolza la formulation suivante :

Processus continu :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

Trouver les trajectoires qui minimisent le critère :

$$J = s(x_0, t_0, x_F, t_F) + \int_{t_0}^{t_F} r(x, u, t) dt$$

tout en respectant les contraintes égalités suivantes :

$$e(x_0, t_0, x_F, t_F) = 0 \quad (3.10)$$

et les contraintes inégalités suivantes :

$$\gamma(x, u, t) \leq 0$$

Par rapport à la formulation précédente, nous avons regroupé les contraintes égalités initiales $h(x_0, t_0) = 0$ et finales $l(x_F, t_F) = 0$ en un seul système $e(x_0, t_0, x_F, t_F) = 0$ et les critères initiaux et terminaux $p(x_0, t_0)$ et $s(x_F, t_F)$ et un seul terme $s(x_0, t_0, x_F, t_F)$.

3.3.1 Discrétisation du problème

Procédons à une discrétisation de ces équations en N intervalles de temps de largeur Δt :

$$t_k = t_0 + k \frac{t_F - t_0}{N} \rightarrow \begin{cases} t_0 = t_0 \\ t_N = t_F \end{cases}$$

Posons :

$$\begin{aligned}x_k &= x(t_k) \\u_k &= u(t_k) \\f_k &= f(x_k, u_k, t_k) \\r_k &= r(x_k, u_k, t_k) \\\gamma_k &= \gamma(x_k, u_k, t_k)\end{aligned}$$

Il vient :

$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x(t), u(t), t) dt \triangleq h_k(x_k, u_k) \text{ pour } k = 0 \text{ à } N-1$$

La dernière relation définit $h_k(x_k, u_k)$. On a par exemple l'approximation :

$$h_k(x_k, u_k) \simeq x_k + \frac{\Delta t}{2} (f_k + f_{k+1})$$

En ce qui concerne le critère, on a l'approximation :

$$J \simeq s(x_0, t_0, x_F, t_F) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta t}{2} (r_k + r_{k+1}) \simeq \sum_{k=0}^N c_k$$

avec :

$$\begin{aligned}c_0 + c_N &= s(x_0, t_0, x_F, t_F) + \frac{\Delta t}{2} (r_0 + r_N) \\c_k &= r_k \Delta t \text{ pour } k = 1 \text{ à } N-1\end{aligned}$$

3.3.2 Equations d'optimalité par la PNL

Considérons les associations suivantes de paramètres de Lagrange (égalités) ou de Karush-Kuhn-Tucker (inégalités) :

$$\begin{aligned}\{\psi_k\}_0^{N-1} &\longleftrightarrow x_{k+1} = h_k(x_k, u_k) \quad k = 0 \text{ à } N-1 \\\{\mu_k\}_0^N &\longleftrightarrow \Delta t \gamma_k \leq 0 \quad k = 0 \text{ à } N \\v &\longleftrightarrow e(x_0, t_0, x_N, t_N)\end{aligned}$$

avec les conditions supplémentaires suivantes pour toutes les composantes des paramètres de Karush-Kuhn-Tucker :

$$\begin{aligned}\mu_k^i \gamma_k^i &= 0 \text{ et } \mu_k^i \geq 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } \dim(\gamma_k) \\v^i e^i &= 0 \text{ et } v^i \geq 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } \dim(e)\end{aligned}$$

Remarque : Ces conditions impliquent $\mu_k^T \gamma_k = 0$ et $v^T e = 0$.

Ecrivons le Lagrangien de ce système. Il vient :

$$L = \sum_{k=0}^N c_k + \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k^T \left(x_{k+1} - x_k - \frac{\Delta t}{2} (f_k + f_{k+1}) \right) + \Delta t \sum_{k=0}^N \mu_k^T \gamma_k + v^T e(x_0, t_0, x_N, t_N)$$

Développons la relation $\frac{\partial L}{\partial u_k} = 0$. Il vient :

— pour $k = 0$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial r_0}{\partial u_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_0} \right)^T \psi_0 + \left(\frac{\partial \gamma_0}{\partial u_0} \right)^T \mu_0 = 0 \quad (3.11)$$

— pour $k = 1$ à $N - 1$:

$$\frac{\partial r_k}{\partial u_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_k} \right)^T (\psi_{k-1} + \psi_k) + \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial u_k} \right)^T \mu_k = 0 \quad (3.12)$$

— pour $k = N$:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial r_N}{\partial u_N} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_N}{\partial u_N} \right)^T \psi_{N-1} + \left(\frac{\partial \gamma_N}{\partial u_N} \right)^T \mu_N = 0 \quad (3.13)$$

ou toutes les expressions ont été divisées par Δt .

Développons la relation $\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0$. Il vient :

— pour $k = 0$:

$$-\psi_0 + \frac{\partial s}{\partial x_0} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial r_0}{\partial x_0} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_0} \right)^T \psi_0 + \Delta t \left(\frac{\partial \gamma_0}{\partial x_0} \right)^T \mu_0 + \left(\frac{\partial e}{\partial x_0} \right)^T v = 0 \quad (3.14)$$

— pour $k = 1$ à $N - 1$:

$$-\psi_k + \psi_{k-1} + \Delta t \frac{\partial r_k}{\partial x_k} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right)^T (\psi_{k-1} + \psi_k) + \Delta t \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_k} \right)^T \mu_k = 0 \quad (3.15)$$

— pour $k = N$:

$$\psi_N + \frac{\partial s}{\partial x_N} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial r_N}{\partial x_N} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f_N}{\partial x_N} \right)^T \psi_{N-1} + \Delta t \left(\frac{\partial \gamma_N}{\partial x_N} \right)^T \mu_N + \left(\frac{\partial e}{\partial x_N} \right)^T v = 0 \quad (3.16)$$

3.3.3 Retour au continu

La relation (3.15) permet d'écrire :

$$\frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\Delta t} = \frac{\partial r_k}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \right)^T \left(\frac{\psi_{k-1} + \psi_k}{2} \right) + \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_k} \right)^T \mu_k$$

En faisant tendre $\Delta t \rightarrow 0$, on introduit deux trajectoires $\psi(t)$ et $\mu(t)$ telles que :

$$\psi_k = \psi(t_k) \text{ pour } k = 0 \text{ à } N - 1$$

$$\mu_k = \mu(t_k) \text{ pour } k = 1 \text{ à } N - 1$$

qui doivent vérifier la relation :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial}{\partial x} (r - \lambda^T f + \mu^T \gamma) \text{ pour } t \in [t_1, t_{N-1}] \quad (3.17)$$

Posons :

$$H = \lambda^T f - r - \mu^T \gamma$$

La relation précédente s'écrit :

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \text{ pour } t \in [t_1, t_{N-1}] \quad (3.18)$$

(on retrouve l'équation différentielle du système adjoint).

Pour $\Delta t \rightarrow 0$, la relation (3.12) implique :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \text{ pour } t \in [t_1, t_{N-1}] \quad (3.19)$$

(on retrouve que la commande optimale est obtenue pour un extremum de H).

Pour $t = t_0$ et $\Delta t \rightarrow 0$, la relation (3.14) implique :

$$\psi(t_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} (s + v^T e)$$

et pour $t = t_N$ et $\Delta t \rightarrow 0$, la relation (3.14) implique :

$$\psi(t_F) = -\frac{\partial}{\partial x_F} (s + v^T e)$$

(on retrouve les équations de transversalité).

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ l'intervalle $\in [t_1, t_{N-1}]$ tend vers l'intervalle $t \in (t_0, t_F)$ bornes non comprises. L'équation (3.17) n'est pas spécifiée aux bornes de l'intervalle, mais conserve la même structure où les quantités $\mu(t_0)$ et $\mu(t_F)$ doivent être associées respectivement à $2\mu_0$ et $2\mu_N$. Si aucune contrainte n'est saturée aux extrémités, cela ne pose aucun problème. Par contre si au moins une des contraintes γ est saturée à une des extrémités, la composante correspondante du paramètre de KKT μ_0 ou μ_N sera non nulle, ce qui pose un problème local de définition de ψ . Mais cette indétermination étant de durée nulle, elle n'aura de conséquences que si la composante correspondante du paramètre de KKT μ_0 ou μ_N est infini. Il semble donc que l'on puisse considérer les deux équations 3.18 et 3.19 sur tout l'intervalle $t \in [t_0, t_F]$.

3.4 Problèmes de mise en oeuvre

3.4.1 Le problème aux deux bouts

Si les expressions (3.4) permettent de calculer les commandes optimales en fonction de x , ψ et t , et si on sait intégrer les équations différentielles (3.5) qui en résultent, on est en présence d'un problème aux deux bouts car les contraintes initiales pour une intégration dans le sens direct (respectivement terminales pour une intégration dans le sens rétrograde) ne permettent pas de fixer toutes les inconnues à l'instant initial (respectivement terminal). On est donc amené à intégrer dans le sens direct ou rétrograde en fonction de paramètres inconnus. Les conditions de transversalité lient les $4m + 2$ inconnues :

$$t_0, x_0, \psi_0, x_F, \psi_F, t_F$$

avec un déficit de $2m$ équations qui sont apportées par les $2m$ équations qui résultent de l'intégration.

En comptant les $r_0 + r_F$ inconnues η et ξ , on a un total de $4m + 2 + r_0 + r_F$ inconnues $t_0, x_0, \psi_0, x_F, \psi_F, t_F, \eta$ et ξ auxquelles correspondent les $4m + 2 + r_0 + r_F$ équations constituées par :

- les $2m$ équations résultant de l'intégration,
- les $2m + 2$ conditions de transversalité initiales (3.6) et finales (3.7),
- les $r_0 + r_F$ contraintes initiales et finales (3.1) et (3.2).

3.4.2 Prise en compte des contraintes intégrales

Considérons une contrainte intégrale du type :

$$\int_{t_0}^{t_F} g(x, u, t) dt \leq E$$

(énergie disponible limitée par exemple). En posant :

$$y(t) = - \int_0^t g(x, u, \tau) d\tau$$

la contrainte devient :

$$y_0 - y_F \leq E$$

On peut donc remplacer la contrainte intégrale en ajoutant y au vecteur d'état avec :

$$\dot{y} = -g$$

et les conditions aux limites :

$$y_0 = E$$

$$y_F \geq 0$$

avec pour nouvelle équation d'état :

$$\frac{d}{dt} X = \begin{pmatrix} f(x, u, t) \\ -g(x, u, t) \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La suite de l'optimisation peut se faire de manière classique, en appliquant la méthodologie du principe du maximum. Toutefois, on montre dans ce qui suit que λ se comporte comme un paramètre de Kuhn et Tucker associé à la contrainte intégrale inégalité, ce qui permet de traiter le problème sans introduire de composante supplémentaire au vecteur d'état. On peut sauter ces développements assez laborieux et se rendre directement au résumé.

Le hamiltonien s'écrit :

$$H = \psi^T f - \lambda^T g - \mathcal{L}$$

où ψ est la partie du vecteur adjoint relative à x et λ la partie du vecteur adjoint relative à y .

Le système adjoint s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_x \\ -H_y \end{pmatrix}$$

or $H_y = 0$ (y n'apparaît pas dans H), d'où :

$$\lambda = \text{cte}$$

Condition de transversalité initiale : y_0 est donné, λ_0 n'est pas contraint.

Condition de transversalité finale :

La contrainte terminale $y_F \geq 0$ est traitée par le terme $\mu_F^T (-y_F)$ qui figure dans \mathcal{L} . Deux cas sont à considérer : Soit on impose $\mu_F = 0$ (on ignore la contrainte a priori, et on vérifie son respect a posteriori), soit on impose $y_F = 0$ et on vérifie a posteriori que μ_F est ≥ 0 .

1er cas ($\mu_F = 0$) y_F est libre, $-\lambda_F = s_{y_F} = 0$ car il n'y a pas de y (état fictif supplémentaire) dans le critère original. La maximisation de H fournit une commande optimale. Il faudra vérifier que la valeur atteinte par y_F est positive.

2ème cas ($y_F = 0$) λ_F n'est pas contraint. La constante λ est inconnue. La commande optimale qui maximise H est fonction de λ :

$$\hat{u} = u(x, \psi, \lambda, t)$$

Pour éliminer λ il faudra utiliser la relation $y_F = 0$.

Condition sur le signe de λ

On utilise le fait que par définition $\lambda(t) = -\frac{\partial \hat{R}(x,y,t)}{\partial y}$ et que $\hat{C} = \hat{R}(x_0, y_0, t_0)$. λ étant indépendant de t , il en résulte que $\lambda = -\left[\frac{\partial \hat{C}}{\partial y_0}\right]$.

Pour que la solution avec contrainte soit optimale, il faut qu'une variation de y_F à partir de $y_F = 0$ vers l'intérieur de la contrainte $y_F \geq 0$ produise une augmentation du critère le critère. Autrement dit, il y a solution optimale si un $\delta y_F > 0$ implique un $\delta C > 0$.

Or résoudre le problème avec $y_0 = E$ et $y_F = 0$ imposés et considérer $\delta y_0 = 0$ et $\delta y_F > 0$ est équivalent à résoudre le problème avec $y_0 = E$ et $y_F = 0$ imposés et considérer $\delta y_0 < 0$ et $\delta y_F = 0$ car seule la différence $y_0 - y_F$ est significative dans le problème. Cette solution sera optimale si $\delta y_0 < 0 \rightarrow \delta C > 0$ ce qui implique :

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial y_0} < 0 \rightarrow \lambda > 0.$$

On a donc pour λ l'équivalent d'une condition de Kuhn et Tucker. Dans le cas de plusieurs contraintes, pour les composantes de la contrainte $\int_{t_0}^{t_F} g(x, u, t) dt - E \leq 0$ saturées à 0, les λ_i doivent être positifs (ce qui n'empêche pas de vérifier que le \hat{u} trouvé en fonction de λ maximise bien H).

Résumé :

Il résulte de ces considérations que les contraintes :

$$\int_{t_0}^{t_F} g(x, u, t) dt - E \leq 0$$

peuvent être traité avec l'équivalent de paramètres de Kuhn et Tucker sous la forme $\lambda^T g(x, u, t)$ ajouté au lagrangien \mathcal{L} ou retranché au hamiltonien H . Dans tous les cas :

$$H = \psi^T f - r - \mu^T \gamma - \lambda^T g$$

Pour chaque λ_i deux cas sont à considérer. Soit on prend $\lambda_i = 0$ et on vérifie a posteriori la satisfaction de la composante correspondante de la contrainte. Soit on sature cette composante a priori, et la constante inconnue λ_i calculée a posteriori doit être positive.

Exemple simple :

On désire amener le système $\dot{x} = u$ du point de départ $x_0 = 0$ pour $t = 0$ au point d'arrivée x_F le plus grand possible pour $t = T$ tout en respectant la contrainte $\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt \leq E$.

1 - Traitement avec état supplémentaire :

$$\text{Système } \begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}u^2 \end{cases}$$

$$\text{Etat initial : } \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = E \end{cases} \text{ donné. Etat final : } \begin{cases} x_F \text{ libre à maximiser} \rightarrow s(x_F) = -x_F \\ y_F \text{ libre, mais contraint } y_F \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Hamiltonien : } H = \psi_1 u - \frac{1}{2} \psi_2 u^2 - \mu_F (-y_F)$$

$$H_u = 0 \rightarrow \psi_1 - \psi_2 \hat{u} = 0 \rightarrow \hat{u} = \psi_1 / \psi_2 ; H_{uu} = -\psi_2 < 0 \text{ pour un maximum} \rightarrow \psi_2 > 0$$

$$\dot{\psi}_1 = -H_x = 0 \rightarrow \psi_1 = cte ; \dot{\psi}_2 = -H_y = 0 \rightarrow \psi_2 = cte \rightarrow \hat{u} = cte.$$

$$x_0 \text{ imposé} \rightarrow \psi_{10} \text{ indéfini. } x_F \text{ libre} \rightarrow \psi_{1F} = -s_{x_F} = 1 \rightarrow \psi_1 = 1. \rightarrow \hat{u} = 1/\psi_2$$

$$y_0 = E \text{ imposé} \rightarrow \psi_{20} \text{ indéfini.}$$

a) $\mu_F = 0$: on libère la contrainte. y_F libre $\rightarrow \psi_{2F} = -s_{y_F} = 0 \rightarrow \psi_2 = 0. \rightarrow \hat{u} = +\infty$ (+ pour que $x_F \nearrow$). Dans ce cas $y_F \rightarrow -\infty$. La contrainte $y_F \geq 0$ n'est pas respectée.

b) On impose $y_F = 0 \rightarrow \psi_{2F}$ libre. ψ_2 est inconnu. Mais $0 = y_F = E - \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{1}{\psi_2}\right)^2 dt = E - \frac{T}{2\psi_2^2}$.
D'où $\psi_2^2 = \frac{T}{2E}$.

$\psi_2 > 0$ impose $\psi_2 = +\sqrt{\frac{T}{2E}}$, d'où $x_F = uT = \sqrt{2ET}$.

2 - Traitement avec paramètre de Kuhn et Tucker :

Système $\dot{x} = u$

Etat initial : $x_0 = 0$ donné. Etat final : x_F libre à maximiser : $s(x_F) = -x_F$

Hamiltonien : $H = \psi u - \lambda \left(\frac{1}{2}u^2\right)$

$H_u = 0 \rightarrow \psi - \lambda \hat{u} = 0 \rightarrow \hat{u} = \psi/\lambda$; $H_{uu} = -\lambda < 0$ pour un maximum $\rightarrow \lambda > 0$

$\dot{\psi} = -H_x = 0 \rightarrow \psi = cte$; $\hat{u} = cte$.

x_0 imposé $\rightarrow \psi_0$ indéfini. x_F libre $\rightarrow \psi_F = -s_{x_F} = 1 \rightarrow \psi = 1$. $\rightarrow \hat{u} = 1/\lambda$

a) $\lambda = 0$ (sans contrainte) $\rightarrow \hat{u} = +\infty$ (+ pour que $x_F \nearrow$). Dans ce cas $\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt \rightarrow \infty$. La contrainte $\leq E$ n'est pas respectée.

b) On impose $\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt = E = \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 dt \rightarrow \lambda^2 = \frac{T}{2E}$.

$\lambda > 0$ impose $\lambda = +\sqrt{\frac{T}{2E}}$, d'où $x_F = uT = \sqrt{2ET}$. Le paramètre de Kuhn et Tucker est positif, c'est bien un max.

Conclusion sur l'exemple : Le traitement direct avec paramètre de Kuhn et Tucker λ est légèrement plus simple. Pour se persuader du bien fondé de la règle énoncée sur le signe de ψ_2 ou λ on peut vérifier, dans le premier cas, que si on impose une valeur $y_F = \varepsilon$ légèrement positive (à l'intérieur de la contrainte), on obtient $\psi_2 = +\sqrt{\frac{T}{2(E-\varepsilon)}}$ d'où $x_F = \sqrt{2(E-\varepsilon)T}$ a une valeur terminale moins bonne que quand la contrainte est saturée. On fait la même constatation dans le deuxième cas, en imposant $\frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt = E - \varepsilon$.

3.4.3 Trajectoires singulières

La maximisation du hamiltonien peut conduire à une indétermination dans certains cas particuliers. Considérons le cas où $H(x, \psi, u, t)$ est continu et dérivable par rapport à la composante u_i . Le maximum de H par rapport à u_i est donné pour $H_{u_i} = 0$. Mais si dans un certain domaine de x , ψ et t , $H_{u_i} = cte = 0$ indépendamment de u_i cette équation ne permet plus de calculer \hat{u}_i .

Si H_{u_i} ne fait que passer par la valeur 0, l'indétermination de \hat{u}_i qui est de durée nulle, est sans importance. Par contre si $\frac{d^n}{dt^n} H_{u_i} = 0$ pour tout $n \geq 0$, l'indétermination de \hat{u}_i dure un certain intervalle de temps. On est en présence d'une situation singulière dont la résolution conduit à des trajectoires optimales singulières.

3.4.4 Vérification de l'optimalité

Les conditions d'optimalité données par le principe du maximum ne sont que des conditions nécessaires du premier ordre. On doit souvent **comparer différentes solutions** pour choisir la meilleure dont l'**optimalité est vérifiée a posteriori**.

3.5 Systèmes linéaires avec critère quadratique

Ce cas particulier est résoluble. La commande obtenue est linéaire en x .

3.5.1 Exemple introductif

Considérons le système continu du premier ordre :

$$\dot{x} = u$$

que l'on doit amener de son état initial $x_0 \neq 0$ à l'état final $x(T) = 0$, tout en minimisant le critère :

$$\min \frac{1}{2} \int_0^T \left(x^2 + \frac{1}{\alpha^2} u^2 \right) dt$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$H = \psi u - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2\alpha^2} u^2$$

D'où :

$$\dot{\psi} = -H_x = x$$

$$0 = H_u \rightarrow \psi - \frac{1}{\alpha^2} \hat{u} = 0 \rightarrow \hat{u} = \alpha^2 \psi$$

Soit :

$$\ddot{\psi} = \dot{x} = u = \alpha^2 \psi \rightarrow \ddot{\psi} - \alpha^2 \psi = 0$$

D'où :

$$\begin{aligned} \psi &= A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t} \\ x &= \dot{\psi} = \alpha (A e^{\alpha t} - B e^{-\alpha t}) \end{aligned}$$

Conditions de transversalité :

x_0 est donné $\rightarrow \psi_0$ est libre.

$x(T) = 0$ est donné $\rightarrow \psi(T)$ est libre.

$$\begin{cases} x_0 = \alpha (A - B) \\ x(T) = 0 = \alpha (A e^{\alpha T} - B e^{-\alpha T}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{x_0}{\alpha (1 - e^{2\alpha T})} \\ B = \frac{x_0 e^{2\alpha T}}{\alpha (1 - e^{2\alpha T})} \end{cases}$$

$$\psi = \frac{x_0}{\alpha (1 - e^{2\alpha T})} (e^{\alpha t} + e^{\alpha(2T-t)})$$

$$\hat{u}_{BO}(t) = \frac{\alpha x_0}{(1 - e^{2\alpha T})} (e^{\alpha t} + e^{\alpha(2T-t)})$$

$$\hat{u}_0 = \frac{\alpha x_0}{(1 - e^{2\alpha T})} (1 + e^{2\alpha T}) = -\alpha x_0 \coth(\alpha T) \text{ d'où :}$$

$$\hat{u}_{BF} = -\alpha x \coth(\alpha (T - t))$$

Remarque 1 : Dans ce cas simple, on peut retrouver ce résultat en éliminant x_0 de l'expression de $\hat{u}_{BO}(t)$ en le tirant de $x(t) = \frac{x_0}{1 - e^{2\alpha T}} (e^{\alpha t} - e^{\alpha(2T-t)})$.

Remarque 2 : Calculons la valeur de \hat{H} . On trouve :

$$H = \psi u - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2\alpha^2} u^2$$

$$\hat{H} = \alpha^2 \psi^2 - \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2\alpha^2} \alpha^4 \psi^2 = \frac{1}{2} (\alpha^2 \psi^2 - \dot{\psi}^2) = 4\alpha^2 AB$$

On retrouve bien que le maximum de H est constant pour les systèmes stationnaires.

Variantes sur les contraintes finales

Cas 1 : $x(T)$ donné à horizon fixé T :

Nous venons de traiter ce cas. La commande obtenue est linéaire mais non stationnaire en x . Remarquons que le gain tend vers l'infini quand T tend vers l'infini.

Cas 2 : $x(T)$ libre à horizon fixé T :

Comme x^2 figure dans le critère, on espère que la commande optimale amènera x au voisinage de 0.

La condition de transversalité terminale est maintenant $\psi(T) = 0$ (à la place de $x(T) = 0$). Les deux équations qui permettent de calculer A et B sont :

$$\begin{cases} x_0 = \alpha(A - B) \\ \psi(T) = 0 = Ae^{\alpha T} - Be^{-\alpha T} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{x_0}{\alpha(1 + e^{2\alpha T})} \\ B = \frac{-x_0 e^{2\alpha T}}{\alpha(1 + e^{2\alpha T})} \end{cases}, \text{ d'où :}$$

$$\psi = \frac{x_0}{\alpha(1 + e^{2\alpha T})} (e^{\alpha t} - e^{\alpha(2T-t)})$$

$$\hat{u}_0 = -\alpha x_0 \tanh(\alpha T) \text{ d'où :}$$

$$\hat{u}_{BF} = -\alpha x \tanh(\alpha(T-t))$$

Cas 3 : horizon T non fixé :

3.1) Si on impose $x(T) = 0$, la résolution est identique à celle du cas 1, mais avec T inconnu, d'où :

$$\hat{u}_{BF} = -\alpha x \coth(\alpha(T-t))$$

La condition de transversalité finale relative au temps impose $\hat{H}(T) = s_t = 0$, d'où :

$$\hat{H} = 4\alpha^2 AB = \frac{4x_0^2 e^{2\alpha T}}{(1 - e^{2\alpha T})^2} = 0$$

Il en résulte que T doit être infini. D'où $\hat{u}_{BF} = -\alpha x$. On remarquera que :

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

3.2) Si on laisse $x(T)$ libre, la résolution est identique à celle du cas 2, mais avec T inconnu, d'où :

$$\hat{u}_{BF} = -\alpha x \tanh(\alpha(T-t))$$

La condition de transversalité finale relative au temps impose :

$$\hat{H} = 4\alpha^2 AB = \frac{-4x_0^2 e^{2\alpha T}}{(1 + e^{2\alpha T})^2} = 0$$

Il en résulte que T doit être infini. D'où ici aussi que $\hat{u}_{BF} = -\alpha x$.

3.5.2 Problème type

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ s = Cx \end{cases}$$

critère : $\min \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_F} (\varepsilon^T Q \varepsilon + u^T R u) dt + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t_F) S \varepsilon(t_F)$

avec $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ où $e(t)$ est une entrée donnée :

— $e(t) = 0$ dans le cas d'une régulation

— $e(t) \neq 0$ dans le cas d'une poursuite.

R est symétrique définie positive et Q et S sont symétriques non négatives.

3.5.3 Principe de résolution

$$\text{Hamiltonien : } H = \psi^T (Ax + Bu) - \frac{1}{2} \left\{ (e - Cx)^T Q (e - Cx) + u^T R u \right\}$$

$$\text{Commande optimale : } H_u = B^T \psi - Ru = 0 \rightarrow \hat{u} = R^{-1} B^T \psi$$

$$H_{uu} = -R \rightarrow \text{maximum.}$$

$$\text{Système adjoint : } \dot{\psi} = -H_x = -A^T \psi - C^T Q (e - Cx)$$

$$\text{Equations d'état : } \dot{x} = Ax + BR^{-1} B^T \psi$$

Posons :

$$R_1 = BR^{-1} B^T$$

$$Q_1 = C^T Q C$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + R_1 \psi \\ \dot{\psi} &= Q_1 x - A^T \psi - C^T Q e \end{aligned} \quad (3.20)$$

Conditions aux limites :

x_0 et t_0 donnés.

$$\psi_F = -s_{x_F} = -C^T S C x_F + C^T S e_F$$

Posons :

$$S_F = C^T S C$$

Il vient :

$$\psi_F = -S_F x_F + C^T S e_F \quad (3.21)$$

Problème de régulation

Traisons le cas $e(t) = 0$. Le système (3.20) est linéaire. Si on l'intègre à partir de t , $x(t)$, $\psi(t)$ jusqu'à t_F , $x_F = x(t_F)$, $\psi_F = \psi(t_F)$, il vient :

$$\begin{pmatrix} x_F \\ \psi_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

où les fonctions ϕ sont plus directement des fonctions de $t_F - t$.

En utilisant (3.21) il vient :

$$\phi_{21}(t) x(t) + \phi_{22}(t) \psi(t) = -S_F [\phi_{11}(t) x(t) + \phi_{12}(t) \psi(t)]$$

D'où :

$$\psi(t) = P(t) x(t) \quad (3.22)$$

avec :

$$P(t) = -[\phi_{22}(t) + S_F \phi_{12}(t)]^{-1} [S_F \phi_{11}(t) + \phi_{21}(t)]$$

et :

$$\hat{u}(t) = R^{-1} B^T P(t) x(t)$$

est directement une commande boucle fermée, linéaire.

Calcul de $P(t)$. En dérivant (3.22) il vient :

$$\psi = P\dot{x} + \dot{P}x$$

Soit :

$$Q_1x - A^T Px = P(A + R_1P)x + \dot{P}x$$

Qui étant vrai $\forall x$ implique :

$$\dot{P} + PA + A^T P + PR_1P - Q_1 = 0$$

Cette équation de Riccati est initialisée compte tenu de $\psi_F = -S_F x_F$, c'est-à-dire avec :

$$P_F = -S_F$$

et on l'intègre à rebours.

Remarques :

- 1) P est symétrique. Il n'y aura que $n(n+1)/2$ équations à intégrer.
- 2) P est définie négative. En effet, par définition $\psi = -\hat{R}_x$, d'où $\hat{R}_x = -Px$ implique $\hat{R} = -\frac{1}{2}x^T Px +$ cte. Or $\hat{R} = 0$ pour $x = 0$, la cte est nulle et comme $\hat{R}(x) > 0$ si $x \neq 0$, P est définie négative.

Cas stationnaire à horizon libre

$$\hat{R}_t = 0 \rightarrow \frac{1}{2}x^T \dot{P}x = 0 \rightarrow$$

$$P = \text{cte}$$

Le gain de la commande est fixe. La matrice P est donnée par le régime permanent de l'équation de Riccati.

Problème de poursuite

L'entrée $e(t)$ est quelconque. Comme $\psi_F = -S_F x_F + C^T S e_F$ on cherche une solution de la forme :

$$\psi(t) = P(t)x(t) + z(t)$$

D'où :

$$\dot{\psi} = P\dot{x} + \dot{P}x + \dot{z} \text{ soit :}$$

$$Q_1x - A^T (Px + z) - C^T Q e = P(A + R_1P)x + PR_1z + \dot{P}x + \dot{z}$$

Les facteurs de x redonnent l'équation de Riccati. Les autres termes donnent :

$$\dot{z} + (PR_1 + A^T)z + C^T Q e = 0$$

qui sera intégrée à rebours avec l'initialisation :

$$z_F = C^T S e_F$$

3.5.4 Principe de résolution de l'équation de Ricatti

On considère la matrice :

$$Z = \begin{pmatrix} A & R_1 \\ Q_1 & -A^T \end{pmatrix}$$

Si λ est valeur propre, associée au vecteur propre à droite $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on peut vérifier que $-\lambda$ est valeur propre associée au vecteur propre à gauche $\begin{pmatrix} -v_2^T & v_1^T \end{pmatrix}$. Les $2m$ valeurs propres de Z vont donc par paires $\pm\lambda$. Sélectionnons les m valeurs propres à partie réelle négative et notons $\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$ la matrice $2m \times m$ des vecteurs propres à droite associés. Il vient :

$$\begin{pmatrix} A & R_1 \\ Q_1 & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \Lambda \\ V_2 \Lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \Lambda \text{ matrice diagonale des } m \text{ valeurs propres à parties réelles négatives.}$$

Développons le produit. Il vient :

$$\begin{aligned} AV_1 + R_1 V_2 &= V_1 \Lambda \rightarrow \Lambda = V_1^{-1} (AV_1 + R_1 V_2) \\ Q_1 V_1 - A^T V_2 &= V_2 \Lambda \rightarrow Q_1 - A^T V_2 V_1^{-1} = V_2 \Lambda V_1^{-1} \end{aligned}$$

Soit :

$$Q_1 - A^T V_2 V_1^{-1} - V_2 V_1^{-1} A - V_2 V_1^{-1} R_1 V_2 V_1^{-1} = 0$$

La matrice $V_2 V_1^{-1}$ vérifie le régime permanent de l'équation de Ricatti. D'où :

$$P = V_2 V_1^{-1}$$

La matrice d'évolution en boucle fermé s'écrit :

$$A_{BF} = A + R_1 P = A + R_1 V_2 V_1^{-1} \rightarrow V_1^{-1} A_{BF} V_1 = V_1^{-1} (AV_1 + R_1 V_2) = \Lambda$$

Les modes de A_{BF} sont stables de par le choix des λ_i .

3.6 Systèmes à commutations

3.6.1 Exemple introductif (tricycle)

Considérons le tricycle dont la cinématique est représentée figure 3.1. Il avance à vitesse constante V , guidé par une roue orientable située à une distance d de l'essieu arrière. Si α est l'angle de braquage de la roue avant et x et y les coordonnées du point central de l'essieu arrière et θ l'azimut de l'axe longitudinal du tricycle, on a l'équation d'évolution :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} = V \cos \theta \\ \dot{y} = V \sin \theta \\ \dot{\theta} = u \end{pmatrix} \text{ avec } u = \frac{V}{d} \tan \alpha$$

Comme α est limité, on a la contrainte $|u| < U = \frac{V}{r}$ avec $r = \frac{d}{\tan \alpha_{max}}$. On désire trouver le chemin le plus court (en temps ou en distance, puisque $V = cte$) pour aller d'une situation initiale à une situation finale. On considère le critère :

$$C = (t_F - t_0) = \int_{t_0}^{t_F} 1 dt$$

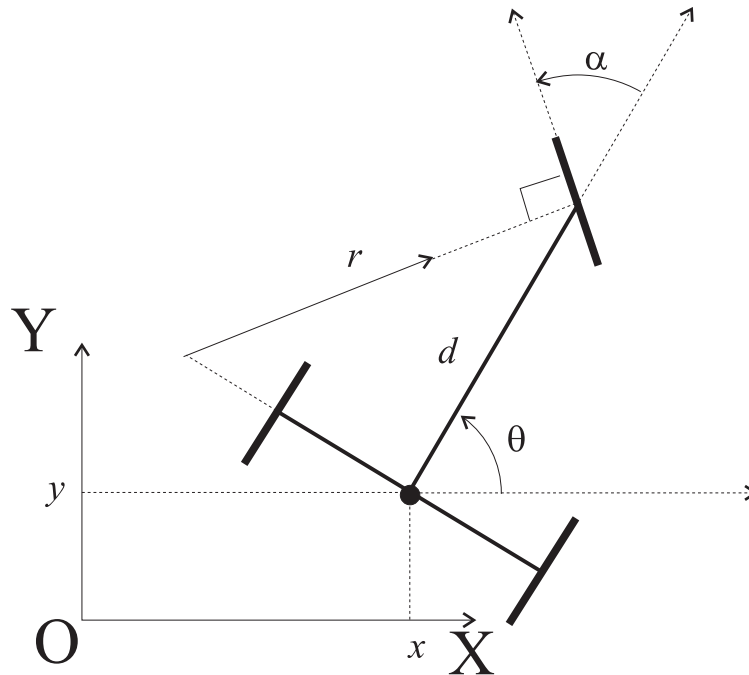


FIGURE 3.1 – Cinématique du tricycle

Hamiltonien : $H = V(\psi_1 \cos \theta + \psi_2 \sin \theta) + \psi_3 u - 1$

On est dans le cas d'un problème stationnaire à horizon libre. On aura donc $\dot{H} = 0$

Commande optimale : $\hat{u} = \arg \max H = U \text{signe}(\psi_3)$.

Système adjoint :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \dot{\psi}_2 = 0 \rightarrow \psi_1 = \text{cte et } \psi_2 = \text{cte} \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 V \sin \theta - \psi_2 V \cos \theta \end{aligned}$$

Pour $\psi_3 > 0$, $\hat{u} = U$ la trajectoire dans le plan est un cercle dans le sens trigonométrique direct de rayon de braquage minimal r .

Pour $\psi_3 < 0$, $\hat{u} = -U$ la trajectoire dans le plan est un cercle dans le sens trigonométrique inverse de rayon de braquage minimal r .

Si $\psi_3 = 0$ et $\dot{\psi}_3 = 0$, \hat{u} est indéterminé et reste indéterminé un certain temps (trajectoire singulière). Dans ce cas, la résolution en ψ_1, ψ_2 du système $H = 0, \dot{\psi}_3 = 0$ fournit $\psi_1 = \frac{\cos \theta}{V}$ et $\psi_2 = \frac{\sin \theta}{V}$. Or ψ_1 et ψ_2 sont constants ce implique $\theta = \text{cte}$, d'où $\hat{u} = 0$. Les trajectoires singulières sont des droites.

La commande optimale \hat{u} présente donc des commutations entre les 3 valeurs $-U, 0$ et $+U$ dans un ordre qui dépend de l'évolution de ψ_3 .

En pratique, la trajectoire optimale s'obtient en traçant les deux cercles de rayon r tangents à la situation de départ, les 2 cercles de rayon r tangents à la situation d'arrivée et en traçant les 4 tangentes orientées qui joignent ces cercles (1 seule tangente orientée joint un cercle de départ à un cercle d'arrivée en prenant en compte les sens de parcours). Si les cercles ne se coupent pas, il a 4 trajectoires à comparer (cf. figure 3.2).

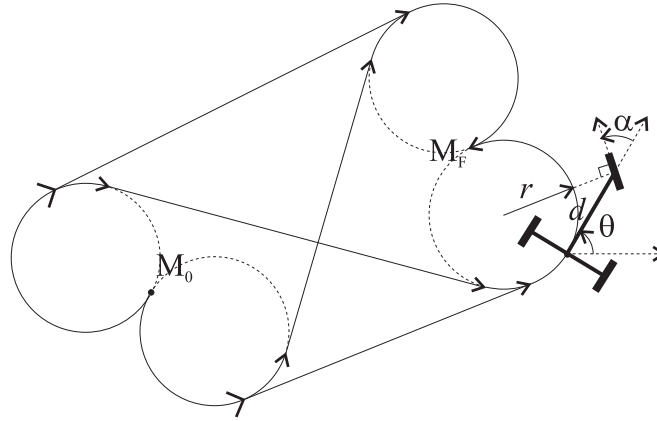


FIGURE 3.2 – Les 4 trajectoires candidates à l'optimum

3.6.2 $1/P^2$ en temps minimal à vitesse et accélération bornées

Considérons le système $\ddot{s} = u$ (fonction de transfert $\frac{1}{p^2}$) soit sous forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \end{cases}$$

que l'on désire amener du point initial (x_0, y_0) au point final (X, Y) en temps minimal, avec $|u| < \Gamma$ et $|y| < V$. On suppose que les points initial et final vérifient :

$$|y_0| \leq V \text{ et } |Y| \leq V$$

Le critère temps minimal s'écrit :

$$C = T = \int_0^T 1 dt$$

Principe de résolution

Hamiltonien : $H = \psi^T f - r - \mu^T \gamma = \psi_1 y + \psi_2 u - 1 - \mu_1 (y - V) - \mu_2 (-y - V)$

Commande optimale : $\hat{u} = \arg \max H = \text{signe}(\psi_2)$

Système adjoint :

$$\dot{\psi}_1 = -H_x = 0 \rightarrow \psi_1 = \text{cte} = \psi_{10}$$

$$\dot{\psi}_2 = -H_y = -\psi_1 + \mu_1 - \mu_2$$

Conditions de transversalité :

Le point de départ (x_0, y_0) est donné. $\psi_1(0)$ et $\psi_2(0)$ sont libres. Nous les noterons ψ_{10} et ψ_{20} .

Le point d'arrivée (X, Y) est donné. $\psi_1(T)$ et $\psi_2(T)$ sont libres.

L'instant terminal est libre. On est dans le cas d'un problème stationnaire à horizon libre. On aura donc $\hat{H} = 0$.

Existence de trajectoires singulières :

$\psi_2 = 0$ implique $-\psi_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0$ qui reporté (ainsi que $\psi_2 = 0$) dans $\hat{H} = 0$ donne :

$$V(\mu_1 + \mu_2) = 1$$

En résolvant le système $\begin{cases} \mu_1 - \mu_2 = \psi_1 \\ \mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{V} \end{cases}$, il vient $\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V} + \psi_1 \right) \\ \mu_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V} - \psi_1 \right) \end{cases}$

Résolution du problème aux deux bouts

Supposons les contraintes $|y| < V$ satisfaites. On a alors $\mu_1 = \mu_2 = 0$, d'où :

L'existence d'une trajectoire singulière avec $|y| < V$ impliquerait $\frac{1}{V} = 0$, c'est-à-dire V infini. Il n'y a pas de trajectoire singulière dans le domaine $|y| < V$.

$$\psi_2 = -\psi_{10}t + \psi_{20}.$$

ψ_2 est linéaire en fonction du temps, il ne peut s'annuler qu'une fois. S'il n'y a pas de trajectoire singulière, la commande optimale prendra au maximum deux valeurs $\pm\Gamma$. Il ne peut y avoir qu'une commutation. Il y a donc deux types de trajectoires de phases régulières, des trajectoires correspondant à $\hat{u} = \Gamma$ et des trajectoires correspondant à $\hat{u} = -\Gamma$.

Equation des trajectoires régulières :

Les contraintes étant satisfaites au départ, la trajectoire initiale à $\hat{u} = \pm\Gamma$ s'écrit :

$$\begin{cases} x = x_0 + y_0t \pm \frac{1}{2}\Gamma t^2 \\ y = y_0 \pm \Gamma t \end{cases} \rightarrow y^2 - y_0^2 = \pm 2\Gamma(x - x_0) \text{ en éliminant } t.$$

Les contraintes étant satisfaites à l'arrivée, la trajectoire finale à $\hat{u} = \mp\Gamma$ s'écrit :

$$\begin{cases} x = X - Y\tau \mp \frac{1}{2}\Gamma\tau^2 \\ y = Y \pm \Gamma\tau \end{cases} \rightarrow y^2 - Y^2 = \mp 2\Gamma(x - X) \text{ en éliminant } \tau.$$

Elle s'obtient en intégrant à rebours depuis (X, Y) .

Equation des trajectoires singulières :

Si y atteint la contrainte $\pm V$, il faut saturer la contrainte : $y = \pm V$. On a alors :

$\mu_2 = 0$ dans le cas $y = +V \rightarrow \psi_1 = \frac{1}{V} \rightarrow \mu_1 = \frac{1}{V} > 0$. Pas de contradiction, le paramètre de Kuhn et Tucker μ_1 a le bon signe.

$\mu_1 = 0$ dans le cas $y = -V \rightarrow \psi_1 = -\frac{1}{V} \rightarrow \mu_2 = \frac{1}{V} > 0$. Pas de contradiction, le paramètre de Kuhn et Tucker μ_2 a le bon signe.

$$\begin{cases} x = x_v \pm Vt \\ y = \pm V \end{cases} \rightarrow \hat{u} = \text{cte} = 0.$$

où x_v est la valeur de x quand y atteint $\pm V$.

Les trajectoires de commutation Dans le plan de phase représenté figure 3.3, les trajectoires $y = \pm V$ sont à la fois trajectoires singulières et droites de commutations. Quand elles sont atteintes, elles provoquent la commutation de $\hat{u} = \pm\Gamma$ à $\hat{u} = 0$. Elles conduiront exceptionnellement au point terminal (X, Y) dans le cas particulier où $Y = \pm V$. En dehors de ce cas, l'arrivée en (X, Y) se fera sur une des deux paraboles $y^2 - Y^2 = \pm 2\Gamma(x - X)$ qui passent par ce point. La parabole d'arrivée en (X, Y) correspond à :

$$\hat{u} = +\Gamma \text{ si } y < Y$$

$$\hat{u} = -\Gamma \text{ si } y > Y$$

Posons :

$$P(x, y) = 2\Gamma(X - x) - |Y - y|(Y + y)$$

On peut vérifier que $P(x, y) = 0$ constitue l'équation unique de ces deux paraboles d'arrivée.

— Si $P(x_0, y_0) > 0$, le point (x_0, y_0) se trouve en bas à gauche des paraboles d'arrivée. Des trajectoires de phases à $\hat{u} = +\Gamma$ issues de ce point finiront pas couper les paraboles d'arrivée, en un point où $y > Y$, l'arrivée se fera alors par la parabole à $\hat{u} = -\Gamma$. Si on utilisait $\hat{u} = -\Gamma$ en (x_0, y_0) , la trajectoire de phase partirait parallèlement à la trajectoire d'arrivée $\hat{u} = +\Gamma$ sans jamais la rencontrer.

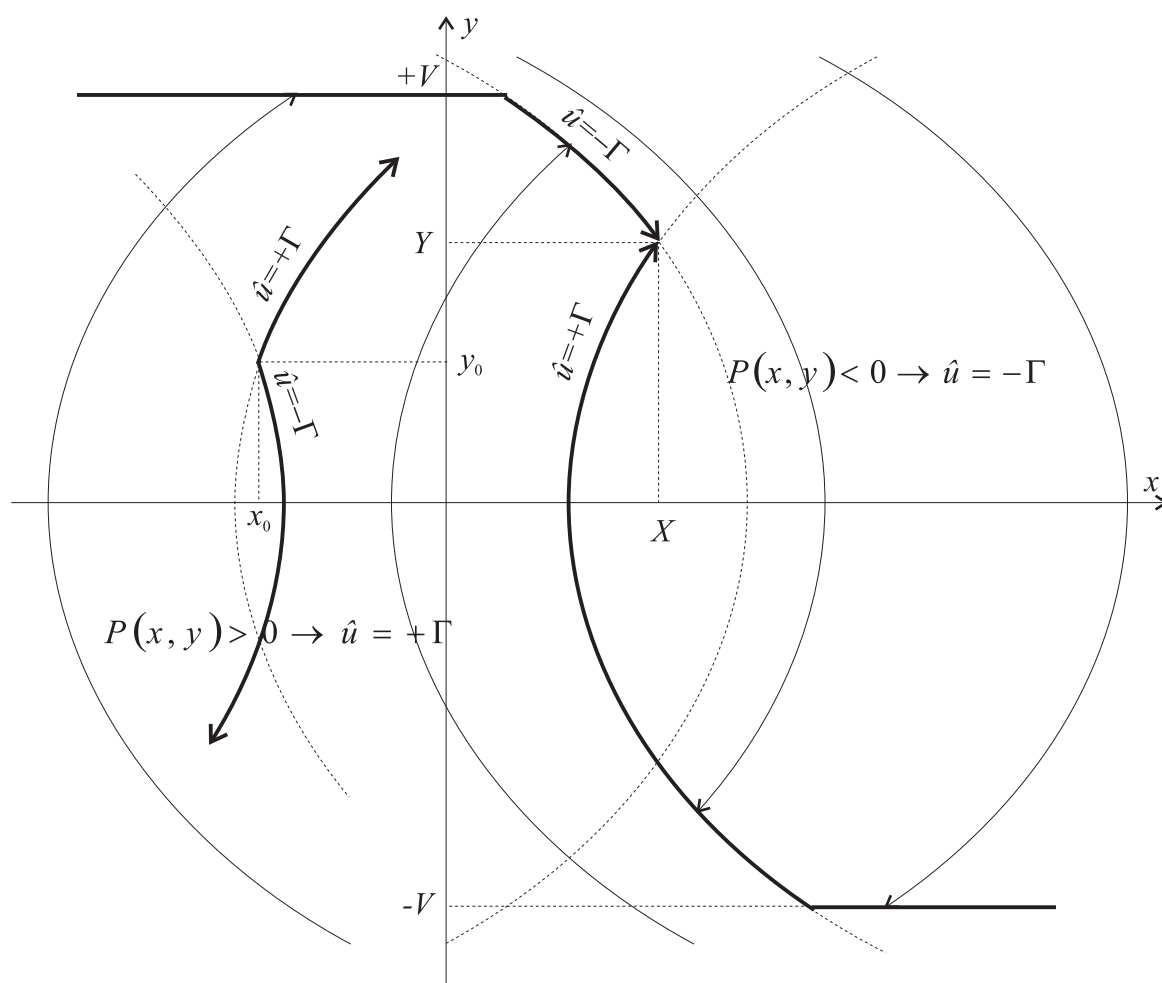


FIGURE 3.3 – Paraboles de commutation pour $\frac{1}{p^2}$ en temps minimal

- Au contraire, si $P(x_0, y_0) < 0$, le point (x_0, y_0) se trouve en haut à droite des paraboles d'arrivée. Des trajectoires de phases à $\hat{u} = -\Gamma$ issues de ce point finiront pas couper les paraboles d'arrivée, en un point où $y < Y$, l'arrivée se fera alors par la parabole à $\hat{u} = +\Gamma$. Si on utilisait $\hat{u} = +\Gamma$ en (x_0, y_0) , la trajectoire de phase partirait parallèlement à la trajectoire d'arrivée $\hat{u} = -\Gamma$ sans jamais la rencontrer.

En définitive la commande à appliquer est :

$$\hat{u} = \Gamma \text{ signe } [2\Gamma(X - x) - |Y - y|(Y + y)]$$

$P(x, y) = 0$ constitue donc l'équation des paraboles de commutation.

La commande optimale précédente s'applique tant que $|y| < V$ et $P(x, y) \neq 0$.

Si $y = \pm V$ est atteint, il y a commutation sur la commande $\hat{u} = 0$ qui est conservée tant que $P(x, y)$ ne change pas de signe.

Quand $P(x, y)$ s'annule la commande précédente $\hat{u} = \pm\Gamma$ où $\hat{u} = 0$ est abandonnée.

Si \hat{u} était égal à $\pm\Gamma$, la commande change de signe. $P(x, y)$ reste nul, ce qui fait que cette fonction ne peut plus être utilisée. La nouvelle commande est conservée jusqu'à l'arrivée.

Dans le cas où l'arrivée en $P(x, y) = 0$ se fait par \hat{u} saturé à 0, il faut malgré tout mémoriser le signe qu'aurait la commande en cas de non saturation, pour commuter sur la commande de signe opposée à l'arrivée sur la parabole de commutation.

Valeur du revenu Les paraboles initiales et terminales se coupent I en (x_I, y_I) tel que :

$$\left. \begin{array}{l} y_I^2 - y_0^2 = +2\gamma(x_I - x_0) \\ y_I^2 - Y^2 = -2\gamma(x_I - X) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{X + x_0}{2} + \frac{Y^2 - y_0^2}{4\gamma} \\ y_I^2 = \gamma(X - x_0) + \frac{Y^2 + y_0^2}{2} \end{cases}$$

avec $\gamma = \Gamma \text{ signe}[2\Gamma(X - x_0) - |Y - y_0|(Y + y_0)]$. Considérons :

$$y_I = \sqrt{y_I^2} \text{ signe}(\gamma)$$

Cas vitesse maximale non atteinte

Si $|y_I| < V$ la vitesse maximale n'est pas atteinte. Il vient :

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{y_I - y_0}{\gamma} \\ \tau = \frac{y_I - V}{\gamma} \end{array} \right\} \rightarrow T = \frac{2y_I - (Y + y_0)}{\gamma}$$

D'où :

$$T = 2\sqrt{\frac{(X - x_0)}{\gamma} + \frac{Y^2 + y_0^2}{2\gamma^2}} - \frac{Y + y_0}{\gamma} \quad (3.23)$$

Cas vitesse maximale atteinte

Si $|y_I| \geq V$ la vitesse maximale est atteinte. Il existe alors un palier à vitesse constante $v = V \text{ signe}(\gamma)$ entre les points P et Q d'abscisses respectives :

$$\begin{cases} x_P = x_0 + \frac{1}{2\gamma}(V^2 - y_0^2) \\ x_Q = X - \frac{1}{2\gamma}(V^2 - Y^2) \end{cases}$$

La phase à vitesse constante v dure :

$$t_v = \frac{x_Q - x_P}{v} = \frac{y_I^2 - V^2}{\Gamma V}$$

Les phases initiales et finales durent respectivement :

$$t = \frac{v - y_0}{\gamma}$$

$$\tau = \frac{v - Y}{\gamma}$$

D'où la durée totale :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{(X - x_0)}{v} + \frac{(Y - v)^2 + (y_0 - v)^2}{2\Gamma V} \\ T = \frac{y_I^2 - v(y_0 + Y - v)}{\Gamma V} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Vérification des hypothèses d'optimalité

L'optimalité de la solution proposée repose sur le respect des hypothèses qui ont permis d'établir le principe du maximum, et en particulier sur le fait que le revenu optimal $\hat{R}(X, t)$ est continu et dérivable relativement à X et t , et que le vecteur adjoint ψ est continu et dérivable. Nous allons voir, que dans le cas étudié toutes ces conditions ne sont pas remplies et qu'il en résulte que le principe du maximum est utilisé même quand certaines de ses hypothèses de validité ne sont pas vérifiées.

Signes des paramètres de Kuhn et Tucker et continuité de ψ On considère un point de départ dans la zone $P(x, y) > 0$. L'autre cas est strictement semblable.

Trajectoires régulières initiale :

$$\hat{H} = \psi_1 y + \psi_2 \hat{u} - 1 = \psi_{10}(y_0 + \Gamma t) + (-\psi_{10}t + \psi_{20})(+\Gamma) - 1 = 0 \text{ d'où :}$$

$$y_0 \psi_{10} + \Gamma \psi_{20} - 1 = 0 \text{ (quand la première commande est } \hat{u} = \Gamma)$$

Commutation vers $\hat{u} = 0$ quand y atteint $+V$:

Alors $\mu_1 \neq 0$.

$$\hat{u} = \text{cte} = 0 \rightarrow \psi_2 = \dot{\psi}_2 = 0 \rightarrow \mu_1 = \psi_{10}.$$

De plus, dans ce cas :

$$\hat{H} = 0 = \psi_{10}V - 1 \rightarrow \psi_{10} = 1/V.$$

$\mu_1 = \psi_{10} = 1/V$. **Le paramètre de Kuhn et Tucker est bien positif.**

Juste avant $y = +V$:

$$\hat{u} = +\Gamma \rightarrow \psi_2 \text{ était positif avant de s'annuler. } \psi_2 \searrow \rightarrow \psi_{10} > 0 \text{ en accord avec } \psi_{10} = 1/V.$$

Pendant $y = +V$:

$\psi_2 = \text{cte} = 0$. Or dans ce cas (avec τ temps compté à partir de l'atteinte de la saturation) :

$$\psi_2 = -\psi_{10}\tau + \mu_1\tau = 0 \rightarrow \mu_1 = \psi_{10} \text{ recoupe l'évaluation précédente.}$$

C'est le saut de μ_1 de la valeur 0 à $1/V$ qui produit la discontinuité de $\dot{\psi}_2$.

Commutation $\hat{u} = \Gamma$ vers $\hat{u} = -\Gamma$

Juste avant $y_0\psi_{10} + \gamma\psi_{20} - 1 = 0$.

Au changement de commande on a $\psi_1 y_c + \psi_2 \hat{u} - 1 = 0$ avec $\psi_2 = 0$

D'où $\psi_{10} = \frac{1}{y_c}$ où y_c est la vitesse atteinte à la commutation.

Après on a en prenant comme nouvelle origine des temps l'instant de commutation :

$$\frac{1}{y_c}(y_c - \Gamma t) + \left(-\frac{1}{y_c}t\right)(-\Gamma) - 1 = 0 \text{ soit } 0 = 0$$

qui **confirme la continuité de ψ_1 et ψ_2** .

Commutation de $\hat{u} = 0$ vers $\hat{u} = -\gamma$

Juste avant $\hat{H} = 0 = \psi_{10}V - 1 \rightarrow \psi_{10} = 1/V$.

Après on a en prenant comme nouvelle origine des temps l'instant de commutation :

$$\frac{1}{V}(V - \Gamma t) + \left(-\frac{1}{V}t\right)(-\Gamma) - 1 = 0 \text{ soit } 0 = 0$$

confirme comme précédemment la continuité de ψ_1 et ψ_2 , avec ici $y_c = V$.

Continuité du revenu optimal Le vecteur adjoint est défini par $\psi = -R_x$.

Cas vitesse maximale non atteinte. En remplaçant x_0 par x et y_0 par y dans (3.23) on obtient le revenu optimal :

$$\hat{R}(x, y) = 2\sqrt{\frac{(X-x)}{\gamma} + \frac{Y^2 + y^2}{2\gamma^2}} - \frac{Y+y}{\gamma}$$

Il vient :

$$\psi_1 = -\frac{\partial \hat{R}(x, y)}{\partial x} = \frac{-1}{\sqrt{\gamma(X-x) + \frac{Y^2 + y^2}{2}}}$$

Sur la trajectoire initiale on a $\frac{y^2}{2} - \gamma x = \frac{y_0^2}{2} - \gamma x_0$, d'où :

$$\psi_1 = \frac{-1}{y_I}$$

On retrouve bien $\psi_1 = \text{cte}$.

Pour ψ_2 il vient :

$$\begin{aligned} \psi_2 &= -\frac{\partial \hat{R}(x, y)}{\partial y} = \frac{y}{\gamma\sqrt{\gamma(X-x) + \frac{Y^2 + y^2}{2}}} - \frac{1}{\gamma} \\ &= -\psi_1 \frac{y}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Sur cette portion de trajectoire $y = y_0 + \gamma t$. D'où $\psi_2 = -\psi_1 t - \frac{\psi_1 y_0 + 1}{\gamma}$ est bien tel que $\dot{\psi}_2 = -\psi_1$.

Si (x, y) est déjà sur la trajectoire finale $\hat{u} = -\gamma$, c'est-à-dire si $y^2 - Y^2 = -2\gamma(x - X)$, alors :

$$\hat{R}(x, y) = \frac{Y-y}{-\gamma}$$

et une autre expression en remplaçant y par sa valeur en fonction de x . En prenant les dérivées partielles par rapport à x et y on ne trouve pas la vérification attendue. Si utilise l'expression générale de $\hat{R}(x, y)$, on obtient en remplaçant dans :

$$\psi_2 = -\psi_1 \frac{y}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}$$

y par $y = Y + \gamma t$ qui est sa valeur sur la dernière trajectoire :

$$\psi_2 = -\psi_1 t - \frac{\psi_1 Y + 1}{\gamma}$$

qui est bien tel que $\psi_2 = -\psi_1$.

La trajectoire de commutation sépare l'espace de phase en deux régions que les trajectoires optimales ne doivent pas franchir. Le revenu $R(x, y)$ est continûment différentiable par rapport à l'état partout sauf sur cette trajectoire. Malgré tout, nous avons vu que le principe du maximum fonctionne et donne un vecteur adjoint continu et à dérivée continue même sur les trajectoires de commutations (non franchies).

Remarque : En changeant γ en $-\gamma$ dans (3.23), on voit que le revenu n'est continu à la traversée de la trajectoire de commutation que dans le cas particulier où $X = Y = 0$.

Cas vitesse maximale atteinte : Dans ce cas on a :

$$\hat{R}(x, y) = \frac{(X - x)}{v} + \frac{(Y - v)^2 + (y - v)^2}{2\Gamma V}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\frac{\partial \hat{R}(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{v} = \text{cte} \\ \psi_2 &= -\frac{\partial \hat{R}(x, y)}{\partial y} = \frac{y - v}{\gamma v} = \frac{y}{\gamma v} - \frac{1}{\gamma} = -\psi_1 \frac{y}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \end{aligned}$$

Sur la trajectoire initiale $y = y_0 + \gamma t$. D'où $\psi_2 = -\psi_1 t - \frac{\psi_1 y_0 + 1}{\gamma}$ est bien tel que $\psi_2 = -\psi_1$.

Sur la contrainte $y = v$, $\psi_2 = \frac{y}{\gamma v} - \frac{1}{\gamma} = 0$ comme prévu.

Sur la trajectoire finale $y = Y + \gamma t$. D'où $\psi_2 = -\psi_1 t - \frac{\psi_1 Y + 1}{\gamma}$ est bien tel que $\psi_2 = -\psi_1$.

3.6.3 1/P³ en temps minimal à jerk borné

On cherche la trajectoire qui permet de passer d'un état initial $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ à un état final $M_F (x_F, y_F, z_F)$ en temps minimal en respectant les équations d'évolution :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = u \end{cases}$$

et la contrainte :

$$|u| \leq J_{\max}$$

Conditions d'optimalité

Le critère temps minimal s'écrit :

$$T = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$$

Le hamiltonien s'écrit :

$$H = \psi_1 y + \psi_2 z + \psi_3 u - 1$$

où le vecteur adjoint ψ a pour équation d'évolution (système adjoint) :

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\psi_2 \end{cases}$$

La commande optimale u maximise le hamiltonien :

$$\hat{u} = \arg \max_u H$$

Comme u est borné, il en résulte que :

$$\begin{cases} \psi_3 > 0 & \rightarrow & \hat{u} = +J_{\max} \\ \psi_3 < 0 & \rightarrow & \hat{u} = -J_{\max} \\ \left(\begin{array}{c} \psi_3 = 0 \\ \dot{\psi}_3 = 0 \\ \vdots \end{array} \right) & \rightarrow & \hat{u} \text{ est indéterminé} \end{cases}$$

Le hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, il est donc stationnaire sur les trajectoires optimales. De plus, la condition de transversalité terminale (t_f est libre) nous indique que le hamiltonien est nul pour $t = t_f$, d'où :

$$H = \text{cte} = 0 \quad (3.25)$$

En intégrant le système adjoint, il vient :

$$\begin{cases} \psi_1 = \psi_{10} \\ \psi_2 = \psi_{20} - \psi_{10}t \\ \psi_3 = \psi_{30} - \psi_{20}t + \frac{1}{2}\psi_{10}t^2 \end{cases}$$

Le cas \hat{u} indéterminé ne peut intervenir que si $\psi_3 = 0$, $\dot{\psi}_3 = -\psi_2 = 0$ et $\ddot{\psi}_3 = \psi_1 = 0$. Ceci implique $H = -1$, ce qui est en contradiction avec le résultat (3.25). Il n'y a donc pas de trajectoires singulières.

En conséquence ψ_3 est au maximum quadratique en t . Il y a commutation de $\hat{u} = J$ à $\hat{u} = -J$ (avec $J = \pm J_{\max}$) lorsque ψ_3 s'annule. Ces commutations interviennent lorsque la trajectoire atteint une ligne ou surface de commutation sur lesquelles ψ_3 s'annule. Les trajectoires ne doivent pas les traverser, car en général le vecteur adjoint est discontinu lors de cette traversée. De plus, le système adjoint peut ne pas être vérifié le long des trajectoires confondues avec les lignes ou surfaces de commutation. Malgré ces incertitudes théoriques, si on suppose que ψ_3 est continu, il ne peut s'annuler, au maximum que deux fois. On en conclut (avec les réserves précédentes) que suivant les conditions initiales, la trajectoire sera constituée de une, deux ou trois phases avec la succession de commande suivantes :

$$\left[\begin{array}{c} (-J_{\max}) \\ (-J_{\max}, +J_{\max}) \\ (-J_{\max}, +J_{\max}, -J_{\max}) \\ (+J_{\max}) \\ (+J_{\max}, -J_{\max}) \\ (+J_{\max}, -J_{\max}, +J_{\max}) \end{array} \right]$$

Le principe du maximum, n'apporte aucune aide supplémentaire. La résolution du problème, consiste donc à considérer les deux³ séquences de commandes $(+J_{\max}, -J_{\max}, +J_{\max})$ sur la trajectoire optimale dite **directe** ou $(-J_{\max}, +J_{\max}, -J_{\max})$ sur la trajectoire optimale dite **inverse**, de durées respectives (t_1, t_2, t_3) et à calculer les deux triplets (t_1, t_2, t_3) qui permettent d'atteindre les conditions terminales $(X = x_F, Y = y_F, Z = z_F)$ à partir des conditions initiales (x_0, y_0, z_0) .

Résolution du problème aux deux bouts

Pour chacune des deux séquences, on considère d'une part la trajectoire rétrograde de durée t_3 qui remonte le temps en partant du point final M_F de coordonnées (X, Y, Z) et d'autre part la trajectoire dans le sens du temps de durée t_1 qui part du point initial M_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Les trois durées peuvent être calculées en considérant l'intersection de la trajectoire paramétrique directe fonction de t_1 et de la surface paramétrique fonction des deux autres durées (surface engendrée par un ensemble de trajectoires rétrogrades de durées t_2). Cette surface constitue la première surface de commutation de $+J_{\max}$ à $-J_{\max}$ pour la trajectoire directe (et $-J_{\max}$ à $+J_{\max}$ pour l'inverse). La situation de cette surface est variable avec M_F . Son équation est paramétrée en fonction de X, Y et Z .

Traisons simultanément le cas des trajectoires directe et inverse, en considérant un jerk extrême algébrique J .

Le dernier tronçon de trajectoire est obtenu en remontant le temps d'une durée $-t_3$ depuis M_F avec le jerk J (positif dans le cas direct et négatif dans le cas inverse). Ce tronçon est décrit par le point P de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} z_p = Z - Jt_3 \\ y_p = Y - Zt_3 + \frac{1}{2}Jt_3^2 \\ x_p = X - Yt_3 + \frac{1}{2}Zt_3^2 - \frac{1}{6}Jt_3^3 \end{pmatrix}$$

Appelons C_{term} cette *cubique terminale*.

Ecrivons l'équation paramétrique de la surface de commutation générée en remontant le temps d'une durée $-t_2$ avec le jerk $-J$ (algébrique) depuis les points P de la cubique terminale C_{term} . Le point Q qui engendre la surface conduisant en P a pour coordonnées :

$$\begin{aligned} z &= z_p + Jt_2 \\ y &= y_p - z_p t_2 - \frac{1}{2}Jt_2^2 \\ x &= x_p - y_p t_2 + \frac{1}{2}z_p t_2^2 + \frac{1}{6}Jt_2^3 \end{aligned}$$

En reportant les valeurs de x_p, y_p et z_p dans ces équations on obtient :

$$\begin{aligned} z &= Z - Jt_3 + Jt_2 \\ y &= Y - Zt_3 + \frac{1}{2}Jt_3^2 - t_2 Z + t_2 Jt_3 - \frac{1}{2}Jt_2^2 \\ x &= X - Yt_3 + \frac{1}{2}Zt_3^2 - \frac{1}{6}Jt_3^3 - t_2 Y + t_2 Zt_3 - \frac{1}{2}t_2 Jt_3^2 + \frac{1}{2}t_2^2 Z - \frac{1}{2}t_2^2 Jt_3 + \frac{1}{6}Jt_2^3 \end{aligned}$$

Ce sont les équations paramétriques de la surface terminale d'arrivée en M_F par la séquence $(-J, J)$.

De la première équation on tire $t_2 = t_3 + \frac{z - Z}{J}$ qui reporté dans la deuxième équation donne :

$$y = Y + \frac{1}{2J} (Z^2 - z^2) - 2Zt_3 + Jt_3^2 \quad (3.26)$$

La racine positive t_3 de ce trinôme du deuxième degré s'écrit :

$$t_3 = \frac{Z}{J} + \frac{\epsilon}{2J} \sqrt{(2Z^2 + 2z^2 + 4J(y - Y))} \quad (3.27)$$

3. Les quatre autres séquences sont des cas particuliers de ces deux avec une ou deux durées successives nulles.

avec $\varepsilon = \pm 1$. D'où :

$$t_2 = \frac{z}{J} + \frac{\varepsilon}{2J} \sqrt{(2Z^2 + 2z^2 + 4J(y - Y))} \quad (3.28)$$

ε doit être tel que t_3 et t_2 soient positifs. En reportant la valeur de t_3 dans la troisième équation paramétrique, on obtient l'équation analytique de la surface de commutation S_{com} vers la cubique de décélération C_{term} :

$$S_{com} : x = X + \frac{1}{3J^2} (Z^3 - z^3) - \frac{1}{J} (YZ + yz) + \frac{\varepsilon}{4J^2} (Z^2 - z^2 - 2J(y + Y)) \sqrt{(2Z^2 + 2z^2 + 4J(y - Y))} \quad (3.29)$$

La figure 3.4 représente les deux surfaces pour $J = \pm 100$, $Y = 2$, $Z = 5$. Sur les 3 projections orthogonales la surface S_{com} est parcourue par des trajectoires en tirets pour le sens direct et en pointillés pour le sens inverse. Sur cette figure le point but M_F est noté O.

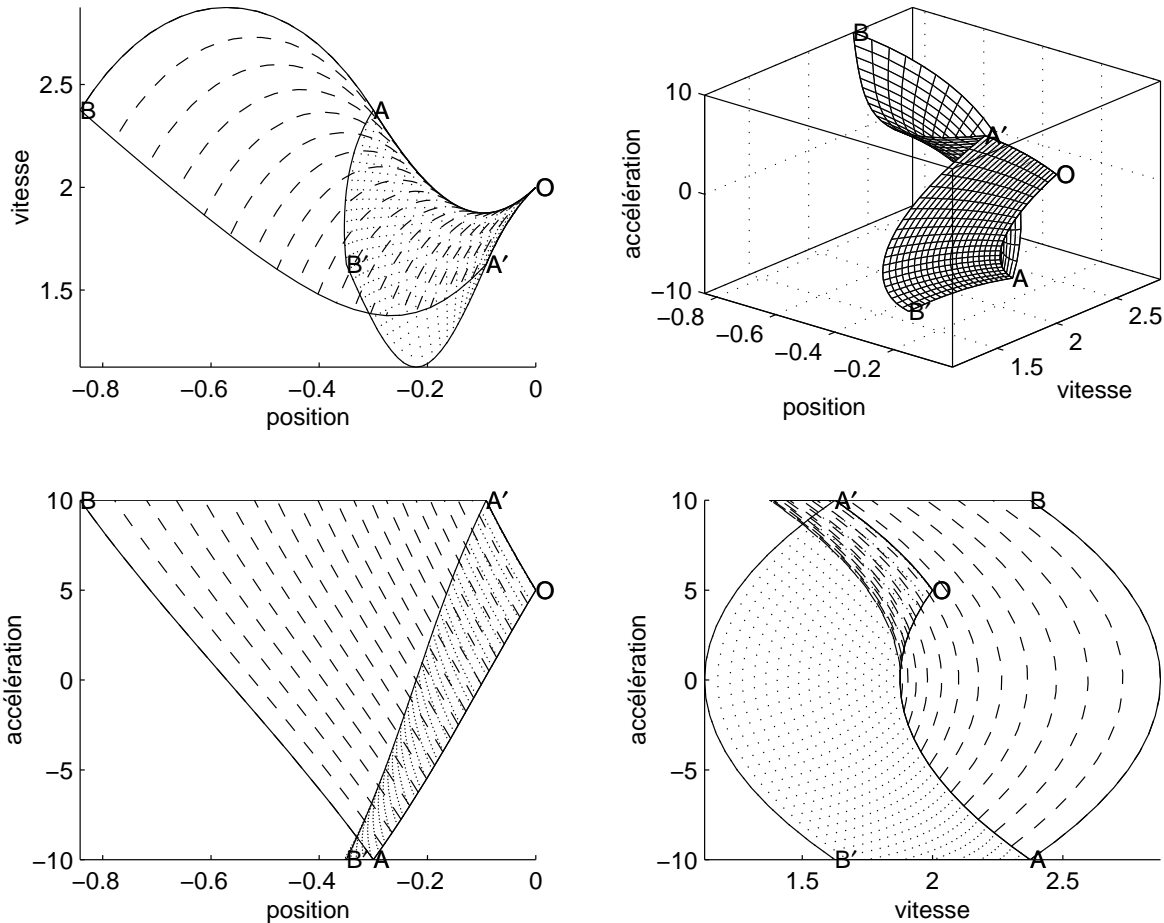


FIGURE 3.4 – Surfaces de commutation S_{com} directe et inverse.

La durée t_1 de la première phase s'obtient en écrivant que les coordonnées du point Q de coordonnées (x, y, z) atteint à l'issue de cette première phase :

$$\begin{pmatrix} z = z_0 + Jt_1 \\ y = y_0 + z_0 t_1 + \frac{1}{2} J t_1^2 \\ x = x_0 + y_0 t_1 + \frac{1}{2} z_0 t_1^2 + \frac{1}{6} J t_1^3 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

vérifient l'équation (3.29) de la surface de commutation.

On fait disparaître le radical avec le caractère signe ε en isolant leur facteur dans un membre d'équation, puis en élevant au carré. Après simplification on trouve que t_1 est racine du polynôme de degré 4 :

$$P_{1JJ}(x, y, z) = a_4 J^4 t_1^4 + a_3 J^3 t_1^3 + a_2 J^2 t_1^2 + a_1 J t_1 + a_0 = 0 \quad (3.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} a_4 &= 3z_0^2 + (2c + d) - 4a = \frac{1}{2} (z_0^2 - Z^2 + 2J(Y - y_0)) \\ a_3 &= 2(z_0(4z^2 + 2(2c + d) - 6a) - b) \\ a_2 &= z_0(4z_0(2c + d) - 6b) + c(c + 2d) - 4a^2 \\ a_1 &= 2(z_0c(c + 2d) - 2ba) \\ a_0 &= c^2d - b^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} a &= y_0J + z_0^2 \\ b &= J^2(x_0 - X) + J(z_0y_0 + ZY) + \frac{1}{3}(z_0^3 - Z^3) \\ c &= \frac{1}{2}(z_0^2 - Z^2 + 2J(y_0 + Y)) \\ d &= \frac{1}{2}(z_0^2 + Z^2 + 2J(y_0 - Y)) \end{aligned}$$

L'élévation au carré effectuée peut introduire des racines non valides. Pour être acceptables, les racines t_1 doivent être réelles, positives ou nulles, telle que :

$$\begin{aligned} (z^2 + Z^2) + 2J(y - Y) &\geq 0 \\ t_2 \text{ et } t_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

où x , y et z sont calculés à partir des racines t_1 et des équations (3.30).

Pour calculer t_2 et t_3 , il faut déterminer si le radical doit être ajouté ou retranché. On utilise pour cela le signe de la quantité :

$$s_r = \left(x - X + \frac{yz + YZ}{J} + \frac{z^3 - Z^3}{3J^2} \right) (z^2 - Z^2 + 2J(y + Y))$$

soit :

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{z}{J} - \text{signe}(s_r) \sqrt{\frac{z^2 + Z^2 + 2J(y - Y)}{2J^2}} \\ t_3 &= \frac{Z}{J} - \text{signe}(s_r) \sqrt{\frac{z^2 + Z^2 + 2J(y - Y)}{2J^2}} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Remarque : Quand $(z^2 - Z^2 + 2J(y + Y))$ tend vers 0, le signe de s_r devient indéterminé. Dans ce cas le radical vaut $\frac{1}{|J|} \sqrt{Z^2 - 2JY}$. Il est a priori non nul. Bien qu'indéterminé, le signe de s_r est significatif. Pour lever cette indétermination il est nécessaire d'essayer les deux signes de ε et de vérifier que les temps trouvés correspondent effectivement à une solution.

Si plusieurs racines conviennent (ce qui peut arriver dans des cas très particuliers), on ne conserve que la solution qui offre la plus petite somme $t_1 + t_2 + t_3$.

La figure 3.5 montre deux cas de multiplicité de solutions.

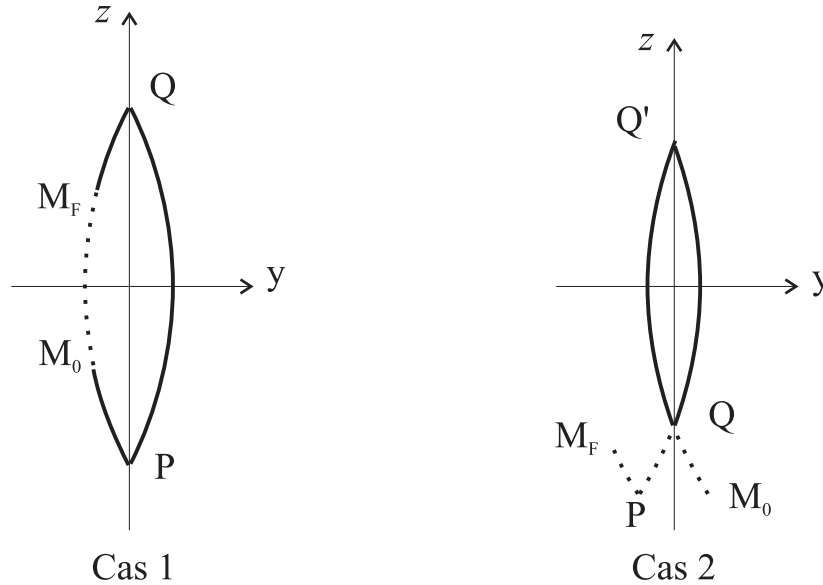


FIGURE 3.5 – Exemple de multiplicité de solutions.

Considérons le cas 1 avec un trajet direct à jerk J positif (en pointillés) de M à O dans le plan (y, z) , avec $l = x_0 - x$ exactement égal au déplacement correspondant. La séquence 1 offre deux solutions évidentes en $(J, -J, J)$ de même durée totale τ_{OF} dont les durées sont $(\tau_{OF}, 0, 0)$ et $(0, 0, \tau_{OF})$. Mais elle en offre également une troisième qui n'est pas optimale et qui est $(\tau_{M_0P}, \tau_{PQ}, \tau_{QM_F})$. La durée totale τ_{OF} est augmentée de la durée d'un cycle complet $M_F Q P M_F$. La distance algébrique parcourue est identique car au cours du cycle effectué en plus, le point figuratif fait un aller-retour de distance algébrique nulle.

Considérons le cas 2 avec un trajet optimal $M_0 Q P M_F$ en pointillé de type $(J, -J, J)$. Supposons que le déplacement algébrique désiré $l = x_0 - x$ corresponde exactement à ce trajet. Tout déplacement de la parabole PQ entraîne une variation de l qui fait que seule la parabole tracée convient (il y aurait autrement une infinité de solutions, alors qu'il ne peut y en avoir que 4 au maximum). Toutefois en plus de la solution optimale $(\tau_{M_0Q}, \tau_{QP}, \tau_{PM_F})$, la procédure fournit une deuxième solution valide, non optimale qui correspond aux durées $(\tau_{M_0Q'}, \tau_{Q'P}, \tau_{PM_F})$ pour le trajet $M_0 Q Q' Q P M_F$. Le déplacement algébrique est toujours égal à $l = x_0 - x$, mais la durée totale est augmentée de la durée du cycle $Q Q' Q$.

L'expérience pratique montre que lorsque le point terminal $M_F(x_F, y_F, z_F)$ est en $(0, 0, 0)$, il y a une et une seule solution valide, qui est donc la solution optimale.

Remarque : La prise en compte de contraintes sur l'état du type $|y| < V_{\max}$ et $|z| < \Gamma_{\max}$, multiplie le nombre de cas et de commutations. On montre qu'en plus des portions de trajectoires optimales à commande optimale $\hat{u} = \pm J_{\max}$, il y a des portions de trajectoires optimales à commande optimale $\hat{u} = 0$ (trajectoires singulières à $z = \text{cte} = \pm \Gamma_{\max}$ ou $y = \text{cte} = \pm V_{\max}$). Il y a un maximum de 6 commutations et 16 séquences de commandes possibles.

Les 8 séquences de base sont décrites ci-après, avec pour les portions à commande $\hat{u} = 0$, la lettre Γ ou V suivant qu'elles correspondent à une trajectoire singulière à $z = \text{cte} = \Gamma$ ou à $y = \text{cte} = V$.

1. aucune saturation de l'état :

$$\{J, -J, J\}$$

2. saturation $-\Gamma$ seule :

$$\{J, -J, -\Gamma, J\}$$

3. saturation $+\Gamma$ et $-\Gamma$:

$$\{J, \Gamma, -J, -\Gamma, J\}$$

4. saturation $+\Gamma, V$ et $-\Gamma$:

$$\{J, \Gamma, -J, V, -J, -\Gamma, J\}$$

5. saturation V et $-\Gamma$:

$$\{J, -J, V, -J, -\Gamma, J\}$$

6. saturation $+\Gamma$ seule :

$$\{J, \Gamma, -J, J\}$$

7. saturation $+\Gamma$ et V :

$$\{J, \Gamma, -J, V, -J, J\}$$

8. saturation V seule :

$$\{J, -J, V, -J, J\}$$

Les 8 séquences dites directes correspondent à $J = +J_{\max}$, $\Gamma = +\Gamma_{\max}$ et $V = +V_{\max}$ et les 8 inverses à $J = -J_{\max}$, $\Gamma = -\Gamma_{\max}$ et $V = -V_{\max}$.

Les commutations terminales de J à $-J$ où $-J$ à J se font sur la surface de commutation C_{com} .

Les commutations de J à Γ ou de $-J$ à $-\Gamma$ (en fait $\pm J$ à 0) se font sur la surface de commutation $z = \Gamma$.

Les commutations de $-J$ à V (en fait $-J$ à 0) se font sur la surface de commutation :

$$2J(V - y) - Jz \left| \frac{z}{J} \right| = 0$$

Les autres lignes ou surfaces de commutation sont moins évidentes. Elles se calculent en suivant la procédure utilisée pour le cas sans contraintes sur l'état.

Les instants de commutations se calculent assez simplement pour 5 des 8 séquences :

- la séquence 4 ne demande la résolution que de binômes de degré 1,
- les séquences 3, 5, 7 et 8 ne demandent la résolution que de trinômes de degré 2,
- seules les séquences 1 (cas sans contrainte sur l'état précédemment résolu), 2 et 6 nécessitent le calcul des racines d'un polynôme de degré 4.

3.7 Du calcul des variations au principe du maximum

Cette section présente une approche plus rigoureuse pour établir le principe du maximum, mais avec des conditions plus restrictives.

3.7.1 Historique

Galilée étudia sans succès le problème du *brachistochrone* (du grec brachus = court et khronos = le temps). Etant donné deux points A et B de hauteurs différentes, non situés sur une même verticale, on recherche la trajectoire permettant la descente la plus rapide de A à B d'un point M soumis à la seule pesanteur (sorte de toboggan). Galilée pensait que la solution était un arc de cercle.

Les frères Bernouilli Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748) résolurent ce problème par les prémices du calcul des variations. La solution est un arc de cycloïde dont le point de rebroussement est en A. Le point B n'est pas au point le plus bas. La cycloïde est *tautochrone* : sur l'arc de cycloïde deux

points distincts M et N arrivent en un même temps au bout de la trajectoire. Ce problème fut ensuite résolu par Leibniz, Newton et L'Hospital.

Leonhard Euler (1707-1783), élève de Jean Bernouilli prolongera leurs travaux, affinant la notion de fonction dérivée, créant la notion d'équation aux dérivées partielles (1734) et le calcul des variations (1744).

Joseph Louis Comte de Lagrange (1736-1813) expliqua les perturbations des orbites planétaires en appliquant à la théorie newtonienne les principes du calcul des variations.

Le principe du maximum peut-être établi à partir de l'équation d'Euler, dite aussi de Euler-Lagrange : elle énonce, sous la forme d'une équation différentielle, une condition nécessaire d'extremum de la fonctionnelle $\int_a^b F(x, y, y') dx$ avec $y = f(x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$ et $f(a)$ et $f(b)$ donnés :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Cette équation est une équation différentielle du second ordre qui impose à y et à F des conditions de dérivabilité du second ordre. En effet, en développant le deuxième terme, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \times y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \times y'' = 0$$

(Remarque : Schwarz $\rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}$ si F est de classe C^2).

3.7.2 Variation d'une variable

Considérons une variable x qui dépend du temps t . Par exemple :

$$x = a + bt + ct^2 + \dots$$

$$\dot{x} = b + 2ct + \dots$$

$$\ddot{x} = 2c + \dots$$

ou a, b, c, \dots sont des variables indépendantes non liées au temps.

Nous noterons δt une variation de la variable t , δx une variation de la variable x , δa une variation de la variable a, \dots Il vient :

$$\delta x = (\delta a + t \delta b + t^2 \delta c + \dots) + (b + 2ct + \dots) \delta t$$

Soit :

$$\delta x = (\delta a + t \delta b + t^2 \delta c + \dots) + \dot{x} \delta t$$

Nous noterons $\delta x(t)$ le premier facteur qui représente la variation de x à temps constant, à l'instant t . Cette variation est due aux variations des paramètres indépendants du temps :

$$\delta x = \delta x(t) + \dot{x} \delta t$$

De même :

$$\delta \dot{x} = (\delta b + 2t \delta c + \dots) + (2c + \dots) \delta t$$

$$\delta \dot{x} = \delta \dot{x}(t) + \ddot{x} \delta t$$

Par ailleurs :

$$\frac{d}{dt} (\delta x) = \frac{d}{dt} (\delta x(t)) + \ddot{x} \delta t + \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta x) &= (\delta b + 2t\delta c + \dots) + \frac{d}{dt}(\delta a) + t\frac{d}{dt}(\delta b) + t^2\frac{d}{dt}(\delta c) + \dots + t^2\frac{d}{dt}(\delta c) + \ddot{x}\delta t + \dot{x}\frac{d}{dt}(\delta t) \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= \delta\dot{x}(t) + \frac{d}{dt}(\delta a) + t\frac{d}{dt}(\delta b) + t^2\frac{d}{dt}(\delta c) + \dots + t^2\frac{d}{dt}(\delta c) + \ddot{x}\delta t + \dot{x}\frac{d}{dt}(\delta t)\end{aligned}$$

En remarquant que les variables a, b, c, \dots sont indépendantes du temps et en considérant que δt est une constante il vient :

$$\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x) = \delta\dot{x}(t) + \ddot{x}\delta t$$

3.7.3 Variation d'une fonction

Considérons une fonction de l'état d'un processus continu $\dot{x} = f(x, u, t)$. A un instant t , la commande u permet en théorie de faire prendre à \dot{x} n'importe quelle valeur indépendante de x et t . Une fonction incluant toutes les variations possibles se réduit donc à une fonction du type :

$$r(x, \dot{x}, t)$$

Une variation de cette fonction s'écrira :

$$\delta r = r_x^T \delta x + r_{\dot{x}}^T \delta \dot{x} + r_t$$

Si r ne dépend pas directement de t , mais seulement par l'intermédiaire de x et \dot{x} , $r_t = 0$, d'où compte tenu de $\delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(\delta x)$:

$$\delta r = r_x^T \delta x + r_{\dot{x}}^T \frac{d}{dt}(\delta x)$$

3.7.4 Variation d'une fonctionnelle

L'intégrale :

$$C = \int_{t_0}^{t_F} \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) dt$$

est appelée une fonctionnelle. La formule de Leibniz permet d'écrire :

$$\delta C = \int_{t_0}^{t_F} \delta \mathcal{L} dt + \mathcal{L}(x_F, \dot{x}_F, t_F) \delta t_F - \mathcal{L}(x_0, \dot{x}_0, t_0) \delta t_0$$

3.7.5 Conditions nécessaires de stationnarité

Evaluons δC . Il vient :

$$\delta C = \int_{t_0}^{t_F} [\mathcal{L}_x^T \delta x + \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \frac{d}{dt}(\delta x)] dt + \mathcal{L}_F \delta t_F - \mathcal{L}_0 \delta t_0$$

Or (en intégrant par partie) :

$$\int_{t_0}^{t_F} [\mathcal{L}_{\dot{x}}^T \frac{d}{dt}(\delta x)] dt = [\mathcal{L}_{\dot{x}}^T \delta x]_{t_0}^{t_F} - \int_{t_0}^{t_F} [\frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{\dot{x}}^T) \delta x] dt$$

D'où :

$$\delta C = \int_{t_0}^{t_F} \delta x^T [\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{\dot{x}})] dt + \mathcal{L}_{\dot{x}_F}^T \delta x(t_F) + \mathcal{L}_F \delta t_F - \mathcal{L}_0 \delta t_0 - \mathcal{L}_{\dot{x}_0}^T \delta x(t_0)$$

Or $\delta x(t_0) = \delta x_0 - \dot{x}_0 \delta t_0$ et $\delta x(t_F) = \delta x_F - \dot{x}_F \delta t_F$, d'où :

$$\delta C = \int_{t_0}^{t_F} \delta x^T [\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{\dot{x}})] dt + \mathcal{L}_{\dot{x}_F}^T \delta x_F + [\mathcal{L}_F - \mathcal{L}_{\dot{x}_F}^T \dot{x}_F] \delta t_F - [\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\dot{x}_0}^T \dot{x}_0] \delta t_0 - \mathcal{L}_{\dot{x}_0}^T \delta x_0$$

La stationnarité de δC implique la nullité de tous les monômes.

L'équation d'Euler-Lagrange

La nullité du terme sous l'intégrale fournit l'équation d'Euler (m composantes) :

$$\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt}(\mathcal{L}_{\dot{x}}) = 0$$

Les conditions de stationnarité

Elles résultent de l'annulation des autres termes.

$$-\mathcal{L}_{\dot{x}_0}^T \delta x_0 = 0 \rightarrow x_0 \text{ fixé ou bien } \delta x_0 \text{ orthogonal à } -\mathcal{L}_{\dot{x}_0}$$

$$\mathcal{L}_{\dot{x}_F}^T \delta x_F = 0 \rightarrow x_F \text{ fixé ou bien } \delta x_F \text{ orthogonal à } \mathcal{L}_{\dot{x}_F}$$

$$[\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\dot{x}_0}^T \dot{x}_0] \delta t_0 = 0 \rightarrow t_0 \text{ fixé ou bien } \mathcal{L}_{\dot{x}_0}^T \dot{x}_0 = \mathcal{L}_0$$

$$[\mathcal{L}_F - \mathcal{L}_{\dot{x}_F}^T \dot{x}_F] \delta t_F = 0 \rightarrow t_F \text{ fixé ou bien } \mathcal{L}_{\dot{x}_F}^T \dot{x}_F = \mathcal{L}_F$$

Ces conditions nécessaires du premier ordre supposent la continuité des variables x et \dot{x} et que \mathcal{L} soit continûment différentiable.

Intégrales premières d'Euler

Si on considère l'expression :

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \dot{x}] = \mathcal{L}_t + \mathcal{L}_x^T \dot{x} + \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \ddot{x} - \frac{d}{dt} (\mathcal{L}_{\dot{x}}^T) \dot{x} - \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \ddot{x} \text{ il vient :}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \dot{x}] = \mathcal{L}_t + [\mathcal{L}_x^T - \frac{d}{dt} (\mathcal{L}_{\dot{x}}^T)] \dot{x} \text{ soit compte tenu de l'équation d'Euler :}$$

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \dot{x}] = \mathcal{L}_t \quad (3.33)$$

Si le revenu élémentaire \mathcal{L} est **indépendant du temps ou stationnaire**, on a l'intégrale première :

$$\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \dot{x} = \text{cte}$$

Par ailleurs, si le revenu élémentaire **ne dépend pas de x** , on a l'intégrale première :

$$\mathcal{L}_{\dot{x}} = \text{cte}$$

Remarque : Les théorèmes généraux de la mécanique peuvent être retrouvés à partir de la minimisation de l'intégrale du lagrangien (énergie cinétique moins énergie potentielle) $\mathcal{L} = E_c - E_p$.

Les équations d'Euler correspondent alors aux équations de Lagrange pour un système holonôme non dissipatif :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Dans le cas où certains mouvements sont considérés comme donnés (imposés), on décompose le lagrangien en 3 termes qui sont \mathcal{L}_2 quadratique en fonction des vitesses \dot{x} des mouvements inconnus (non imposés), \mathcal{L}_1 linéaire en fonction des \dot{x} et \mathcal{L}_0 indépendant des \dot{x} . Dans le cas classique sans mouvements imposés, \mathcal{L}_2 représente l'énergie cinétique E_c quadratique en fonction des vitesses et \mathcal{L}_0 représente $-E_p$ l'opposé du potentiel de position. Dans tous les cas :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0 \\ \mathcal{L}_{\dot{x}}^T \dot{x} = 2\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_2) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Cette relation étend le théorème de l'énergie cinétique au cas où de l'énergie est apportée au système pour générer les mouvements imposés. Elle permet d'écrire une équation scalaire énergétique dans laquelle l'énergie inconnue apportée

n'intervient pas. Quand \mathcal{L} est stationnaire, par exemple dans le cas sans mouvement imposés ou avec mouvements imposés à vitesse constante (même des vitesses de rotations qui induisent des forces inertielles), on a l'intégrale première de Painlevé :

$$\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0 = \text{cte}$$

Dans le cas où \mathcal{L} est indépendant d'une composante de position, par exemple la k ième, les équations de Lagrange fournissent l'intégrale première cinétique :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} = \text{cte}$$

la constante est la projection de la quantité de mouvement sur la direction de x_k si x_k est un paramètre de translation et la projection du mouvement cinétique autour de l'axe x_k si x_k est un paramètre de rotation.

Les conditions de Weierstrass-Erdmann

Si \hat{x} est discontinu, pour que l'équation d'Euler soit vérifiée, il faut que $\mathcal{L}_{\hat{x}}$ soit continue aux points de discontinuité de \hat{x} et que $\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\hat{x}}^T \hat{x}$ le soit également.

Conditions nécessaires de minimum de Weierstrass et Legendre

Conditions de Weierstrass Si \hat{x} est à l'optimum \hat{x} au voisinage de l'optimum \hat{x} , l'équation d'Euler implique que :

$$\mathcal{L}(\hat{x}, \dot{\hat{x}}, t) \geq \mathcal{L}\left(\hat{x}, \hat{\dot{x}}, t\right) + \left(\dot{\hat{x}} - \hat{\dot{x}}\right)^T \mathcal{L}_{\dot{\hat{x}}}\left(\hat{x}, \hat{\dot{x}}, t\right)$$

Conditions de Legendre Si \hat{x} est à l'optimum $\mathcal{L}_{\dot{\hat{x}}\dot{\hat{x}}}$ est définie non négative. Cette condition résulte de la précédente.

3.7.6 Application à la commande

Considérons le système dynamique continu :

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

avec \dot{x} continu et à dérivée continue, sous les contraintes :

$$\gamma(x, u, t) \leq 0$$

et considérons le revenu :

$$C = p(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_F} r(x, u, t) dt + s(x_F, t_F)$$

Le problème consiste à trouver les commandes $u(t)$ continues et dérivables par morceau, qui minimisent C .

Les équations d'Euler

Pour résoudre ce problème on introduit le lagrangien :

$$\mathcal{L} = r(x, u, t) + \psi^T(t) (\dot{x} - f(x, u, t)) + \mu^T(t) \gamma(x, u, t) \quad (3.34)$$

On remarquera que :

$$\psi = \mathcal{L}_{\dot{x}}$$

La nouvelle fonction à minimiser s'écrit :

$$C = p(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_F} \mathcal{L}(x, u, t) dt + s(x_F, t_F)$$

D'où les équations d'Euler :

$$\mathcal{L}_x - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{x}} = 0 \rightarrow \dot{\psi} = -f_x^T \psi + \gamma_x^T \mu + r_x$$

Les conditions de Weierstrass-Erdmann impliquent que $\psi(t)$ est continu.

$$\mathcal{L}_u - \frac{d}{dt} \mathcal{L}_{\dot{u}} = 0 \rightarrow -f_u^T \psi + \gamma_u^T \mu + r_u = 0$$

$$\mu_i \gamma_i = 0 \text{ avec } \mu_i \geq 0$$

Les conditions de transversalité

Les revenus supplémentaires $p(x_0, t_0) + s(x_F, t_F)$ apportent une contribution aux conditions de transversalité qui s'écrivent :

$$\delta x_0^T (p_{x_0} - \mathcal{L}_{\dot{x}_0}) = \delta x_0^T (p_{x_0} - \psi_0) = 0 \rightarrow x_0 \text{ fixé ou bien } \delta x_0 \text{ orthogonal à } \psi_0 - p_{x_0}$$

$$\delta x_F (s_{x_F} + \mathcal{L}_{\dot{x}_F}) = \delta x_F (s_{x_F} + \psi_F) = 0 \rightarrow x_F \text{ fixé ou bien } \delta x_F \text{ orthogonal à } \psi_F + S_{x_F}$$

$$[p_{t_0} - (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\dot{x}_0} \dot{x}_0)] \delta t_0 = [p_{t_0} - (r_0 - \psi_0^T f_0)] \delta t_0 = 0$$

$$\rightarrow t_0 \text{ fixé ou bien } p_{t_0} - (r_0 - \psi_0^T f_0) = 0$$

$$[s_{t_F} + (\mathcal{L}_F - \mathcal{L}_{\dot{x}_F} \dot{x}_F)] \delta t_F = [s_{t_F} + (r_F - \psi_F^T f_F)] \delta t_F = 0$$

$$\rightarrow t_F \text{ fixé ou bien } s_{t_F} + (r_F - \psi_F^T f_F) = 0$$

Dans les expressions précédentes on a pris en compte le fait que $\hat{\mu}^T \gamma = 0$ (les contraintes instantanées sont respectées).

Le principe du maximum

Les conditions de Weierstrass s'écrivent ici :

$$\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{x}, u, t) \geq \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{x}, \hat{u}, t) + (\hat{x} - \hat{x})^T \mathcal{L}_{\hat{x}}(\hat{x}, \hat{x}, \hat{u}, t)$$

D'où :

$$\psi^T \hat{x} - \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{x}, \hat{u}, t) \geq \psi^T \hat{x} - \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{x}, u, t)$$

Définissons le Hamiltonien :

$$H(\hat{x}, u, \psi, \lambda, t) = \mathcal{L}_{\hat{x}}^T \hat{x} - \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{x}, u, t) = \psi^T \hat{x} - \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{x}, u, t) \quad (3.35)$$

soit compte tenu de (3.34) :

$$H = \psi^T f(x, u, t) - r(x, u, t) - \mu^T \gamma(x, u, t)$$

Les conditions de Weierstrass impliquent que la commande optimale \hat{u} est celle qui maximise H :

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \psi, \lambda, t) \geq H(\hat{x}, u, \psi, \lambda, t)$$

pour u respectant les contraintes. C'est le principe du maximum démontré directement par Pontryaguine.

Si dans H on ne met pas le terme $\mu^T \gamma$, la relation :

$$\hat{u} = \arg \max_{u | \gamma \leq 0} H$$

se substitue à la deuxième équation d'Euler $-F_u^T \psi + \gamma_u^T \mu + r_u = 0$.

Compte tenu de la définition de H (3.35), la relation (3.33) s'écrit ici :

$$\dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Il est résulte que H est constant dans le cas des problèmes stationnaires.

L'équation d'Hamilton Jacobi

Considérons le revenu sur la portion $[t, \hat{t}_F]$ de trajectoire optimale $\hat{x}(t)$:

$$R(\hat{x}, t) = \int_t^{\hat{t}_F} r(\hat{x}, \hat{u}, \tau) d\tau + s(\hat{x}_F, \hat{t}_F)$$

La trajectoire étant optimale, on a :

$$R(\hat{x}, t) = \int_t^{\hat{t}_F} \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{u}, \psi, \hat{\mu}, \tau) d\tau + s(\hat{x}_F, \hat{t}_F)$$

Considérons une variation de $\hat{x}(t)$ telle que $\delta x_F = \delta t_F = 0$ (car ils sont optimaux). Il vient, compte tenu que toutes les conditions d'optimalité sont réunies à l'exception d'éventuelles variations non optimales pour δt et $\delta x(t)$:

$$\delta R(\hat{x}, t) = -[\mathcal{L} - \mathcal{L}_x^T \dot{\hat{x}}] \delta t - [\mathcal{L}_x^T \delta x(t)]_{(t)}$$

soit :

$$\delta R(\hat{x}, t) = H(\hat{x}, \hat{u}, \psi, t) \delta t - \psi(t)^T \delta x(t)$$

On en déduit :

$$\frac{\delta R(\hat{x}, t)}{\delta t} = H(\hat{x}, \hat{u}, \psi, t)$$

et :

$$\psi(t) = -\frac{\delta R(\hat{x}, t)}{\delta x(t)} = -\hat{R}_x$$

On retrouve l'équation d'Hamilton-Jacobi. De plus le vecteur adjoint a exactement la même signification que dans l'approche par la programmation dynamique.

Chapitre 4

Résumés

4.1 Résumé programmation dynamique inverse

Etat x de dimension m et commande u de dimension l .

Etant données les relations :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Etat.} & : \quad x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n) \\
 \text{Instantanées.} & : \quad \gamma_n(x_n, u_n, n) \leq 0 \\
 \text{Initiales} & : \quad h(x_0) = 0 \\
 \text{Finales} & : \quad l(x_N) = 0
 \end{array}$$

et le **critère** :

$$\min C = p(x_0) + s(x_N) + \sum_{n=0}^{N-1} r(x_n, u_n, n)$$

on cherche la commande optimale $\{\hat{u}_n\}_0^{N-1}$ sur l'horizon $[0, N-1]$ qui minimise C tout en respectant les contraintes (pas de contraintes globales).

Initialisation du revenu terminal :

Si x_N n'est pas contraint on initialise $\hat{R}_k(x_k)$ par $s(x_N)$ avec $k = N$.

Si x_N est pas contraint par r relations $l(x_N) = 0$ et si p le nombre minimal de commandes nécessaires à réaliser ces conditions est tel que $p = \frac{r}{l}$, on calcule les p commandes $\{\tilde{u}_n\}_{N-p}^{N-1}$ imposées. Elles conduisent au revenu :

$$\hat{R}_k(x_k) \triangleq s(x_N) + \sum_{n=k}^{N-1} r(x_n, u_n, n) \text{ avec } k = N - p$$

Si $p > \frac{r}{l}$, la séquence $\{\tilde{u}_n\}_{N-p}^{N-1}$ est calculée par la PNL.

Résolution rétrograde de l'équation récurrente de Bellman :

$$\hat{R}_k(x_k) = \min_{u_k | \gamma_k \leq 0} \{ r(x_k, u_k, k) + \hat{R}_{k+1}(f(x_k, u_k, k)) \}$$

A la dernière étape :

$$\min_{u_0 | \gamma_0 \leq 0} \{ p(x_0) + r(x_0, u_0, 0) + \hat{R}_1(f(x_0, u_0, 0)) \}$$

où seuls sont considérés les x_0 qui vérifient $h(x_0) = 0$.

Les commandes fournies par la programmation dynamique inverse sont des commandes boucle fermée.

4.2 Résumé P.N.L.

Etat x de dimension m et commande u de dimension l .

Etant données les relations :

$$\begin{array}{lll}
 \text{Etat.} & : & x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n) & : & \psi_{n+1} \\
 \text{Instantanées.} & : & \gamma_n(x_n, u_n, n) \leq 0 & : & \mu_n \geq 0 \\
 \text{Globales.} & : & g(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1}) \leq 0 & : & \lambda \geq 0 \\
 \text{Initiales} & : & h(x_0) = 0 & : & \eta \\
 \text{Finales} & : & l(x_N) = 0 & : & \xi
 \end{array}$$

et le critère :

$$\min C = C(x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1})$$

on cherche la commande optimale $\{\hat{u}_n\}_0^{N-1}$ sur l'horizon $[0, N-1]$ qui minimise C tout en respectant les contraintes.

On considère le lagrangien :

$$\mathcal{L} = C + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^T (f_n - x_{n+1}) + \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^T \gamma_n + \lambda^T g + \eta^T h + \xi^T l$$

La commande optimale est donnée par $\mathcal{L}_{u_n} = 0$:

$$C_{u_n} + f_{u_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{u_n}^T \mu_n + g_{u_n}^T \lambda = 0$$

L'intégration des équations récurrentes du système adjoint ($\mathcal{L}_{x_n} = 0$) et de l'état :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Syst. Adj.} & : \quad \psi_n = C_{x_n} + f_{x_n}^T \psi_{n+1} + \gamma_{x_n}^T \mu_n + g_{x_n}^T \lambda \\
 \text{Etat syst.} & : \quad x_{n+1} = f_n(x_n, u_n, n)
 \end{array}$$

en fonction de paramètres initiaux inconnus, associées aux conditions de transversalité :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_0 \text{ fixé} & \rightarrow \psi_0 \text{ libre} \\ x_0 \text{ libre} & \rightarrow \psi_0 = 0 \\ h(x_0) = 0 & \rightarrow \psi_0 = -h_{x_0}^T \eta \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_N \text{ fixé} & \rightarrow \psi_N \text{ libre} \\ x_N \text{ libre} & \rightarrow \psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda \\ l(x_N) = 0 & \rightarrow \psi_N = C_{x_N} + g_{x_N}^T \lambda + l_{x_N}^T \xi \end{array} \right.$$

et aux contraintes initiales et terminales conduisent à un problème aux deux bouts.

Remarque : Différents cas pour les paramètres de Kuhn et Tucker :

$$\begin{array}{ll}
 \mu_n^i \gamma_n^i = 0 & \rightarrow \text{Si} \begin{cases} \mu_n^i = 0, \text{ vérifier que } \gamma_n^i \leq 0 \\ \gamma_n^i = 0, \text{ vérifier que } \mu_n^i \geq 0 \end{cases} \\
 \lambda^i g^i = 0 & \rightarrow \text{Si} \begin{cases} \lambda^i = 0, \text{ vérifier que } g^i \leq 0 \\ g^i = 0, \text{ vérifier que } \lambda^i \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Commande en boucle fermée :

$$\hat{u}_0 = e(x_0, 0, N) \rightarrow \hat{u}_{kBF} = e(x_{mesk}, 0, N - k)$$

4.3 Résumé principe du maximum

Etat x de dimension m et commande u de dimension l .

Etant données les relations :

$$\begin{array}{lll}
 \text{Etat.} & : & \dot{x} = f(x, u, t) & : & \psi(t) \\
 \text{Instantanées.} & : & \gamma(x, u, t) \leq 0 & : & \mu(t) \geq 0 \\
 \text{Globales.} & : & \int_{t_0}^{t_F} g(x, u, t) dt \leq E & : & \lambda \geq 0 \\
 \text{Initiales} & : & h(x_0, t_0) = 0 & : & \eta \\
 \text{Finales} & : & l(x_F, t_F) = 0 & : & \xi
 \end{array}$$

et le critère :

$$\min C = p(x_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_F} r(x, u, t) dt + s(x_F, t_F)$$

on cherche la commande optimale $u(t)$ sur l'horizon $[t_0, t_F]$ qui minimise C tout en respectant les contraintes.

On pose le hamiltonien :

$$H = \psi^T f - r - \mu^T \gamma - \lambda^T g$$

La commande optimale maximise le hamiltonien :

$$\hat{u}, \hat{\mu} = \operatorname{args} \Big|_{\mu > 0} \max H$$

Elle fournit les équations différentielles du système adjoint et de l'état :

$$\begin{array}{ll}
 \text{Syst. Adj.} & : \quad \dot{\psi} = -H_x(x, \psi, \hat{u}, \hat{\mu}, t) \\
 \text{Etat syst.} & : \quad \dot{x} = f(x, \psi, \hat{u}, t)
 \end{array}$$

Leur intégration, en fonction de paramètres initiaux inconnus, associée aux conditions de transversalité :

$$\begin{array}{llll}
 x_0 \text{ fixé} & \rightarrow & \psi_0 \text{ libre} & & x_F \text{ fixé} & \rightarrow & \psi_F \text{ libre} \\
 x_0 \text{ libre} & \rightarrow & \psi_0 = p_{x_0} & & x_F \text{ libre} & \rightarrow & \psi_F = -s_{x_F} \\
 h(x_0) = 0 & \rightarrow & \psi_0 = p_{x_0} - h_{x_0}^T \eta & & l(x_F) = 0 & \rightarrow & \psi_F = -s_{x_F} + l_{x_F}^T \xi \\
 t_0 \text{ fixé} & \rightarrow & H_0 \text{ libre} & \text{et} & t_F \text{ fixé} & \rightarrow & H_F \text{ libre} \\
 t_0 \text{ libre} & \rightarrow & H_0 = -p_{t_0} & & t_F \text{ libre} & \rightarrow & H_F = s_{t_F} \\
 h(x_0, t_0) = 0 & \rightarrow & \begin{array}{l} \psi_0 = p_{x_0} - h_{x_0}^T \eta \\ H_0 = -p_{t_0} + h_{t_0}^T \eta \end{array} & & l(x_F, t_F) = 0 & \rightarrow & \begin{array}{l} \psi_F = -s_{x_F} + l_{x_F}^T \xi \\ H_F = s_{t_F} - l_{t_F}^T \xi \end{array}
 \end{array}$$

et aux contraintes initiales et terminales conduisent à un problème aux deux bouts.

Remarque : Différents cas pour les paramètres de Kuhn et Tucker :

$$\begin{array}{ll}
 \mu_n^i \gamma_n^i = 0 & \rightarrow \quad \text{Si} \begin{cases} \mu_n^i = 0, \text{ vérifier que } \gamma_n^i \leq 0 \\ \gamma_n^i = 0, \text{ vérifier que } \mu_n^i \geq 0 \end{cases} \\
 \lambda^i g^i = 0 & \rightarrow \quad \text{Si} \begin{cases} \lambda^i = 0, \text{ vérifier que } \int_{t_0}^{t_F} g^i dt \leq E \\ \int_{t_0}^{t_F} g^i dt = E, \text{ vérifier que } \lambda^i \geq 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Etudes des trajectoires singulières : Si

$$1. |u_i| \leq U_{i\max} \text{ et } H = H_i(\psi, x)u_i + \dots$$

2. pour tout $n \geq 0$, les équations $\frac{d^n}{dt^n} H_i = 0$ sont compatibles avec le problème,

alors \hat{u}_i peut être indéterminé sur un intervalle de temps fini. Les trajectoires singulières résultent de l'exploitation des équations $\frac{d^n}{dt^n} H_i = 0$.

Commande en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\hat{u}(t_0) &= e(x(t_0), t_0, t_F - t_0) \\ \rightarrow \hat{u}_{BF}(t) &= e(x_{mes}(t), t, t_F - t)\end{aligned}$$

Cas particuliers :

- Problème **stationnaire** : $\hat{H} = \text{cte}$
- Problème **stationnaire horizon libre** : $\hat{H} = 0$

Bibliographie

- [1] Richard Bellman. “*Dynamic programming*”. Princeton University Press. 1957.
- [2] R. Boudarel, J. Delmas et P. Guichet. “*Commande optimale des processus*”. Tome 1 : “*Concepts fondamentaux de l’automatique*”, 1967. Tome 2 : “*Programmation non linéaire et ses applications*”, 1968. Tome 3 “*Programmation dynamique et ses applications*”, 1968. Tome 4 “*Méthodes variationnelles et leurs applications*”, 1969. Dunod. Paris
- [3] Claude Barrouil et Jean-Loup Farges. “*Commande optimale des processus*”. Polycopié de l’INPT-ENSEEIH. Edition 1987.
- [4] Robert E. Larson. “*State Increment Dynamic Programming*”. Elsevier. New-York. 1968.

