

---

# Modélisation de la dynamique des systèmes matériels multi-corps

---

**Version 1.0**

18 février 2009

Michel Llibre

---

Ref. DCSD-2009\_008-NOT-007-1.0





# Table des matières

<b>1 Mécanique rationnelle classique</b>	<b>7</b>
1.1 Principes de la mécanique	7
1.1.1 Principes fondamentaux	7
1.1.2 Loi fondamentale	7
1.1.3 Résultats fondamentaux	7
1.2 Grandeurs dynamiques et cinétiques pour des ensembles de particules	8
1.2.1 Grandeurs dynamiques	9
1.2.2 Grandeurs cinétiques	11
1.3 Théorèmes généraux pour un ensemble de particules	12
1.3.1 Théorème de la résultante cinétique	12
1.3.2 Théorème du moment cinétique	13
1.3.3 Théorème de l'énergie cinétique	14
1.3.4 Les intégrales premières du mouvement	15
1.4 Application aux solides indéformables	16
1.4.1 Moments cinétique et dynamique	16
1.4.2 Energie cinétique et puissance	17
1.4.3 Utilisation du repère principal d'inertie en G	18
1.4.4 Propriétés des tenseurs d'inertie	18
1.4.5 Théorèmes de Koenig	20
1.5 Systèmes de solides	21
1.5.1 Liaisons par contact entre solides	21
1.5.2 Paramètres de configuration, liaisons non holonomes et degrés de liberté	25
<b>2 Mécanique analytique</b>	<b>29</b>
2.1 Loi des travaux virtuels élémentaires	29
2.2 Formalisme de Lagrange	30
2.2.1 Identités remarquables préliminaires	30
2.2.2 Formule de Lagrange	31
2.2.3 Expression des forces généralisées	32
2.2.4 Equations de Lagrange pour un système holonôme	36
2.2.5 Lagrangien d'un système	36
2.2.6 Multiplicateurs de Lagrange	36
2.2.7 Théorème de l'énergie cinétique dans le formalisme de Lagrange	37

2.2.8	Intégrales premières de l'énergie au sens de Lagrange . . . . .	39
2.2.9	Intégrales premières cinétiques au sens de Lagrange . . . . .	39
2.2.10	Exemples de mise en oeuvre . . . . .	40
2.3	Les équations de Kane . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Modèle dynamique d'un robot "série"</b>	<b>53</b>
3.1	La structure du modèle dynamique . . . . .	53
3.1.1	Les équations de Lagrange . . . . .	53
3.1.2	La puissance des forces centrifuge et Coriolis . . . . .	55
3.2	Modèle complet par les théorèmes généraux . . . . .	56
3.2.1	Algorithme de Newton-Euler . . . . .	57
3.2.2	Algorithme de Mampey . . . . .	61
3.2.3	Modèle de simulation . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Modèle dynamique d'un système multi-corps</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Les paramètres de configuration et leurs dérivées . . . . .	65
4.2.1	Les paramètres de position, vitesse et accélération . . . . .	66
4.2.2	Les paramètres d'attitude et vitesse de rotation . . . . .	66
4.2.3	Les contraintes cinématiques . . . . .	67
4.3	Le modèle dynamique . . . . .	70
4.4	Mise en oeuvre du modèle . . . . .	71
4.4.1	Les liaisons non-holonômes . . . . .	71
4.4.2	Le système différentiel matriciel . . . . .	72
4.4.3	Résolution du système différentiel . . . . .	72
4.4.4	Corrections pour respect des contraintes . . . . .	73
4.4.5	Cas particulier de l'intégration de l'attitude . . . . .	73
4.5	Modélisation détaillée des contraintes cinématiques . . . . .	74
4.5.1	Contraintes géométriques de base . . . . .	75
4.5.2	Mécanismes réels et autres contraintes géométriques . . . . .	79
4.5.3	Projection des contraintes . . . . .	82
	<b>Bibliographie</b>	<b>88</b>

# Introduction

Les éléments présentés dans cette partie ont pour objectif l'obtention des équations différentielles qui décrivent les mouvements d'un certain nombre de corps massiques soumis à des efforts divers. Ces mouvements sont décrits au moyen de paramètres de configuration (coordonnées, angles, distances, etc...). Les équations différentielles du mouvement se présentent généralement comme des équations implicites liant ces paramètres, leurs dérivées premières et secondes, et des efforts divers.

- Si on considère que le mouvement est donné, la résolution des équations en fonction des efforts qui interviennent au cours du mouvement, permet de calculer ces derniers. Cette démarche est utilisée pour dimensionner les moteurs qui sont utilisés pour produire le mouvement.
- Si on considère que les efforts sont donnés, la résolution des équations en fonction des dérivées d'ordre le plus élevé (seconde en général) des paramètres de configuration, permet de calculer ces dernières. Leur intégration permet de trouver le mouvement résultant des efforts appliqués.

Le premier chapitre donne les éléments fondamentaux de la mécanique rationnelle classique. Ces éléments constituent la base commune qui permet d'établir les modèles cherchés, ou des méthodes pour établir ces modèles.

Le deuxième chapitre présente des éléments de mécanique analytique. Ces sont des méthodes systématiques de modélisation élaborées à partir des éléments fondamentaux. Nous présentons en premier la méthode des travaux virtuels qui est à la base de la plupart des méthodes analytiques, puis la méthode de Lagrange et la méthode de Kane.

Le troisième chapitre présente des méthodes spécifiques au cas de la modélisation des systèmes mécaniques articulés en structure arborescente de type "robot série".

Le dernier chapitre présente une méthode générale de modélisation des systèmes multi-corps.

Le lecteur désireux d'approfondir certains aspects présentés dans les deux premiers chapitres pourra consulter l'ouvrage de D. Bellet [1].



# Chapitre 1

## Mécanique rationnelle classique

Nous présentons dans ce chapitre les éléments fondamentaux de la mécanique rationnelle classique. Tout d'abord les principes fondamentaux (Newton, action-réaction), puis les grandeurs cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique) et dynamiques (forces et moments dynamiques), puis les théorèmes généraux pour des ensembles de particules (corps solides ou non), pour des solides indéformables et enfin pour des systèmes de solides.

### 1.1 Principes de la mécanique

#### 1.1.1 Principes fondamentaux

L'obtention des équations différentielles du mouvement des corps massiques soumis ou non à des forces extérieures repose sur les principes fondamentaux de la mécanique classique qui affirment l'existence d'un repère privilégié dit galiléen ou absolu ou inertiel dans lequel une particule, qui n'est soumise à aucune influence extérieure, a une accélération nulle.

Le principe de la relativité galiléenne des vitesses matérielles indique de plus que tous les repères en translation uniforme par rapport au précédent sont également des repères galiléens.

#### 1.1.2 Loi fondamentale

La loi fondamentale de la mécanique pour une particule M unique s'écrit :

$$\vec{f} = m \vec{\gamma} \quad (1.1)$$

- $m$  scalaire *absolu* (indépendant de tout repère) qui ne dépend que de la particule est appelé sa masse inerte,
- $\vec{f}$  est un vecteur *absolu* qui dépend des phénomènes physiques externes, de la particule, de sa position et éventuellement de sa vitesse,
- $\vec{\gamma}$  est l'accélération *absolue* de la particule, c'est-à-dire *relative* à un repère galiléen.

L'équation (1.1) est souvent appelée équation de Newton.

#### 1.1.3 Résultats fondamentaux

##### Principe de superposition des états

L'accélération prise par une particule M soumise à l'action de deux forces est la somme des accélérations prises en présence de chaque force individuellement. Ce principe résulte directement de la loi fondamentale.

### Principe de l'égalité de l'action et de la réaction

Pour deux particules isolées  $M_1$  et  $M_2$  la somme des forces d'action de  $M_1$  sur  $M_2$  et de réaction de  $M_2$  sur  $M_1$  est nulle.

### Principe de l'additivité des masses inertes

Les masses sont toujours positives. La réunion de deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  est équivalent à une particule unique de masse  $m_1 + m_2$ .

### Masse grave et masse inerte

Considérons l'existence d'un champ de gravitation  $\vec{g}$  qui produit sur une particule  $M$  une force  $\vec{f}$  proportionnelle à  $\vec{g}$  de type  $\vec{f} = m_g \vec{g}$ , où  $m_g$  est appelé masse grave de la particule. Il résulte de la loi fondamentale que  $m/m_g = \vec{g}/\vec{\gamma}$ . Or comme on constate que  $\vec{g}/\vec{\gamma} = \text{cte}$ , il en résulte que  $m/m_g = \text{cte}$ . On peut donc considérer que masses graves et inertes sont identiques.

### Forces réelles et forces d'inertie

La relation  $\vec{f}_R = m \vec{\gamma}_{abs}$  s'écrit également  $\vec{f}_R + (-m \vec{\gamma}_{abs}) = 0$  où  $-m \vec{\gamma}_{abs}$  est appelé la force d'inertie (totale) du corps et s'interprète en disant que la somme des forces réelle et d'inertie est nulle.

Certaines pratiques (que nous déconseillons) visent à écrire les lois de la dynamique dans un repère non galiléen, en faisant intervenir des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis. La décomposition de la loi fondamentale fournit :

$$\begin{aligned}\vec{f}_R &= m \vec{\gamma}_{abs} \\ &= m (\vec{\gamma}_{rel} + \vec{\gamma}_{ent} + \vec{\gamma}_{cor})\end{aligned}$$

où  $\vec{f}_R$  est la force réelle appliquée à la particule. En considérant l'accélération  $\vec{\gamma}_{rel}$  relative à un repère non galiléen, on aura :

$$\vec{f}_R + \vec{f}_{ent} + \vec{f}_{cor} = m \vec{\gamma}_{rel}$$

avec :

- $\vec{f}_{ent} = -m \vec{\gamma}_{ent}$  est la force d'inertie d'entraînement,
- $\vec{f}_{cor} = -m \vec{\gamma}_{cor}$  est la force d'inertie de Coriolis.

## 1.2 Grandeurs dynamiques et cinétiques pour des ensembles de particules

On considère un ensemble de particules  $M_i$  de masse  $m_i$ , chacune soumise à une force  $\vec{f}_i$  (éventuellement nulle), repérées relativement à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_O = \{O, \mathcal{B}_O\}$ . Dans ce qui les sommes  $\Sigma$  sont étendues à l'ensemble des particules.

Nous noterons  $M$  la masse totale et  $G$  le centre d'inertie de l'ensemble des particules (l'ensemble peut être fluide ou solide) :

$$\begin{aligned}M &= \sum m_i \\ \vec{0} &= \sum m_i \overrightarrow{GM_i}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Nous noterons :

$$\begin{aligned}\vec{V}_i &= \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{OM_i}) \\ \vec{\gamma}_i &= \frac{d^2}{dt^2}_{/O} (\overrightarrow{OM_i})\end{aligned}$$

les vitesse et accélération absolues (relatives au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_O$ ) des particules  $M_i$  et  $\vec{V}_G$  et  $\vec{\gamma}_G$  les vitesse et accélération absolues du point G.

Nous noterons :

$$\vec{v}_{ra_i} = \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{GM_i})$$

$$\vec{\gamma}_{ra_i} = \frac{d^2}{dt^2}_{/O} (\overrightarrow{GM_i})$$

les vitesse et accélération des particules  $M_i$  relatives à un référentiel d'origine G, *parallèle au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_O$* . Comme les dérivations sont effectuées par rapport à une base d'orientation galiléenne, on peut affecter à ces vitesse et accélération le qualificatif d'absolues, mais comme l'origine G des vecteurs peut être animée d'un mouvement qui n'est pas en translation uniforme par rapport à un repère galiléen, on doit également affecter à ces vitesse et accélération le qualificatif de relatives, d'où l'indice "ra".

**Remarque :**

$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_G + \vec{v}_{ra_i}$$

$$\vec{\gamma}_i = \vec{\gamma}_G + \vec{\gamma}_{ra_i}$$

Les dérivations successives de (1.2) impliquent :

$$\vec{0} = \sum m_i \vec{v}_{ra_i} \quad (1.3)$$

$$\vec{0} = \sum m_i \vec{\gamma}_{ra_i} \quad (1.4)$$

et

$$\sum m_i \vec{V}_i = M \vec{V}_G \quad (1.5)$$

$$\sum m_i \vec{\gamma}_i = M \vec{\gamma}_G \quad (1.6)$$

### 1.2.1 Grandeurs dynamiques

On appelle grandeurs dynamiques des grandeurs qui cumulent les forces appliquées (*dunamis* = force en grec).

#### Résultante dynamique générale

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_i$$

Si on décompose les forces, en forces internes (c'est-à-dire forces produites par des particules du système agissant sur d'autres particules du système) et forces externes (produites par des éléments extérieurs au système et agissant sur les particules du système), en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, la somme des forces internes sera nulle :

$$\sum \vec{f}_{int_i} = 0$$

Il en résulte que :

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_{ext_i}$$

*Pour calculer la résultante dynamique de toutes les forces, on peut ne prendre en compte que les forces extérieures.*

### Moment dynamique résultant en un point A

On peut l'exprimer sous forme vectorielle

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \times \vec{f}_i$$

ou sous forme d'un tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_A &= \sum \overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{f}_i \\ &= \sum f_i \overrightarrow{AM}_i^T - \overrightarrow{AM}_i f_i^T \end{aligned}$$

Or, le moment dynamique des forces internes est nul :  $\vec{0} = \sum \overrightarrow{AM}_i \times \vec{f}_{int_i}$  (évident en regroupant les moments des couples action et réaction qui s'exercent au même point), d'où en remplaçant chaque  $\vec{f}_i$  par  $\vec{f}_{ext_i} + \vec{f}_{int_i}$  :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \times \vec{f}_{ext_i}$$

Pour calculer le moment dynamique résultant de toutes les forces, on peut ne prendre en compte que les forces extérieures.

#### Changement de point

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A &= \sum (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}_i) \times \vec{f}_i \\ &= \overrightarrow{AB} \times \vec{F} + \sum \overrightarrow{BM}_i \times \vec{f}_i \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

#### Utilisation de G

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_G + \overrightarrow{AG} \times \vec{F}$$

#### Remarque :

Si la résultante  $\vec{F}$  est nulle alors  $\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_G$ .

### Torseur dynamique résultant en un point A

Le couple  $(\vec{F}, \vec{\mathcal{M}}_A)$  est appelé torseur dynamique résultant en A de l'ensemble des forces  $\vec{f}_i$ .

### Puissance de l'ensemble des forces

$$\Pi = \sum \vec{f}_i \cdot \vec{V}_i$$

#### Utilisation de G

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum \vec{f}_i \cdot (\vec{V}_G + \vec{v}_{ra_i}) \\ \Pi &= \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{ra_i} \end{aligned}$$

soit :

$$\Pi = \Pi_G + \Pi_{ra_G}$$

avec :

- $\Pi_G = \vec{F} \cdot \vec{V}_G$  puissance de la résultante dynamique (on peut ne prendre en compte que les forces externes) dans le mouvement *du* centre d'inertie,
- $\Pi_{raG} = \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{r_i}$  puissance des forces (on doit prendre en compte les forces internes et externes) dans le mouvement *autour* du centre d'inertie.

Remarque : Si  $\vec{F} = 0$  alors  $\Pi = \Pi_{raG}$ .

*La puissance d'un système de forces à résultante nulle peut être calculée dans le mouvement autour du centre d'inertie (avec un repère d'orientation galiléenne)*

## 1.2.2 Grandeurs cinétiques

On appelle grandeur cinétique, ou grandeur d'impulsion, ou quantité de mouvement de la particule  $M_i$  le vecteur  $m_i \vec{V}_i$ .

### Résultante cinétique

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{V}_i$$

#### Utilisation du centre d'inertie

D'après (1.5) :

$$\vec{p} = M \vec{V}_G$$

### Moment cinétique résultant en un point A

On peut l'exprimer sous forme vectorielle

$$\vec{\mathcal{H}}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \times m_i \vec{V}_i$$

ou sous forme d'un tenseur antisymétrique :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{H}}_A &= \sum \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}_i \\ &= \sum m_i (V_i \overrightarrow{AM}_i^T - \overrightarrow{AM}_i V_i^T) \end{aligned}$$

#### ATTENTION :

$\vec{V}_i = \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{OM}_i) \neq \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{AM}_i)$ . Dans ces formules les  $\vec{V}_i$  sont des vitesses absolues.

#### Changement de point

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}_A &= \sum (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}_i) \times m_i \vec{V}_i \\ &= \overrightarrow{AB} \times \vec{p} + \sum \overrightarrow{BM}_i \times m_i \vec{V}_i \end{aligned}$$

soit :

$$\vec{\mathcal{H}}_A = \vec{\mathcal{H}}_B + \overrightarrow{AB} \times \vec{p}$$

#### Utilisation de G

$$\vec{\mathcal{H}}_A = \vec{\mathcal{H}}_G + \overrightarrow{AG} \times \vec{p}$$

Remarque : En utilisant (1.2) et (1.3) on obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_G &= \sum \overrightarrow{GM}_i \times m_i (\vec{V}_G + \vec{v}_{ra_i}) \\ &= \sum \overrightarrow{GM}_i \times m_i \vec{v}_{ra_i} \\ &= \sum (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}_i) \times m_i \vec{v}_{ra_i} \\ &= \sum \overrightarrow{BM}_i \times m_i \vec{v}_{ra_i}\end{aligned}$$

$\vec{\mathcal{H}}_G$  peut être calculé en un point quelconque B mais avec des vitesses relatives à G dans un repère d'orientation galiléenne.

### Torseur cinétique résultant en A

Le couple  $(\vec{p}, \vec{\mathcal{H}}_A)$  est appelé torseur cinétique résultant en A de l'ensemble des quantités cinétiques  $m_i \vec{V}_i$ .

### Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{V}_i\|^2$$

#### Utilisation de G

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{V}_G + \vec{v}_{ra_i}\|^2 \\ T &= \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{V}_G\|^2 + \sum m_i (\vec{V}_G \cdot \vec{v}_{ra_i}) + \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{v}_{ra_i}\|^2\end{aligned}$$

Or le terme central est nul d'après (1.3), d'où :

$$T = \frac{1}{2} M \|\vec{V}_G\|^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{v}_{ra_i}\|^2$$

soit

$$T = T_G + T_{ra_G}$$

avec :

- $T_G = \frac{1}{2} M \|\vec{V}_G\|^2$  énergie cinétique de la masse totale affectée au mouvement du centre d'inertie,
- $T_{ra_G} = \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{v}_{ra_i}\|^2$  énergie cinétique des particules dans leur mouvement *autour* du centre d'inertie.

## 1.3 Théorèmes généraux pour un ensemble de particules

### 1.3.1 Théorème de la résultante cinétique

La sommation de la relation (1.1) étendue à l'ensemble des particules conduit à :

$$\vec{F} = M \vec{\gamma}_G$$

mais également :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum m_i \frac{d}{dt}_{/O} (\vec{V}_i) \\ &= \frac{d}{dt}_{/O} \left( \sum m_i \vec{V}_i \right)\end{aligned}$$

car chaque masse  $m_i$  est constante, d'où :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}_{/O} (\vec{p}) \quad (1.7)$$

*La dérivée par rapport au temps, relativement à un repère galiléen, de la résultante cinétique d'un système matériel, est égale à la résultante dynamique des forces extérieures au système.*

### 1.3.2 Théorème du moment cinétique

Considérons un point géométrique quelconque A. Dérivons

$$\vec{\mathcal{H}}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \times m_i \vec{V}_i$$

relativement au repère galiléen  $\mathcal{R}_O$ .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{/O} (\vec{\mathcal{H}}_A) &= \sum \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{AM}_i) \times m_i \vec{V}_i + \sum \overrightarrow{AM}_i \times \frac{d}{dt}_{/O} (m_i \vec{V}_i) \\ &= -\vec{V}_A \times \vec{p} + \sum \overrightarrow{AM}_i \times m_i \vec{\gamma}_i\end{aligned}$$

En remplaçant dans :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \times \vec{f}_i$$

$\vec{f}_i$  par  $m_i \vec{\gamma}_i$  il vient :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum \overrightarrow{AM}_i \times m_i \vec{\gamma}_i$$

d'où :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \frac{d}{dt}_{/O} (\vec{\mathcal{H}}_A) + \vec{V}_A \times \vec{p}$$

que l'on écrit également :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \frac{d}{dt}_{/O} (\vec{\mathcal{H}}_A) + M \vec{V}_A \times \vec{V}_G \quad (1.8)$$

*La dérivée par rapport au temps, relativement à un repère galiléen, du moment cinétique d'un système matériel, en un point A où la vitesse est soit parallèle à celle du centre d'inertie, soit nulle, est égale au moment dynamique en ce point des forces extérieures au système.*

**Attention :** Dans cette formule  $\vec{V}_A$  est la vitesse absolue d'un point géométrique A. Considérons par exemple le point de contact A d'une roue de voiture avec le sol. Supposons que la voiture avance en ligne droite à la vitesse constante  $\vec{V}$ , sans glisser. On a alors  $\vec{V}_A = \vec{V}$  vitesse de la voiture, alors que le point de contact lié au sol à une vitesse nulle (le sol ne bouge pas) et que le point de contact lié à la roue a également une vitesse nulle au moment où il touche le sol (puisque le pneu ne glisse pas sur le sol).

### Appliqué au centre d'inertie G

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d}{dt}_{/O} \left( \vec{\mathcal{H}}_G \right)$$

Rappelons que  $\vec{\mathcal{H}}_G$  peut être calculé par rapport à un point quelconque, avec des vitesses relatives à G dans une base d'orientation galiléenne.

### Appliqué en un point fixe

Si  $A \equiv O$  (ou en translation uniforme dans un repère galiléen), alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d}{dt}_{/O} \left( \vec{\mathcal{H}}_O \right)$$

### En un point quelconque

La relation (1.8) peut être simplifiée en remplaçant  $\vec{\mathcal{H}}_A$  par  $\vec{\mathcal{H}}_G + \vec{AG} \times \vec{p}$  quand on connaît  $\vec{\mathcal{H}}_G$ . Elle devient alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \frac{d}{dt}_{/O} \left( \vec{\mathcal{H}}_G \right) + M \left( \vec{V}_G - \vec{V}_A \right) \times \vec{p} + M \vec{AG} \times \vec{\gamma}_G + M \vec{V}_A \times \vec{V}_G$$

soit :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \frac{d}{dt}_{/O} \left( \vec{\mathcal{H}}_G \right) + M \vec{AG} \times \vec{\gamma}_G$$

En fait on retrouve  $\vec{\mathcal{M}}_G = \frac{d}{dt}_{/O} \left( \vec{\mathcal{H}}_G \right)$  étant donné que :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_G + \vec{AG} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_G + M \vec{AG} \times \vec{\gamma}_G$$

### Utilisation des torseurs

Pour les passionnés d'écriture compacte, on peut regrouper les théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique en une seule équation :

$$\begin{pmatrix} \vec{F} \\ \vec{\mathcal{M}}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}_{/O} & 0 \\ \vec{V}_A & \frac{d}{dt}_{/O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{\mathcal{H}}_A \end{pmatrix}$$

où  $\vec{V}_A$  est la vitesse absolue d'un point géométrique A.

### 1.3.3 Théorème de l'énergie cinétique

En dérivant<sup>1</sup>  $T = T_G + T_{ra_G}$ , il vient :

$$\frac{d}{dt} T = M \vec{\gamma}_G \cdot \vec{V}_G + \sum m_i \vec{\gamma}_{ra_i} \cdot \vec{v}_{ra_i}$$

1. Pour la dérivation d'un scalaire, il n'y a pas lieu préciser de repère de dérivation, mais pour dériver les vecteurs intervenant dans le produit scalaire  $\|\vec{V}_G\|^2 = \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G$  on choisit un repère de dérivation galiléen, pour obtenir plus simplement le résultat recherché.

soit :

$$\frac{d}{dt}T = \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{ra_i}$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt}T = \Pi = \Pi_G + \Pi_{ra_G} \quad (1.9)$$

En remarquant que :

$$\frac{d}{dt}T_G = M \vec{\gamma}_G \cdot \vec{V}_G = \Pi_G$$

il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T &= \Pi \\ \frac{d}{dt}T_G &= \Pi_G \\ \frac{d}{dt}T_{ra_G} &= \Pi_{ra_G} \end{aligned}$$

Rappelons que

1. pour  $\Pi_G = \vec{F} \cdot \vec{V}_G$ , on peut ne prendre en compte que les forces externes et il faut considérer les vitesses absolues,
2. pour  $\Pi_{ra_G} = \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{ra_i}$ , il faut prendre en compte toutes les forces (internes et externes) et on peut ne considérer que les vitesses relatives à un repère centré en G, d'orientation galiléenne.

En dehors de ces découpages particuliers, dans le cas général, *la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un système matériel est égale à la puissance dans un repère galiléen de toutes les forces appliquées aux particules du système.*

Ce théorème n'a d'intérêt que si les forces internes ne travaillent pas (absence de frottement ou cas du roulement sans glissement par exemple).

### 1.3.4 Les intégrales premières du mouvement

Les intégrales premières du mouvement sont des équation différentielles liant les paramètres de position et leurs dérivées premières, mais pas les dérivées secondes. Dans certains cas ces équations sont extrêmement intéressantes car elles permettent d'obtenir directement la valeur de la vitesse d'un paramètre de position. On distingue trois types d'intégrales premières.

#### Composante constante de la résultante cinétique

S'il existe une *direction*  $\vec{u}$  fixe dans un repère galiléen, telle que  $\vec{F} \cdot \vec{u} = 0$ , il vient en utilisant (1.7) :

$$p \cdot \vec{u} = \text{cte}$$

car  $\frac{d}{dt|_O}(\vec{u}) = \vec{0}$ .

#### Composante constante du moment cinétique

S'il existe une *direction*  $\vec{u}$  fixe dans un repère galiléen, telle que  $\vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{u} = 0$  et tel que  $(\vec{V}_A \times \vec{V}_G) \cdot \vec{u} = 0$  il vient en utilisant (1.8) :

$$\vec{\mathcal{H}}_A \cdot \vec{u} = \text{cte}$$

La condition  $(\vec{V}_A \times \vec{V}_G) \cdot \vec{u} = 0$  est en particulier vérifiée quand A est fixe, quand A est en G, ou quand  $\vec{u}$  est aligné avec  $\vec{V}_A$  ou  $\vec{V}_G$ .

### Energie mécanique constante

Si  $\Pi = \Pi_G + \Pi_{raG}$  est une dérivée totale par rapport au temps d'une fonction scalaire  $-V(M)$  des positions  $M$  des particules :

$$\Pi = -\frac{dV}{dt}$$

alors en intégrant (1.9) :

$$T + V = \text{cte}$$

Ceci arrive en particulier lorsque les forces intérieures ne travaillent pas (pas de dissipation interne), les forces extérieures de liaison ne travaillent pas (pas de frottements ou roulement sans glissement) et les forces extérieures à distance sont dues à un champ de gradient. Dans ce cas  $\Pi_{raG} = 0$  et

$$\begin{aligned} \Pi_G &= \sum -\overrightarrow{\text{grad}V(M_i)} \cdot \overrightarrow{V_i} \\ &= \sum -\left(\overrightarrow{\frac{\partial V(M_i)}{\partial M_i}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\frac{dM_i}{dt}}\right) \\ &= -\sum \frac{dV(M_i)}{dt} \\ &= -\frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

en posant :

$$V = \sum V(M_i)$$

## 1.4 Application aux solides indéformables

Le Théorème de la résultante cinétique est inchangé, par contre le fait que les vitesses des particules du solide constituent un champ obéissant à la loi de composition des vitesses, permet de mettre en évidence une nouvelle quantité inertielle dans les autres théorèmes, le tenseur d'inertie.

Considérons un repère  $\mathcal{R}_A = \{A, \mathcal{B}_A\}$  lié au solide. Il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_i} &= \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{OM_i}) = \frac{d}{dt}_{/O} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_i}) \\ &= \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\Omega_{OA}} \times \overrightarrow{AM_i} \end{aligned}$$

car  $\frac{d}{dt}_{/A} (\overrightarrow{AM_i}) = \overrightarrow{0}$  étant donné que toutes les particules sont fixes par rapport à  $\mathcal{R}_A$ .

**Attention** : ici et dans ce qui suit  $\overrightarrow{V_A}$  est la vitesse d'un point A lié au solide.

### 1.4.1 Moments cinétique et dynamique

En exprimant la valeur de  $\overrightarrow{V_i}$  dans  $\overrightarrow{\mathcal{H}}_A = \sum \overrightarrow{AM_i} \times m_i \overrightarrow{V_i}$  il vient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{H}}_A &= \sum \overrightarrow{AM_i} \times m_i (\overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\Omega_{OA}} \times \overrightarrow{AM_i}) \\ &= M \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{V_A} - \sum m_i \overrightarrow{AM_i} \times (\overrightarrow{AM_i} \times \overrightarrow{\Omega_{OA}}) \end{aligned}$$

Cette relation fait apparaître le tenseur d'inertie en A du solide :

$$\mathbb{I}_A = -\sum m_i \widetilde{\overrightarrow{AM_i}}^2 = \sum m_i \widetilde{\overrightarrow{AM_i}} \widetilde{\overrightarrow{AM_i}}^T = \sum m_i \widetilde{\overrightarrow{AM_i}}^T \widetilde{\overrightarrow{AM_i}} \quad (1.10)$$

D'où :

$$\vec{\mathcal{H}}_A = M \vec{AG} \times \vec{V}_A + \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA})$$

**Rappel :** ici  $\vec{V}_A$  est la vitesse d'un point A lié au solide.

Cas particuliers :

— Si A est fixe ( $\vec{V}_A = \vec{0}$ ) alors :

$$\vec{\mathcal{H}}_A = \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA})$$

— Si A est en G alors :

$$\vec{\mathcal{H}}_G = \mathbb{I}_G (\vec{\Omega}_{OA})$$

Le théorème  $\vec{\mathcal{M}}_A = \frac{d}{dt/o} (\vec{\mathcal{H}}_A) + M \vec{V}_A \times \vec{V}_G$  devient :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A &= M \vec{V}_A \times \vec{V}_G + \frac{d}{dt/o} (M \vec{AG} \times \vec{V}_A + \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA})) \\ &= M \vec{AG} \times \vec{\gamma}_A + \mathbb{I}_A \left( \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{OA}) \right) + \vec{\Omega}_{OA} \times \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA}) \end{aligned}$$

**Attention :**  $\vec{\gamma}_A$  est l'accélération d'un point A lié au solide.

Cas particuliers :

1. Si A est fixe ( $\vec{\gamma}_A = \vec{0}$ ), alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \mathbb{I}_A \left( \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{OA}) \right) + \vec{\Omega}_{OA} \times \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA})$$

2. Si A est en G alors :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \mathbb{I}_G \left( \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}_{OA}) \right) + \vec{\Omega}_{OA} \times \mathbb{I}_G (\vec{\Omega}_{OA})$$

## 1.4.2 Energie cinétique et puissance

En exprimant la valeur de  $\vec{V}_i$  dans  $T = \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{V}_i\|^2$  il vient :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{V}_A + \vec{\Omega}_{OA} \times \vec{AM}_i) \cdot (\vec{V}_A + \vec{\Omega}_{OA} \times \vec{AM}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \|\vec{V}_A\|^2 + \sum m_i \vec{V}_A \cdot (\vec{\Omega}_{OA} \times \vec{AM}_i) + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{AM}_i (\Omega_{OA}))^T (\vec{AM}_i (\Omega_{OA})) \\ &= \frac{1}{2} M \|\vec{V}_A\|^2 + M \vec{V}_A \cdot (\vec{\Omega}_{OA} \times \vec{AG}) + \frac{1}{2} (\Omega_{OA})^T \left( \sum m_i \vec{AM}_i^T \vec{AM}_i \right) (\Omega_{OA}) \end{aligned}$$

soit :

$$T = \frac{1}{2} M \|\vec{V}_A\|^2 + M \vec{V}_A \cdot (\vec{\Omega}_{OA} \times \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{OA} \cdot \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA})$$

**Rappel :**  $\vec{V}_A$  est la vitesse d'un point A lié au solide.

Cas particuliers :

1. Si A est fixe ( $\vec{V}_A = \vec{0}$ ), alors :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{OA} \cdot \mathbb{I}_A (\vec{\Omega}_{OA}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{OA} \cdot \vec{\mathcal{H}}_A \end{aligned}$$

2. Si A est en G alors :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M \|\vec{V}_G\|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{OA} \cdot \mathbb{I}_G(\overrightarrow{\Omega}_{OA}) \\ &= \frac{1}{2}M \|\vec{V}_G\|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}_{OA} \cdot \vec{\mathcal{H}}_G \end{aligned}$$

De plus, la puissance  $\Pi = \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \sum \vec{f}_i \cdot \vec{v}_{rai}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi &= \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \sum \vec{f}_i \cdot (\overrightarrow{\Omega}_{OA} \times \overrightarrow{GM}_i) \\ &= \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \sum \overrightarrow{\Omega}_{OG} \cdot (\overrightarrow{GM}_i \times \vec{f}_i) \end{aligned}$$

soit :

$$\Pi = \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \vec{\mathcal{M}}_G \cdot \overrightarrow{\Omega}_{OA}$$

Remarque : Si on vérifie la relation  $\Pi_{rag} = \frac{d}{dt} T_{rag}$  à partir de cette dernière expression, on arrive à la relation :

$$\frac{d}{dt|_O}(\overrightarrow{\Omega}_{OA}) \cdot \mathbb{I}_G(\overrightarrow{\Omega}_{OA}) = \overrightarrow{\Omega}_{OA} \cdot \mathbb{I}_G\left(\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\Omega}_{OA})\right)$$

qui est exacte car  $\mathbb{I}_G$  est symétrique.

### 1.4.3 Utilisation du repère principal d'inertie en G

La matrice des composantes, dans un repère principal d'inertie  $\mathcal{R}_A = \{G, \mathcal{B}_A\}$  lié au solide, du tenseur  $\mathbb{I}_G$  est diagonale :

$$[\mathbb{I}_G]_A = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Notons  $p, q$  et  $r$  les composantes de la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}_A$  relative à  $\mathcal{R}_O$  :

$$(\overrightarrow{\Omega}_{OA})_A = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

Dans ces conditions :

$$(\vec{\mathcal{H}}_G)_A = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}$$

et

$$T_{rag} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

### 1.4.4 Propriétés des tenseurs d'inertie

La formule  $-\tilde{u}^2 = \mathbf{1} + uu^T$  valable pour  $\vec{u}$  unitaire devient pour  $\vec{u}$  quelconque :

$$-\tilde{u}^2 = \|u\|^2 \mathbf{1} - uu^T$$

En appliquant cette relation à (1.10), il vient :

$$\mathbb{I}_A = -\sum m_i \widetilde{AM}_i^2 = \sum m_i \|AM_i\|^2 \mathbf{1} - \sum m_i AM_i AM_i^T$$

Cette relation fait apparaître :

— le moment d'inertie du solide par rapport au point A :

$$j_A = \sum m_i \|AM_i\|^2$$

— le tenseur des produits d'inertie en A :

$$\mathbb{P}_A = \sum m_i AM_i AM_i^T$$

D'où :

$$j_A \mathbf{1} = \mathbb{P}_A + \mathbb{I}_A$$

$\mathbb{I}_A$  et  $\mathbb{P}_A$  sont symétriques définies positives. Leurs valeurs propres sont réelles, et leurs directions propres (qui sont communes) sont orthogonales. La base constituée par ces directions propres est appelée base principale d'inertie. Le repère d'origine G centre d'inertie et de base la base principale d'inertie est appelé repère principal d'inertie.

### Moment d'inertie par rapport à un plan

Le moment d'inertie par rapport au plan orthogonal au vecteur unitaire  $\vec{u}$ , passant par le point A est donné par :

$$j_{\Pi_u, A} = u^T \mathbb{P}_A u$$

Si  $\vec{u}$  est direction propre,  $j_{\Pi_u, A}$  est la valeur propre associée.

### Moment d'inertie par rapport à un axe

Le moment d'inertie par rapport à la droite de vecteur unitaire  $\vec{u}$ , passant par le point A est donné par :

$$j_{u, A} = u^T \mathbb{I}_A u$$

Si  $\vec{u}$  est direction propre,  $j_{u, A}$  est la valeur propre associée.

Remarque :

quelle que soit la direction de  $\vec{u}$  on a :

$$j_A = j_{\Pi_u, A} + j_{u, A}$$

### Ellipsoïde d'inertie

Considérons le lieu des points M tels que :

$$AM^T \mathbb{I}_A AM = 1$$

En posant  $\vec{AM} = \|AM\| \vec{u}$ , on voit que :

$$\|AM\| = \frac{1}{\sqrt{j_{u, A}}} \quad \text{ou} \quad j_{u, A} = \frac{1}{\|AM\|^2}$$

Dans la direction de  $\vec{u}$ , le rayon vecteur de l'ellipsoïde vaut  $1/\sqrt{j_{u, A}}$ .

Considérons un solide ayant une forme ellipsoïdale allongée. C'est autour de son "grand axe" que son inertie est la plus faible,  $\|AM\| = 1/\sqrt{j_{u, A}}$  y a donc sa valeur la plus grande. L'ellipsoïde d'inertie a donc globalement les mêmes proportions que le solide.

### 1.4.5 Théorèmes de Koenig

Considérons une somme de la forme :

$$\mathcal{F}_A(\Sigma) = \sum m_i \frac{d^n}{dt^n}_{/A} (\widehat{AM}_i) * \frac{d^m}{dt^m}_{/A} (\widehat{AM}_i)$$

étendue à toutes les particules d'un système. Dans cette expression :

$n$  et  $m$  sont des ordres de dérivation valant 0, 1 ou 2,

le symbole  $\widehat{a}$  peut désigner soit le vecteur colonne (ou son transposé), soit le tenseur antisymétrique (ou son transposé) associé au vecteur  $\vec{a}$ ,

le symbole  $*$  désigne une multiplication (matricielle ou vectorielle) compatible avec le type des arguments.

En utilisant les propriétés barycentriques du centre d'inertie, énoncées par les formules (1.2), (1.3) et (1.4) on démontre que :

$$\begin{aligned} \sum m_i \frac{d^n}{dt^n}_{/A} (\widehat{AM}_i) * \frac{d^m}{dt^m}_{/A} (\widehat{AM}_i) &= M \frac{d^n}{dt^n}_{/A} (\widehat{AG}) * \frac{d^m}{dt^m}_{/A} (\widehat{AG}) \\ &+ \sum m_i \frac{d^n}{dt^n}_{/A} (\widehat{GM}_i) * \frac{d^m}{dt^m}_{/A} (\widehat{GM}_i) \end{aligned}$$

ce que nous écrirons sous la forme :

$$\mathcal{F}_A(\Sigma) = \mathcal{F}_A(M, G) + \mathcal{F}_G(\Sigma)$$

et énoncerons :

*L'expression d'une grandeur  $\mathcal{F}_A(\Sigma)$  relativement au repère  $\mathcal{R}_A$  pour un système de particules  $\Sigma$  est la somme de cette grandeur  $\mathcal{F}_A(M, G)$  relativement au repère  $\mathcal{R}_A$  pour une particule unique regroupant la masse totale en  $G$  centre d'inertie et de l'expression de cette grandeur relativement au repère  $\mathcal{R}_G$  (de même orientation que  $\mathcal{R}_A$ , mais centré en  $G$ ) pour le système de particules  $\Sigma$ .*

Il en résulte les cas particuliers suivants :

—  $m = n = 0$ ,  $\widehat{a} \rightarrow \vec{a}$ ,  $*$   $\rightarrow$  multiplication matricielle :

$$\mathbb{I}_A(\Sigma) = \mathbb{I}_A(M, G) + \mathbb{I}_G(\Sigma)$$

—  $m = n = 0$ ,  $\widehat{a} \rightarrow a$  et  $a^T$ ,  $*$   $\rightarrow$  multiplication matricielle :

$$\mathbb{P}_A(\Sigma) = \mathbb{P}_A(M, G) + \mathbb{P}_G(\Sigma)$$

—  $m = n = 0$ ,  $\widehat{a} \rightarrow a^T$  et  $a$ ,  $*$   $\rightarrow$  multiplication matricielle :

$$j_A(\Sigma) = j_A(M, G) + j_G(\Sigma)$$

—  $m = n = 1$ ,  $\widehat{a} \rightarrow a^T$  et  $a$ ,  $*$   $\rightarrow$  multiplication matricielle :

$$T = T_G + T_{r_G}$$

c'est-à-dire la décomposition de l'énergie cinétique dans le mouvement, et autour, du centre d'inertie.

—  $m = 0, n = 1, \hat{a} \rightarrow a, * \rightarrow$  multiplication vectorielle :

$$\vec{\mathcal{H}}_A = M \vec{AG} \times \vec{V}_G + \vec{\mathcal{H}}_G$$

avec  $\vec{\mathcal{H}}_G$  calculé dans le mouvement autour du centre d'inertie.

**Remarque :**

La relation d'Huygens :

$$j_{u,A}(\Sigma) = j_{u,A}(M, G) + j_{u,G}(\Sigma)$$

où  $j_{u,A}(M, G) = Md^2$  (avec  $d =$  distance des axes parallèles à  $\vec{u}$  passant par A et G) est un cas particulier des relations de Koenig.

## 1.5 Systèmes de solides

Pour modéliser (obtenir les équations différentielles du mouvement) un ensemble quelconque, il faut, en premier lieu, définir le système auquel on s'intéresse. Nous supposons ici que ce système est constitué par un ensemble de  $N$  corps solides  $C_i$ , avec  $i = 1$  à  $N$ . Ce système peut éventuellement entrer en contact, ou être lié avec des corps extérieurs au système. Nous considérerons un corps solide fixe externe  $C_0$ .

### Corps solide unique isolé

Un corps solide unique, soumis à aucune liaison, possède 6 degrés de liberté (on dit 6 ddl), 3 en translation (les coordonnées  $x, y$  et  $z$  d'un de ses points par exemple) et 3 en rotation (3 angles d'Euler repérant une base fixée au solide par rapport à une base fixe de référence, par exemple). Pour prédire le mouvement du corps, on calcule les dérivées secondes de ces 6 paramètres, extraites des équations différentielles du mouvement (en supposant connues les paramètres et dérivées premières initiales), puis par intégration on en déduit les dérivées premières et les paramètres suivants, et ainsi de suite. Ce processus est à la base des simulations des systèmes décrits par des équations différentielles. Pour calculer ces 6 dérivées secondes, il faut six équations différentielles du mouvement. Dans certains cas, des paramètres sont donnés, ce qui réduit d'autant le nombre d'équations du mouvement à rechercher. On peut également avoir des équations du type intégrales premières du mouvement. Dans ce cas les dérivées secondes de certains paramètres n'interviennent pas et on peut calculer directement leurs dérivées premières, ce qui fait gagner un niveau d'intégration pour ces paramètres. Pour un corps solide unique, les théorèmes (vectoriels) de la résultante cinétique et du moment cinétique fournissent les 6 équations différentielles cherchées.

### 1.5.1 Liaisons par contact entre solides

Considérons par exemple le cas représenté figure 1.1 du contact "ponctuel" entre deux solides  $C_i$  et  $C_j$  où  $C_i$  appartient au système considéré (on ne précise rien pour  $C_j$ ). Le contact a lieu en fait sur toute une surface élémentaire. Sur la figure nous avons représenté les forces d'action  $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k, \dots$  qu'exerce  $C_j$  sur  $C_i$  aux points  $A_i, A_j, A_k, \dots$  ( $C_i$  exerce sur  $C_j$  les forces de réaction opposées). La résultante dynamique des  $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k, \dots$  est notée  $\vec{R}$  :

$$\vec{R} = \vec{r}_i + \vec{r}_j + \vec{r}_k + \dots$$

Le point de contact I considéré est choisi arbitrairement dans la zone de contact, et on note  $\vec{\mathcal{M}}_I$  le moment dynamique résultant en I des  $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k, \dots$  :

$$\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{IA}_i \times \vec{r}_i + \vec{IA}_j \times \vec{r}_j + \vec{IA}_k \times \vec{r}_k + \dots$$

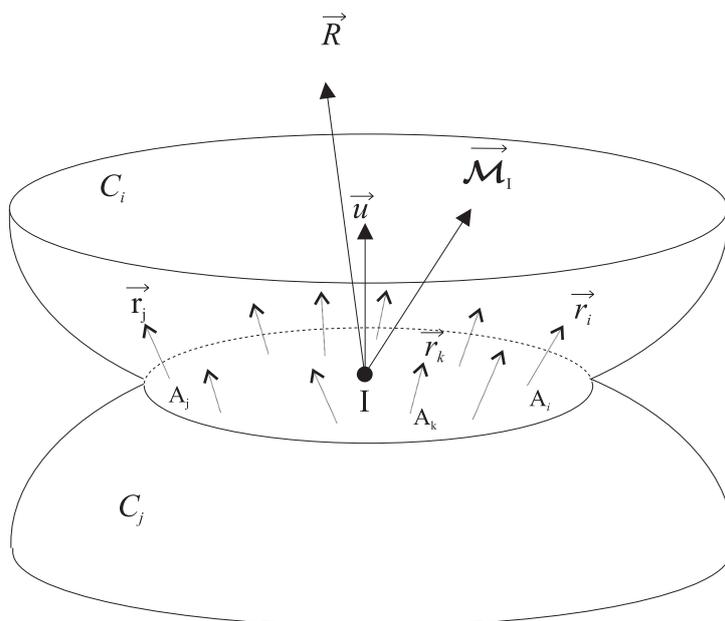


FIGURE 1.1 – Contact “ponctuel” entre deux solides

$\vec{R}$  et  $\vec{\mathcal{M}}_I$  sont les éléments de réduction du torseur de contact en I. Contrairement aux forces qui agissent à distances et que l'on considère données car on sait les calculer en utilisant les lois de la physique (attraction universelle, électrostatique, électromagnétisme, ...), ce torseur de contact introduit 6 inconnues.

Au niveau du contact, on doit considérer trois points I différents :

- le point I lié au corps solide  $C_i$ ,
- le point I lié au corps solide  $C_j$ ,
- le point géométrique I lié à l'espace descriptif de la scène.

Pour préciser la nature du point géométrique, il suffit par exemple de considérer une roue qui roule normalement (sans glissement, ni dérapage) sur le sol, en avançant à une vitesse  $\vec{V}$ .  $C_i$  est la roue,  $C_j$  est le sol. Le point I lié au sol est bien sûr immobile (comme le sol). Le point I lié à la roue a également une vitesse nulle, puisque qu'il n'y a aucun glissement. Mais la figure se déplace à la vitesse  $\vec{V}$ , et donc le point géométrique I se déplace à la vitesse  $\vec{V}$ .

Suivant la nature du contact, divers degrés de liberté de  $C_i$  par rapport à  $C_j$  sont contraints. Examinons les cas les plus significatifs.

### Suppression d'un ddl en translation

La zone élémentaire de contact est considérée plane, orthogonale à la direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$  dirigé de  $C_j$  vers  $C_i$ , et le mouvement de translation selon  $\vec{u}$  de  $C_i$  par rapport à  $C_j$  est interdit (du moins dans le sens opposé à  $\vec{u}$ ). Les autres mouvements sont autorisés (translation dans le plan, et rotation quelconque). C'est le cas de la boule de billard sur un tapis.

Lorsque la liaison n'interdit les déplacements que dans un sens (opposé à  $\vec{u}$ ) on dit qu'elle est *unilatérale*. Deux cas sont à traiter, soit la contrainte est *non effective* (absence de contact), il n'y a ni de perte de degré de liberté, ni forces de contact, soit elle est *effective* et il y a perte d'un ddl et apparition de forces de contact.

Lorsque la liaison interdit les déplacements dans les deux sens ( $\vec{u}$  et  $-\vec{u}$ ) on dit qu'elle est

*bilatérale.*

La liaison va se traduire par une seule équation qui interdit la translation selon  $\vec{u}$ . A cette équation on peut associer la composante de  $\vec{R}$  sur  $\vec{u}$  (composante normale au plan de contact), notée  $R_n$ . Si  $C_i$  et  $C_j$  appartiennent au système,  $R_n$  et sa réaction opposée ne travaillent pas (les travaux s'annulent). Que  $C_j$  appartienne ou non au système, parmi les 6 inconnues du torseur dynamique de contact, la composante  $R_n$  joue un rôle à part. Elle correspond au paramètre de Lagrange associé à la liaison dans le formalisme de Lagrange.

Pour résoudre le problème dû à l'introduction de ces 6 inconnues supplémentaires, il faut 6 nouvelles équations. L'équation de liaison procure la première. Les 5 autres proviennent des lois associées à la nature des frottements considérés.

Notons

- $\vec{V}_t$  la vitesse de translation de  $C_i$  par rapport à  $C_j$ , tangentielle dans le plan de contact,
- $\vec{\Omega}_t$  et  $\omega_n \vec{u}$  les composantes tangentielle et normale de la vitesse de rotation  $\vec{\Omega}_{ji} = \vec{\Omega}_t + \omega_n \vec{u}$  du corps  $C_i$  par rapport à au corps  $C_j$ ,
- $\vec{R}_t$  la composante tangentielle de  $\vec{R} = \vec{R}_t + R_n \vec{u}$ ,
- $\vec{\mathcal{M}}_t$  et  $m_n \vec{u}$  les composantes tangentielle et normale du moment dynamique résultant en I,  $\vec{\mathcal{M}}_t = \vec{\mathcal{M}}_t + m_n \vec{u}$  exercé par le corps  $C_j$  sur le corps  $C_i$ .

Dans le cas d'un frottement visqueux, en appelant  $f$  le coefficient de frottement visqueux en translation,  $r$  le coefficient de frottement visqueux de résistance au roulement et  $p$  le coefficient de frottement visqueux de résistance au pivotement, on aura :

$$\vec{R}_t = -f \vec{V}_t$$

$$\vec{\mathcal{M}}_t = -r \vec{\Omega}_t$$

$$m_n = -p \omega_n$$

Ces 5 équations (2 composantes par équation vectorielle plane) permettent d'équilibrer le compte des équations et des inconnues.

Dans le cas d'un "frottement solide", on utilisera les *lois de Coulomb et Morin*.

En appelant  $f$  le coefficient de frottement en translation,  $r$  le coefficient de résistance au roulement et  $p$  le coefficient de résistance au pivotement les 5 équations précédentes sont remplacées par les lois de Coulomb et Morin :

$$\vec{R}_t = -f |R_n| \frac{\vec{V}_t}{\|\vec{V}_t\|}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_t = -r |R_n| \frac{\vec{\Omega}_t}{\|\vec{\Omega}_t\|}$$

$$m_n = -p R_n \text{signe}(\omega_n)$$

Si une des vitesses  $\vec{V}_t$ ,  $\vec{\Omega}_t$  ou  $\omega_n$  s'annule transitoirement, l'indétermination à une durée nulle. Par contre si elle peut rester nulle, par exemple s'il n'y a pas de glissement (cas du roulement sans glissement d'une roue par exemple), cette condition doit être imposée et elle fournit l'équation qui remplace l'équation indéterminée et permet ainsi la résolution du problème. Mais pour que cette condition de

nullité perdue, il faut vérifier que les composantes trouvées au niveau du torseur dynamique de contact vérifient les inégalités suivantes :

$$\vec{V}_t = 0 \rightarrow \|\vec{R}_t\| < f_0 |R_n|$$

$$\vec{\Omega}_t = 0 \rightarrow \|\vec{\mathcal{M}}_t\| < r_0 |R_n|$$

$$\omega_n = 0 \rightarrow m_n < p_0 |R_n|$$

Si une de ces inégalités n'est plus vérifiée, il faut supprimer la contrainte de nullité de la vitesse et la remplacer par l'équation correspondante de Coulomb et Morin. Lorsque la vitesse s'annule à nouveau, on doit tenter à nouveau de la fixer à zéro, et ainsi de suite.

Un frottement réel, est très complexe et combine les relations de type frottement visqueux et frottement solide.

### Remarque :

1. Dans le cas  $C_j$  appartient au système,  $\{\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_I\}$  est un torseur interne. Nous avons déjà signalé que la composante  $R_n$  ne travaillait pas. Par contre, lorsque les coefficients  $f$ ,  $r$  et/ou  $p$  sont non nuls les autres composantes travaillent dans le déplacement relatif entre  $C_i$  et  $C_j$  et ce travail est négatif. On dit que la liaison est *dissipative*. A titre d'exemple, en notant  $\vec{W}$  la vitesse absolue du point I lié au corps  $C_j$ , le travail total de  $-\vec{R}$  appliqué à  $C_j$  et  $\vec{R}$  appliqué à  $C_i$  est égal à :

$$\delta w = -\vec{R} \cdot \vec{W} \delta t + \vec{R} \cdot (\vec{W} + \vec{V}_t) \delta t$$

$$\delta w = \begin{cases} -f \|\vec{V}_t\|^2 \delta t & \text{cas "visqueux"} \\ -f |R_n| \|\vec{V}_t\| \delta t & \text{cas "solide"} \end{cases}$$

2. Dans le cas d'absence de frottement sur un ou plusieurs ddl, un ou plusieurs des coefficients  $f$ ,  $r$  et  $p$  sont nuls ainsi que les réactions correspondantes, ce qui simplifie grandement la résolution du problème. Lorsque tous les coefficients sont nuls on dit que la liaison est *non dissipative*.
3. Aux forces de frottements peuvent s'ajouter des forces motrices, par exemple d'origine électromagnétique.  $C_j$  et  $C_i$  peuvent par exemple porter des aimants qui vont produire des forces d'action et réaction mutuelles données (car on sait les calculer en fonction des positions et des vitesses) qu'il faut superposer aux autres.

### Suppression de plusieurs ddl

Considérons un contact, ou un ensemble de contacts entre deux solides  $C_i$  et  $C_j$ . Généralement on considère comme précédemment un point privilégié I et le torseur dynamique  $\{\vec{R}, \vec{\mathcal{M}}_I\}$  d'action de  $C_j$  sur  $C_i$  en ce point.

Chaque degré de liberté supprimé fournit une équation de liaison, et les lois associées à la nature des frottements sur les degrés de liberté non contraints fournissent les autres, avec éventuellement des conditions de vitesse nulle limitées dans le temps, subordonnées comme précédemment à des inégalités entre composantes du torseur de réaction.

Les cas pratiques les plus fréquents sont :

#### La rotule :

- 3 relations interdisent les mouvements de translation
- 3 relations de frottement permettent de calculer  $\vec{\mathcal{M}}_I$ .

**Le pivot ou liaison rotoïde :**

Seule la rotation autour d'un axe  $\vec{u}$  est autorisée.

- 3 relations interdisent les mouvements de translations,
- 2 relations interdisent les 2 axes de rotations orthogonaux à  $\vec{u}$ ,
- 1 relation permet de calculer le moment dynamique autour de  $\vec{u}$  à partir des lois de frottements et/ou des données de motricité si la liaison comporte un moteur.

**La glissière ou liaison prismatique :**

Seule la translation d'axe  $\vec{u}$  est autorisée.

- 3 relations interdisent les mouvements de rotation,
- 2 relations interdisent les 2 translations orthogonales à  $\vec{u}$ ,
- 1 relation permet de calculer la force selon de  $\vec{u}$  à partir des lois de frottements et/ou des données de motricité si la liaison comporte un vérin.

**1.5.2 Paramètres de configuration, liaisons non holonômes et degrés de liberté**

Un système de  $S$  corps solides peut posséder jusqu'à  $6S$  degré de liberté, c'est-à-dire que la description de sa configuration ne demande pas plus de  $6S$  paramètres. Appelons  $p_i$  ces paramètres. Les liaisons entre les corps (internes ou externes) font que ces paramètres sont liés par des relations diverses du type :

$$f(p_1, p_2, \dots, t) = 0$$

Certaines de ces relations permettent d'exprimer un des  $p_i$  en fonction des autres. Elles sont dites *holonômes*. Chaque relation holonôme permet d'éliminer un paramètre de configuration  $p_i$  de la liste des inconnues pour lesquelles on cherche des équations différentielles du mouvement, puisque la relation holonôme permettra de calculer ce paramètre en fonction des inconnues obtenues par intégration.

Supposons qu'après élimination d'un certain nombre de paramètres par consommation de toutes les relations holonômes, il reste  $m$  paramètres de configuration, que nous noterons maintenant  $q_i$ , avec  $i = 1$  à  $m$ . Ces  $m$  paramètres sont appelés :

- paramètres de configuration du système,
- coordonnées généralisées.

D'un point de vue mathématique ils constituent un système de coordonnées d'une variété ponctuelle à  $m$  dimension sur les réels.

Le nombre maximal de degré de liberté du système est maintenant réduit à  $m$ . Mais il reste encore  $p$  relations du type :

$$f_k(q_1, q_2, \dots, q_m, t) = 0 \quad k = 1, p$$

associées aux liaisons avec lesquelles il s'avère impossible d'extraire un  $q_i$  en fonction des autres.

En différentiant ces  $p$  relations, on peut les mettre sous la forme :

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial f_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial q_m} \dot{q}_m + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0 \quad k = 1, p$$

c'est-à-dire :

$$a_{k1} \dot{q}_1 + a_{k2} \dot{q}_2 + \dots + a_{km} \dot{q}_m + a_{k0} = 0 \quad k = 1, p$$

Si la matrice  $p \times m$  (avec bien sûr  $p < m$ ) des  $a_{kj}$  ( $j = 1$  à  $m$ ) n'est jamais de rang complet (rang égal à  $p$ ), c'est que des conditions de liaisons sont redondantes, et il faut les éliminer. En dehors des configurations singulières pour lesquelles cette matrice n'est pas de rang complet, les  $p$  relations suppriment  $p$  degrés de liberté au système qui ne présente donc plus que :

$$n = m - p$$

degrés de liberté. Ces  $p$  relations sont des conditions de liaison dites *non-holonômes*.

D'un point de vue mathématique, chaque condition non-holonôme réduit le sous-espace libre du vecteur tangent  $\dot{q}$  d'une unité (il doit évoluer dans l'hyper-plan de dimension  $m - 1$  orthogonal au vecteur ligne correspondant de la matrice  $a_{kj}$ ). Les  $p$  conditions restreignent ainsi  $\dot{q}$  à un sous-espace de dimension  $n = m - p$ .

Dans de nombreux ouvrages l'opposition entre liaisons holonômes et non-holonômes est présentée comme provenant du fait que les premières ne font pas intervenir les dérivées des paramètres de configuration contrairement au deuxième. Cette manière de voir résulte du fait que pour les liaisons holonômes simples, on sait écrire directement l'expression d'un des paramètres en fonction des autres (ce qui permet de l'éliminer), alors que pour les liaisons complexes les conditions sont établies à partir de relations entre vitesses, et comme généralement on ne sait pas les intégrer, il y a impossibilité de les utiliser pour éliminer des paramètres.

Considérons à titre d'exemple une boule qui roule sans glisser sur un plan fixe. Supposons que l'orientation de la boule soit repérée au moyen d'angles d'Euler et appelons  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées du centre de la boule dans le repère fixe. La condition de non glissement est établi en écrivant que la vitesse du point de contact lié à la boule est égale à la vitesse du point de contact lié au plan (qui est nulle puisque le plan est fixe). On obtient alors en composantes dans le repère fixe :

$$\begin{aligned} \dot{x} - R\dot{\theta} \sin \psi + R\dot{\phi} \cos \psi \sin \theta &= V_x = 0 \\ \dot{y} + R\dot{\theta} \cos \psi + R\dot{\phi} \sin \psi \sin \theta &= V_y = 0 \\ \dot{z} &= V_z = 0 \end{aligned}$$

L'intégrale de la dernière condition fournit la relation holonôme :

$$z = \text{cte} = R$$

qui serait pseudo-holonôme dans l'approche en question. Comme on ne sait pas intégrer les deux premières relations, elles ne sont pas exploitées pour éliminer des paramètres. Ce sont des conditions de liaison non-holonômes.

Par ailleurs, il est parfois intéressant, en particulier dans la méthode de Lagrange pour pouvoir calculer certaines réactions, de conserver comme inconnu un paramètre qui peut être éliminé. La relation holonôme non utilisée est alors considérée comme non-holonôme.

Nous concluons en disant que *les relations holonômes sont celles qui sont utilisées pour éliminer des paramètres de configuration et qui ensuite peuvent être oubliées, alors que les relations non-holonômes ne sont pas utilisées pour éliminer des paramètres de configuration (soit par choix, soit par impossibilité) et sont mises dans le compte des équations qu'il est nécessaire de conserver pour calculer les inconnues.*

### Inventaire des équations

Le système constitué par  $S$  solides est au prime abord repéré par  $6S$  paramètres inconnus.

Les théorèmes généraux (résultante cinétique et moment cinétique) appliqués à chaque solide fournissent  $6S$  équations qui équilibrent le compte inconnues-équations. Les contacts et liaisons diverses introduisent des torseurs de réaction inconnus dans ces équations ce qui déséquilibre le compte. Cependant, pour chaque contact ou liaison, il y a à chaque fois autant d'équations que d'inconnues en comptant :

- les relations de restriction des degrés de liberté de la liaison (par exemple une liaison rotule sans frottement introduit les trois composantes de la force de réaction en inconnues, mais impose les 3 composantes de la position du point lié),

- les relations permettant de calculer les réactions de frottements en fonction des vitesses de frottements, ou les relations exprimant que ces vitesses sont nulles (relations de roulement sans glissement par exemple).

Il y a donc toujours autant d'équations indépendantes que d'inconnues.

Ceci étant constaté, il serait aberrant de conserver  $6S$  paramètres inconnus. Il y a intérêt à exploiter les relations holonômes pour réduire à un minimum le nombre  $m$  des paramètres de configuration  $q_i$  conservés. Pour chaque paramètre éliminé, une équation des théorèmes généraux devient inutile, mais il n'est pas toujours facile de savoir laquelle. On est alors en présence d'un nombre redondant d'équations qu'il est très difficile de gérer sans une méthodologie spécifique de la structure du système étudié.



## Chapitre 2

# Mécanique analytique

Ce que l'on nomme communément la méthode de Lagrange est une méthode qui permet d'établir les équations différentielles d'un système mécanique sans faire intervenir les forces de réactions internes. Elle repose sur la loi des travaux virtuels élémentaires qui permet déjà de les ignorer.

### 2.1 Loi des travaux virtuels élémentaires

Considérons un système mécanique  $\mathcal{M}$  constitué par un ensemble de  $N$  particules élémentaires (agrégées ou non)  $M_i$  de masses  $m_i$ , on note  $\mathbf{r}_i$  le vecteur  $\overrightarrow{OM}_i$  (où  $O$  est l'origine d'un repère galiléen),  $\dot{\mathbf{r}}_i$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  ses vitesse et accélération absolues. Appelons  $\mathbf{f}_i$  la force à laquelle est soumise la particule  $M_i$  (appliquée en  $M_i$ ) résultante des forces à distance et des forces de contact qui lui sont appliquées. La loi fondamentale de la mécanique appliquée à la particule  $M_i$  permet d'écrire :

$$\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}$$

En conséquence, quelque soit le champ de vecteurs  $\mathbf{u}_i$ , on a pour toute partie  $\mathcal{P}$  du système mécanique  $\mathcal{M}$  :

$$\sum_{\mathcal{P}} (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \mathbf{u}_i = 0$$

Si on interprète le champ de vecteurs  $\mathbf{u}_i$  comme un champ de vitesses  $\mathbf{v}_i$  (pas nécessairement les vitesses réelles  $\dot{\mathbf{r}}_i$ , mais des vitesses virtuelles quelconques) on énonce cette égalité en disant que *pour toute partie du système, la somme des puissances virtuelles des forces réelles et des forces d'inertie est nulle à tout instant.*

Si on interprète le champ de vecteurs  $\mathbf{u}_i$  comme un champ de déplacements virtuels  $\delta \mathbf{r}_i$  (non nécessairement parallèle au déplacement réel  $\dot{\mathbf{r}}_i dt$ ) on énonce cette égalité en disant que *pour toute partie du système, la somme des travaux dans tout déplacement virtuel (à temps constant) des forces réelles et des forces d'inertie est nulle à tout instant.*

Notons bien que pendant un déplacement virtuel, le temps ne s'écoule pas :  $\mathbf{f}_i$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_i$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  (et même  $\mathbf{r}_i$ ) restent constants pendant ce déplacement. En conséquence les forces d'inertie à considérer sont les forces d'inerties dues au mouvement réel. En ce qui concerne les forces réelles, il s'agit :

- des forces données (forces à distance : électrique, magnétique, attraction universelle),
- des forces de réaction dissipatives,
- des forces de réaction qui normalement ne travaillent pas, mais qui travaillent dans le déplacement virtuel qui ne respecte pas certaines relations holonômes ou non holonômes.

Cette loi offre deux principaux intérêts :

- c'est une relation scalaire qui simplifie le problème du choix de la base ou des bases de projection,
- un choix judicieux des déplacements virtuels permet de ne pas faire travailler certaines forces inconnues.

### Exemples :

- En prenant tous les  $\mathbf{u}_i$  égaux au même  $\mathbf{u}$  (déplacement solidifiant de translation), on retrouve la loi fondamentale en projection sur la direction  $\mathbf{u}$ .
- En prenant  $\mathbf{u}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i$  (vitesse virtuelle de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  autour de 0 ou déplacement solidifiant de rotation), on retrouve la deuxième partie du théorème de la résultante cinétique :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathcal{P}} (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_i) &= 0 \\ \sum_{\mathcal{P}} \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i - \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) &= 0 \\ \sum_{\mathcal{P}} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i - \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) &= 0 \\ \sum_{\mathcal{P}} \left( \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i - \frac{d}{dt} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) &= 0\end{aligned}$$

- En prenant  $\mathbf{u}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$  (vitesses réelles) on retrouve le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}\sum_{\mathcal{P}} (\mathbf{f}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \dot{\mathbf{r}}_i &= 0 \\ \sum_{\mathcal{P}} \mathbf{f}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i &= 0\end{aligned}$$

soit :

$$\pi_{\mathcal{P}} = \frac{d}{dt} \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

## 2.2 Formalisme de Lagrange

Considérons le système mécanique  $\mathcal{M}$  et notons  $q_1, q_2, \dots, q_m$  les  $m$  paramètres (appelés coordonnées de configuration) en fonction desquels on est capable d'exprimer en permanence les 3 composantes des positions  $\mathbf{r}_i$  des  $N$  particules au moyen de  $3N$  relations holonômes du type :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_m, t)$$

### 2.2.1 Identités remarquables préliminaires

Ce paragraphe ne fait qu'établir des relations purement mathématiques. Il peut être sauté par le lecteur.

En dérivant la relation précédente on obtient :

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (2.1)$$

Comparons  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)$  et  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}$ . Il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_k} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \quad (2.2)$$

Comparons  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right)$  et  $\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t}$ . Il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t \partial q_j} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2} + \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} \quad (2.3)$$

En dérivant  $\dot{\mathbf{r}}_i$  par rapport à  $\dot{q}_j$  dans 2.1, on obtient immédiatement

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.4)$$

car seul ce facteur fait intervenir  $\dot{q}_j$ .

Calculons  $\ddot{\mathbf{r}}_i$ . Il vient :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

soit en utilisant 2.2 et 2.3 :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \ddot{q}_j$$

Il en résulte que  $\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}$  car seul ce facteur fait intervenir  $\ddot{q}_j$ . D'où la relation :

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_j} \quad (2.5)$$

## 2.2.2 Formule de Lagrange

L'énergie cinétique du système  $\mathcal{M}$  s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i$$

Les  $m_i$  étant des constantes, la variation de l'énergie cinétique  $T$  en fonction des  $q_j$  et  $\dot{q}_j$  ne provient que des  $\dot{\mathbf{r}}_i$ . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right)^T \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right)^T \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \text{ en utilisant (2.5)} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \text{ en utilisant (2.3)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

Faisons la somme de ces termes multipliés par  $\delta q_j$ . Il vient :

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.6)$$

Etant donné que  $d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \delta t + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ , les vecteurs  $\delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$  sont les déplacements virtuels (effectués à temps constant) qui correspondent aux déplacements virtuels  $\delta q_j$ . En écrivant la relation (2.6) sous la forme :

$$\delta W_a = - \sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{i=1}^N -m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i$$

elle s'interprète comme le travail virtuel  $\delta W_a$  de l'ensemble des forces d'inertie dans les déplacements virtuels  $\delta \mathbf{r}_i$  engendrés par les  $\delta q_j$ . Nous noterons :

$$Q_{aj} = \frac{\partial W_a}{\partial q_j} = - \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^N -m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$$

la force inertielle généralisée associée à  $q_j$ .

En remplaçant  $m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$  par  $\mathbf{f}_i$ , la relation (2.6) s'écrit également :

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i$$

où le dernier membre s'interprète comme le travail virtuel  $\delta W_r$  de l'ensemble des forces réelles dans les déplacements virtuels  $\delta \mathbf{r}_i$  engendrés par les  $\delta q_j$ . Posons :

$$\begin{aligned} \delta W_r &= \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j \\ Q_j &= \frac{\partial W_r}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il vient :

$$\sum_{j=1}^m \left[ \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (2.8)$$

Le terme  $Q_j$  se nomme la force réelle généralisée associée à  $q_j$ . Quand parmi les  $m$  coordonnées  $q_k$  seul  $q_j$  effectue un déplacement virtuel  $\delta q_j$ , la somme des travaux virtuels de l'ensemble des forces réelles  $\mathbf{f}_i$  dans les déplacements virtuels  $\delta \mathbf{r}_i$  qui résultent du déplacement virtuel  $\delta q_j$  est égale à  $Q_j \delta q_j$ .

Remarque : La relation (2.8) est l'expression de la loi des travaux virtuels dans l'ensemble des déplacements virtuels  $\delta \mathbf{r}_i$  qui résultent du déplacement virtuel  $\delta q_j$  :

$$\delta W_a + \delta W_r = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^N -m_i \ddot{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{r}_i = \mathbf{Q}_a^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} = 0$$

### 2.2.3 Expression des forces généralisées

Comme nous venons de le voir, la force réelle généralisée  $Q_j$  associée à la coordonnée de configuration  $q_j$  s'écrit :

$$Q_j = \frac{\partial W_r}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \mathbf{r}_i \right)$$

La puissance des forces réelles s'écrit :

$$\pi_r = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i$$

Si les  $\mathbf{f}_i$  ne dépendent pas des  $\dot{\mathbf{r}}_i$ , la dérivée partielle relativement à  $\dot{q}_j$  s'écrit :

$$\frac{\partial \pi_r}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

(compte tenu de 2.4). Ainsi les forces généralisées, qui ne dépendent pas des  $\dot{\mathbf{r}}_i$ , sont les dérivées partielles relativement aux vitesses généralisées de la puissance des forces réelles.

$$Q_j = \frac{\partial \pi_r}{\partial \dot{q}_j}$$

**Attention :** Cette formule n'est pas valable dans le cas de forces dissipatives (elles dépendent des  $\dot{\mathbf{r}}_i$ ). L'oubli de cette restriction rend son usage dangereux. C'est pour éviter ce risque d'erreur qu'on utilise les travaux virtuels de préférence aux puissances virtuelles.

### Dérivation analytique

Pour les forces réelles qui dérivent d'un potentiel  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  dépendant des positions, des vitesses et éventuellement du temps, on peut calculer les forces généralisées  $Q_{Pj}$  par la relation :

$$Q_{Pj} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (2.9)$$

A titre d'exemple, les forces électromagnétiques dérivent d'un potentiel  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  qui fait intervenir positions et vitesses, alors que le potentiel de pesanteur ( $V = \sum m_i g z_{Gi}$ ) est un potentiel de position de type  $V(\mathbf{q})$ , pour lequel on aura simplement  $Q_{Pj} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ .

Dans le cas d'une force réelle *dissipative*, proportionnelle à des  $\dot{\mathbf{r}}_i$  du type  $\mathbf{f}_i^T = -\xi_i \dot{\mathbf{r}}_i$ , la dérivée de la puissance  $\pi_r = -\xi_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$  va induire une erreur en introduisant un facteur 2 dans  $-2\xi \dot{\mathbf{r}}_i$ . Pour mécaniser le calcul des  $Q_{Dj}$  sans risquer ce type d'erreur on introduit pour ces forces dissipatives *la fonction de dissipation de Rayleigh* :

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum \xi_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

et les forces généralisées dissipatives correspondantes sont alors données par :

$$Q_{Rj} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}$$

### Forces généralisées qui travaillent effectivement

Pour les forces réelles  $\mathbf{f}_i$  qui ne dérivent pas d'un potentiel, ou plus simplement quand on ne désire pas passer par l'intermédiaire de ce potentiel, le calcul de  $Q_j$  s'effectue à partir de sa définition. Dans notre exposé, les forces  $\mathbf{f}_i$  sont les forces qui s'exercent sur toutes les particules élémentaires des corps du système (par exemple ses molécules). Pour les corps solides, on considère que les forces internes de cohésion ne travaillent pas, puisqu'elles apparaissent par paires de forces d'action et réaction, égales et opposées. Subissant le même déplacement, elles font des travaux opposés qui s'annulent mutuellement. Les seuls efforts réels à prendre en compte sont ceux qui travaillent effectivement quand on fait varier les coordonnées de configuration, une par une. Pour les efforts qui s'appliquent sur des parties solides, on considère souvent le torseur résultant ( $\mathbf{f}_k, \mathbf{c}_k$ ) de ces efforts en un certain des points  $\mathbf{r}_i$  que nous noterons  $\mathbf{p}_k$ . Notons  $\mathbf{v}_k$  la vitesse virtuelle de translation de  $\mathbf{p}_k$  et  $\boldsymbol{\omega}_k$  la vitesse virtuelle de rotation de la partie solide liée à  $\mathbf{p}_k$ . Le torseur produit ainsi une puissance virtuelle :

$$\pi_k = \mathbf{f}_k^T \mathbf{v}_k + \mathbf{c}_k^T \boldsymbol{\omega}_k$$

Par ailleurs  $\mathbf{v}_k$  et  $\boldsymbol{\omega}_k$  s'expriment en fonction des  $\dot{q}_j$  par des relations de la forme :

$$\mathbf{v}_k = \sum_{j=i}^m \mathbf{J}_{V k j} \dot{q}_j \quad , \quad \boldsymbol{\omega}_k = \sum_{j=i}^m \mathbf{J}_{\omega k j} \dot{q}_j$$

D'où :

$$\pi_k = \mathbf{f}_k^T \sum_{j=i}^m \mathbf{J}_{V k j} \dot{q}_j + \mathbf{c}_k^T \sum_{j=i}^m \mathbf{J}_{\omega k j} \dot{q}_j$$

En sommant toutes les puissances virtuelles produites par tous les torseurs appliqués au système, il vient :

$$Q_{Ej} = \sum_{k=1}^K \frac{\partial \pi_k}{\partial \dot{q}_j}$$

soit :

$$Q_{Ej} = \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_k^T \mathbf{J}_{V k j} + \mathbf{c}_k^T \mathbf{J}_{\omega k j}$$

### Forces généralisées associées à des efforts qui ne travaillent pas

A priori, les efforts qui ne travaillent pas n'apportent aucune contribution aux forces généralisées  $Q_j$ . A titre d'exemple, dans le cas d'un pendule simple, la tension du fil, toujours orthogonale au déplacement de la masse suspendue, ne travaille pas. Dans le formalisme de Lagrange ces efforts n'apparaissent nulle part. Ils ne peuvent donc pas être (directement) calculés. Si on veut qu'ils apparaissent, il faut leur laisser la possibilité virtuelle de travailler.

Les  $m$  paramètres de configuration  $q_j$  sont éventuellement liés par  $p$  relations non-holonômes indépendantes. Dans l'esprit du formalisme de Lagrange on utilise un nombre minimal de paramètres de configuration et en conséquence on élimine tous les paramètres superflus en exploitant toutes les relations holonômes (celles qui permettent d'effectuer cette élimination). Par choix, on peut ne pas prendre en compte une liaison pour laisser virtuellement travailler la force de liaison qui la maintient. Par exemple, on peut laisser 2 degrés de liberté au pendule simple ( $x$  et  $y$ ) au lieu d'un seul  $\theta$ , en n'exploitant pas le fait que  $x^2 + y^2 = l^2 = cte$  pour que la tension du fil puisse travailler. Dans ce cas cette relation est considérée comme non-holonôme.

Ces relations peuvent se mettre sous la forme suivante (en dérivant éventuellement les relations holonômes conservées en non-holonômes) :

$$c_{l_0} + \sum_{j=1}^m c_{l_j} \dot{q}_j = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } p \quad (2.10)$$

où généralement les coefficients  $c_{l_0}$  et  $c_{l_j}$  peuvent être des fonctions des  $q_k$  et les coefficients  $c_{l_0}$  des fonctions du temps.

A temps constant ( $\delta t = 0$ ), on peut écrire :

$$\sum_{j=1}^m c_{l_j} \delta q_j = 0 \quad \text{pour } l = 1 \text{ à } p \quad (2.11)$$

Dans le cas du pendule simple, avec  $q_1 = x$  et  $q_2 = y$ , on aurait une seule relation :

$$x\delta x + y\delta y = 0$$

soit  $c_{10} = 0$ ,  $c_{11} = x$  et  $c_{12} = y$ .

Le travail virtuel de la tension est égal à :

$$\delta W_T = T \delta l \quad (= 0)$$

(en considérant que la tension  $T$  est négative quand le fil est tendu), d'où :

$$\delta W_T = T(x\delta x + y\delta y) \quad (= 0)$$

Il en résulte :

$$\begin{cases} Q_{Tx} = \frac{\partial W_T}{\partial x} = Tx \\ Q_{Ty} = \frac{\partial W_T}{\partial y} = Ty \end{cases}$$

Ainsi, on constate que les forces généralisées, associées aux efforts qui maintiennent les liaisons non-holonômes, ne sont pas nulles. Dans l'esprit du formalisme de Lagrange, les forces qui ne travaillent pas ne sont pas considérées. Elles sont introduites par le biais de multiplicateurs qui seront présentés plus loin. En fait ces multiplicateurs ne sont rien d'autre que les forces généralisées associées aux efforts qui maintiennent les liaisons non-holonômes.

Considérons une des  $p$  relations 2.11. Elle s'écrit :

$$\sum_{j=1}^m c_{lj} \delta q_j = \delta p_l = 0$$

Elle traduit le fait qu'une certaine variation  $\delta p_l$  ne peut pas s'effectuer. Cette variation correspond, soit à une translation, d'une partie relativement à une autre, le long d'une direction  $\mathbf{u}_l$ , soit à une rotation, d'une partie relativement à une autre, autour d'une direction  $\mathbf{u}_l$ , qui est bloquée. Dans le premier cas, la composante  $f_l$  sur  $\mathbf{u}_l$  de la force  $\mathbf{f}$  qui maintient cette liaison, ne travaille pas car  $\delta W_{f_l} = f_l \delta p_l = 0$ . Dans le deuxième cas, c'est la composante  $\Downarrow_l$  sur  $\mathbf{u}_l$  du moment  $\Downarrow$  qui maintient cette liaison qui ne travaille pas, car  $\delta W_{\Downarrow_l} = \Downarrow_l \delta p_l = 0$ . Mais dans les deux cas, ces composantes produisent des forces généralisées qui ne sont pas nulles :  $Q_{f_l j} = f_l c_{lj}$  ou  $Q_{\Downarrow_l j} = \Downarrow_l c_{lj}$ .

D'une manière générale, la force généralisée  $Q_{(n.h) l,j}$  associée à la composante généralisée  $\lambda_l$  (de force ou de moment) qui maintient la relation non-holonôme  $\delta p_l = 0$  s'écrit :

$$Q_{(n.h) l,j} = \lambda_l c_{lj}$$

et :

$$Q_{(n.h) j} = \sum_{l=1}^p \lambda_l c_{lj} \quad (2.12)$$

**Rappel :** Compte tenu de 2.11 :

$$\sum_{j=1}^m Q_{(n.h) j} \delta q_j = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{l=1}^p \lambda_l c_{lj} \right) \delta q_j = \sum_{l=1}^p \lambda_l \left( \sum_{j=1}^m c_{lj} \delta q_j \right) = 0$$

Les forces généralisées associées aux liaisons non holonômes ne travaillent pas.

### Sommation des forces généralisées

La force généralisée  $Q_j$  qui intervient dans la formule de Lagrange (2.8) est le  $Q_j$  résultant de **tous** les efforts réels appliqués au système. Ces efforts réels se répartissent en deux groupes :

- les efforts réels *donnés* ou désignés comme tels car les lois de la physique permettent de les calculer à partir des positions ou des vitesses : forces de pesanteur, d'attraction universelle, électrique, électromagnétique, de frottements visqueux ou secs, ... Le travail de ces efforts conduit aux forces généralisées données  $Q_{dj}$  :

$$Q_{dj} = Q_{Pj} + Q_{Rj} + Q_{Ej} + \dots$$

- les efforts réels *inconnus*. Ils sont, en principe ignorés car ils ne travaillent pas. Ces sont les forces d'action et réaction qui maintiennent les liaisons internes ou d'action associées à des liaisons avec l'extérieur. Elles dépendent des forces inertielles du système et sont donc inconnues a priori. Ce sont elles qui interviennent dans les forces généralisées  $Q_{(n.h)j}$  associées aux liaisons non holonômes.

La formule de Lagrange (2.8) s'écrit finalement :

$$\sum_{j=1}^m [Q_{aj} + Q_{dj} + Q_{(n.h)j}] \delta q_j = 0 \quad (2.13)$$

Mais comme  $\sum_{j=1}^m Q_{(n.h)j} \delta q_j = 0$ , elle se simplifie en :

$$\sum_{j=1}^m [Q_{aj} + Q_{dj}] \delta q_j = 0 \quad (2.14)$$

### 2.2.4 Equations de Lagrange pour un système holonôme

La formule (2.14) peut s'interpréter en disant que le vecteur  $[\mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_d]$  est assujéti à rester orthogonal au vecteur de composantes  $\delta \mathbf{q}$ . Si  $p = 0$ , les déplacements virtuels  $\delta q_j$  peuvent engendrer, à tout instant, toutes les directions de l'espace de configuration. Il en résulte que le premier vecteur est identiquement nul et la formule (2.8) conduit aux  $m$  équations de Lagrange :

$$Q_{aj} + Q_{dj} = 0 \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } m$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_{dj} \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } m$$

### 2.2.5 Lagrangien d'un système

Si toutes les forces dérivent du potentiel  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , on peut considérer le *Lagrangien* ou *fonction de Lagrange* du système matériel étudié :

$$L = T - V$$

Compte tenu de (2.9) les équations de Lagrange se réduisent alors à :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } m$$

Si toutes les forces réelles ne dérivent pas de ce potentiel, il faut mettre au deuxième membre les forces généralisées  $Q_{Ej} + Q_{Rj}$  issues des forces réelles qui ne dérivent pas de ce potentiel :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_{Ej} + Q_{Rj} \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } m$$

### 2.2.6 Multiplicateurs de Lagrange

Notons  $-\mathbf{c}_o$  le vecteur de dimension  $p$  de composantes  $c_{io}$  et  $\mathbf{C}$  la matrice  $p \times m$  des  $c_{lj}$ , telle les conditions non-holonômes s'écrivent :

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{c}_o \quad (2.15)$$

A temps constant, cette relation implique  $\mathbf{C}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Le vecteur  $\delta\mathbf{q}$  ne peut engendrer tout l'espace à  $m$  dimension. Il est limité au sous-espace de dimension  $m - p$  orthogonal aux  $p$  lignes de  $\mathbf{C}$ . La relation (2.14) implique que le vecteur  $[\mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_d]$  est assujéti à être dans le sous-espace orthogonal à l'espace de dimension  $m - p$  généré par  $\delta\mathbf{q}$ . Il est donc assujéti à appartenir au sous-espace de dimension  $p$  engendré par les  $l$  lignes de  $\mathbf{C}$ . Si on note  $-\lambda_l$  les composantes de ce vecteur sur les lignes de  $\mathbf{C}$ , il vient :

$$\mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_d = -\mathbf{C}^T \lambda$$

et les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d + \mathbf{C}^T \lambda$$

où  $\mathbf{Q}_d$  est le vecteur de forces généralisées réelles données.

#### Relation avec les $\mathbf{Q}_{(n.h)}$

A chacune des  $p$  conditions non-holonômes correspond une composante de force ou moment de réaction, qui normalement ne travaille pas quand la liaison est respectée. Au niveau de la relation (2.12), nous avons noté  $\lambda_l$  ces  $p$  composantes. La relation s'écrit matriciellement :

$$\mathbf{Q}_{(n.h)} = \mathbf{C}^T \lambda$$

et permet d'écrire les équations de Lagrange sous la forme :

$$\mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_{(n.h)} = 0 \quad (2.16)$$

ou bien :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_{(n.h)}$$

La relation (2.16) peut-être interprétée comme une conséquence directe de la relation (2.13) en considérant des travaux virtuels qui ne respectent aucune des liaisons non-holonômes (ce qui nécessite de faire travailler les  $\mathbf{Q}_{(n.h)}$ ). Alors  $\delta\mathbf{q}$  peut engendrer tout l'espace de dimension  $m$ . Il en résulte que le vecteur  $[\mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_{(n.h)}]$  qui lui est toujours orthogonal ne peut être qu'identiquement nul.

### 2.2.7 Théorème de l'énergie cinétique dans le formalisme de Lagrange

Lorsque certaines des conditions non-holonômes font intervenir explicitement le temps, c'est-à-dire lorsqu'une partie du mouvement est imposée par une loi horaire donnée, l'énergie cinétique du système  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  est la somme d'un terme  $T_2$  composé de termes normaux de degré 2 (quadratiques) en  $\dot{q}$ , d'un terme  $T_1$  composé de termes de degré 1 (linéaires) en  $\dot{q}$  et d'un terme  $T_0$  composé de termes de degré zéro en  $\dot{q}$ . En fait, il existe des termes en vitesses données  $v(t)$  et  $T_1$  est composé de termes en produits  $v(t)\dot{q}$  et  $T_0$  est quadratique en  $v(t)$  :

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Quelle que soit la fonction à valeur scalaire  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  au plus quadratique en  $\dot{q}$ , on démontre<sup>1</sup> que :

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} (T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t}$$

Or  $\sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^m Q_j \delta q_j \forall \delta q_j$ , soit en particulier pour  $\delta q_j = \dot{q}_j$  d'où :

$$\frac{d}{dt} (T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{j=1}^m Q_j \dot{q}_j \quad (2.17)$$

Cette relation constitue l'écriture du théorème de l'énergie cinétique dans le formalisme de Lagrange, particulièrement utile lorsque des liaisons dépendent explicitement du temps.

**Remarque :** La puissance totale de l'ensemble des forces réelles s'écrit :

$$\pi_r = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)$$

d'où :

$$\pi_r = \sum_{j=1}^m Q_j \dot{q}_j + \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}$$

*La puissance totale de l'ensemble des forces réelles est la somme de la puissance des forces généralisées et de la puissance des forces réelles dans le seul mouvement imposé, à configuration figée.*

La puissance des forces généralisées ne représente donc qu'une partie de la puissance mise en jeu par les forces réelles. Elle ne comptabilise pas la puissance fournie au système pour l'entraîner, à configuration figée (tous les  $q_j$  constants) dans le (ou les) mouvement imposé.

**Utilisation du Lagrangien** (cas de l'existence d'un potentiel).

Etant donné une fonction scalaire  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  au plus quadratique en  $\dot{q}$ , la relation générale pour les fonctions au plus quadratique en  $\dot{q}$  permet d'écrire :

$$\sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \frac{d}{dt} (V_2 - V_0) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

où  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = V_2 + V_1 + V_0$  (indices relatifs au degré en  $\dot{q}$ ).

Si les  $Q_j$  dérivent du potentiel  $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , on a  $Q_j = \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j} \right)$ . D'où :

$$\frac{d}{dt} (V_2 - V_0) + \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{j=1}^m Q_j \dot{q}_j \quad (2.18)$$

En utilisant le Lagrangien  $L = T - V$ , et en posant  $L = L_2 + L_1 + L_0$  (indices relatifs au degré en  $\dot{q}$ ), il vient en retranchant (2.18) de (2.17) :

$$\frac{d}{dt} (L_2 - L_0) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

1. En effet :

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2; \quad \sum_{j=1}^m \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = T_1; \quad \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_j} = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T_2 + T_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^m \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j \text{ or } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j, \text{ d'où :}$$

$$\frac{d(T_2 + T_1 + T_0)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) - \sum_{j=1}^m \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

ce qui conduit à l'expression désirée.

qui constitue le théorème de l'énergie cinétique en présence d'un potentiel.

Remarque : Si toutes les forces réelles ne dérivent pas de ce potentiel, il faut mettre au deuxième membre la puissance forces généralisées  $Q_{NPj}$  issues des forces réelles qui ne dérivent pas de ce potentiel :

$$\frac{d}{dt}(L_2 - L_0) + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^m Q_{NPj} \dot{q}_j$$

### 2.2.8 Intégrales premières de l'énergie au sens de Lagrange

Si la dérivée partielle  $\frac{\partial L}{\partial t}$  est égal à la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction  $F$ , on a l'intégrale première de l'énergie :

$$L_2 - L_0 + F = cte$$

Plus simplement :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow L_2 - L_0 = cte$$

De plus si on a un simple *potentiel de position*  $V(\mathbf{q})$ , alors  $V_2 = V_1 = 0$ , il en résulte l'intégrale de Painlevé :

$$T_2 - T_0 + V = cte$$

(intégrale première en présence de mouvements imposés).

De plus si les liaisons sont indépendantes du temps (pas de mouvements imposés), alors  $T_1 = T_0 = 0$ . On trouve :

$$T + V = cte$$

qui est l'intégrale première classique de l'énergie.

### 2.2.9 Intégrales premières cinétiques au sens de Lagrange

Dans le cas d'un système admettant un Lagrangien  $L$ , s'il existe une coordonnée de configuration  $q_j$  pour laquelle  $\frac{\partial L}{\partial q_j}$  est la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction  $G$ , on a l'intégrale première cinétique :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - G = cte$$

Plus simplement :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = cte$$

Si  $q_j$  est un paramètre mesurant la translation selon un axe  $\vec{u}$ , la projection de résultante cinétique sur  $\vec{u}$  est constante ( $\vec{p} \cdot \vec{u} = cte$ ).

Si  $q_j$  est un paramètre mesurant la rotation autour un axe  $\vec{u}$ , la projection du moment cinétique sur  $\vec{u}$  est constante ( $\vec{h} \cdot \vec{u} = cte$ ).

Il n'est pas nécessaire de faire intervenir le Lagrangien pour trouver ce type d'intégrale première. En revenant aux équations classiques de Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d + \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda}$ , on voit qu'on a l'intégrale première  $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = cte$  si  $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$  et  $Q_{dj} = 0$  et à condition que la variable  $\dot{q}_j$  n'apparaisse dans aucune des conditions non-holonômes.

### 2.2.10 Exemples de mise en oeuvre

Le principal intérêt du formalisme de Lagrange est de permettre d'ignorer totalement les réactions internes. En effet, les réactions n'interviennent que dans le calcul des forces généralisées par la formule  $Q_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{f}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ . Une réaction interne associée au maintien d'une liaison ne travaille que lorsque la liaison est violée, car dans un déplacement d'ensemble des deux parties qui maintient la liaison, les travaux des action et réaction s'annulent. Les déplacements  $\delta q_j$  respectent naturellement les contraintes holonômes. Il en résulte que les réactions associées à ces contraintes peuvent être totalement ignorées. Par contre, nous avons vu que les réactions associées aux contraintes non-holonômes interviennent dans les équations de Lagrange, mais, comme les précédentes elles peuvent être ignorées, à condition de les prendre en compte par le biais d'un multiplicateur.

#### Divers traitements des liaisons

Considérons à titre d'exemple le système constitué par le cylindre roulant sur le plan incliné représenté figure 2.1. Cherchons les équations de son mouvement en supposant qu'il roule sans glisser sur le plan incliné avec un coefficient de frottement sec  $f = \tan \varphi$ .

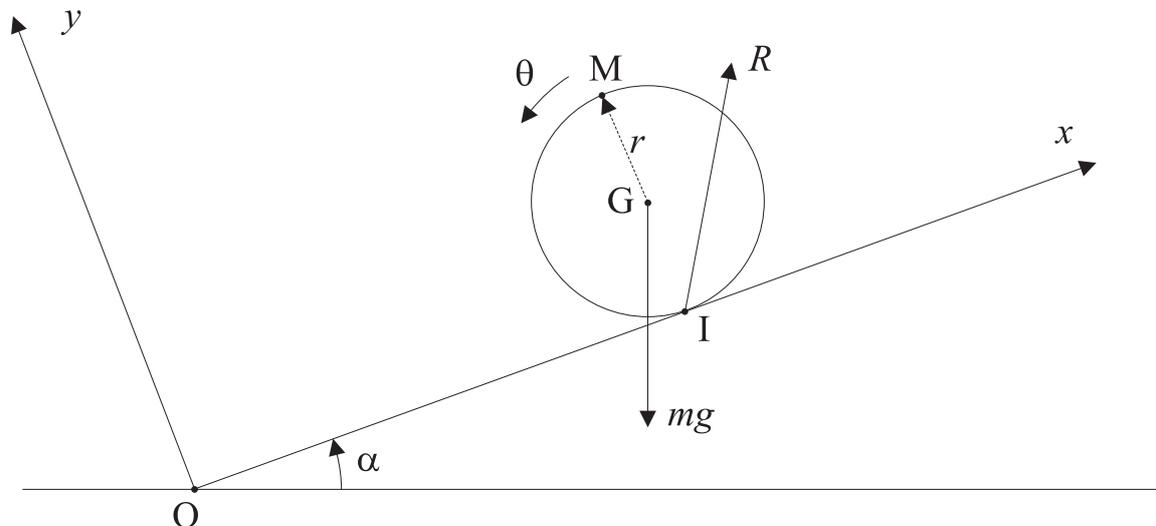


FIGURE 2.1 – Cylindre roulant sur un plan incliné

Repérons son centre de gravité G par ses coordonnées  $x$  et  $y$  dans le repère  $Oxy$  et son orientation par l'angle de rotation  $\theta$  que fait le vecteur  $\overrightarrow{GM}$  une direction fixe. Notons  $m$  la masse du cylindre et  $J = \frac{1}{2}mr^2$  son moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire au plan, passant par G.

#### Traitement classique en holonôme.

La contrainte qui maintient le cylindre en contact avec le plan se traduit par la relation holonôme :

$$y = r \quad (1)$$

Cette relation holonôme permet d'éliminer la variable  $y$  qui ne sera pas prise en compte dans la modélisation. A cette liaison holonôme est associé la composante normale  $R_y$  de la réaction du plan sur le cylindre qui sera donc totalement ignorée.

La contrainte qui assure le non glissement du cylindre sur le plan se traduit par la relation à priori non-holonôme :

$$\dot{x} + r\dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

Nous intégrons cette relation en :

$$x + r\theta = 0 \quad (3)$$

en choisissant le point M de telle manière que la constante d'intégration soit nulle. Cette relation permet d'éliminer une deux variables  $x$  ou  $\theta$ . Traitons la donc en relation holonôme et choisissons de conserver comme seul paramètre de configuration  $x$ . A cette liaison holonôme est associé la composante tangentielle  $R_x$  de la réaction du plan sur le cylindre qui sera donc totalement ignorée.

La seule force à prendre en compte est le poids  $m\vec{g}$  du cylindre.

Pour cette modélisation, le système est holonôme avec un seul degré de liberté. ( $n = m = 1, p = 0$ ) et un seul paramètre de configuration  $q_1 = x$ .

Pour la force généralisée  $Q_1$  associée à ce paramètre on a les possibilités suivantes :

— Calculer  $Q_1$  en faisant travailler  $m\vec{g}$  dans les déplacements induits par  $\delta x$  :

$$Q_1 \delta x = m\vec{g} \cdot \delta\vec{G}$$

ou  $\delta\vec{G} = \delta x \vec{i}$  et  $\vec{g} \cdot \vec{i} = -g \sin \alpha$ , d'où :

$$Q_1 = -mg \sin \alpha$$

— Calculer  $Q_1$  en utilisant le potentiel de pesanteur  $V = mgh = mgx \sin \alpha + cte$  :

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} = -mg \sin \alpha$$

— Puisque toutes les forces données dérivent d'un potentiel, on peut utiliser le Lagrangien  $L = T - V$  et ne pas mettre de forces généralisées  $Q$ .

L'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Soit compte tenu et (1) et (2) et de la valeur de  $J$  :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

Si on utilise le Lagrangien  $L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - mgx \sin \alpha$  l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + mg \sin \alpha = 0$$

Si on n'utilise pas le Lagrangien :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 \rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} = -mg \sin \alpha$$

Dans tous les cas l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha \quad (\text{en utilisant (3)}).$$

Les réactions  $R_y$  et  $R_x$  demeurent inconnues. On ne peut pas vérifier la condition de non-glissement  $|R_x| < \text{tg} \phi R_y$ .

*Dans les approches suivantes nous n'utiliserons plus les aspect potentiels et Lagrangien qui ont été illustrés sur ce cas.*

### Traitement en non-holonôme sans multiplicateur.

La relation (3) n'est pas utilisée pour éliminer  $\theta$ . Le système à donc  $p = 1$  condition non-holonôme et toujours un seul degré de liberté  $n = m - p = 1$ , avec  $m = 2$  paramètres de configuration :

$$q_1 = x \text{ et } q_2 = \theta$$

Ces deux paramètres de configurations sont liés par la relation non-holonôme :

$$\dot{x} + r\dot{\theta} = 0$$

Cette liaison est maintenue grâce à la réaction tangentielle  $R_x$ . Dans cette approche, sans multiplicateur, cette réaction doit être prise en compte.

$$Q_1 \delta x + Q_2 \delta \theta = m \vec{g} \cdot \vec{\delta G} + R_x \vec{i} \cdot \vec{\delta I}$$

avec  $\vec{\delta G} = \delta x \vec{i}$  et  $\vec{\delta I} = \delta x \vec{i} + r \delta \theta \vec{j}$ , d'où :

$$Q_1 = -mg \sin \alpha + R_x$$

$$Q_2 = rR_x$$

L'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\theta}^2$$

D'où le système constitué par les deux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 \rightarrow m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + R_x \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_2 \rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} = r R_x \quad (5)$$

et la dérivée de la condition non holonôme :

$$\ddot{x} + r \ddot{\theta} = 0 \quad (6)$$

On tire  $R_x$  de (5) et  $\ddot{\theta}$  de (6) qu'on reporte dans (4). Il vient :

$$m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} m r^2 \left( -\frac{\ddot{x}}{r} \right) \right) \rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} = -mg \sin \alpha, \text{ soit :}$$

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3} g \sin \alpha$$

puis :

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha \quad \text{en utilisant (6),}$$

puis :

$$R_x = \frac{1}{3} m g \sin \alpha \quad \text{en utilisant (4).}$$

$R_y$  étant inconnu, on ne peut vérifier la condition de non-glissement.

### Traitement en non-holonôme avec multiplicateur.

Cette approche est similaire à la précédente, mais ici la réaction tangentielle  $R_x$  n'est pas prise en compte dans le calcul des  $Q_j$ . Par contre un multiplicateur  $\lambda$  (qui en fait est égal à  $R_x$ ) est associé à la condition non holonôme

$$\lambda : 1\dot{x} + r\dot{\theta} = 0 \rightarrow \begin{cases} 1\lambda \text{ ajouté à la première équation} \\ r\lambda \text{ ajouté à la deuxième équation} \end{cases}$$

Les  $Q_j$  sont donnés par :

$$Q_1 \delta x + Q_2 \delta \theta = m \vec{g} \cdot \vec{\delta G} \rightarrow Q_1 = -mg \sin \alpha \text{ et } Q_2 = 0.$$

D'où le système constitué par les deux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 + \lambda \rightarrow m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + \lambda$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_2 + r\lambda \rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} = r\lambda$$

On retrouve exactement les mêmes équations que précédemment avec  $\lambda$  à la place de  $R_x$ .

**Traitement en non-holonôme supplémentaire (avec ou sans multiplicateurs).**

Afin de vérifier la condition de non-glissement, et donc évaluer  $R_y$ , on va considérer les  $m = 3$  paramètres de configuration  $q_1 = x$ ,  $q_2 = \theta$  et  $q_3 = y$ , et les  $p = 2$  conditions non-holonômes (et multiplicateurs associés) :

$$\lambda_1 : 1\dot{x} + r\dot{\theta} + 0\dot{y} = 0 \rightarrow \begin{cases} 1\lambda_1 \text{ ajouté à la première équation} \\ r\lambda_1 \text{ ajouté à la deuxième équation} \\ 0\lambda_1 \text{ ajouté à la troisième équation} \end{cases}$$

$$\lambda_2 : 0\dot{x} + 0\dot{\theta} + 1\dot{y} = 0 \rightarrow \begin{cases} 0\lambda_2 \text{ ajouté à la première équation} \\ 0\lambda_2 \text{ ajouté à la deuxième équation} \\ 1\lambda_2 \text{ ajouté à la troisième équation} \end{cases}$$

La première condition non-holonôme est la relation de roulement sans glissement avec comme multiplicateur de Lagrange  $\lambda_1 = R_x$ .

La deuxième condition non-holonôme est la condition non-holonôme supplémentaire (dérivée de  $y = r$ ) avec comme multiplicateur de Lagrange  $\lambda_2 = R_y$ .

Les  $Q_j$  sont donnés par :

$$Q_1 \delta x + Q_2 \delta \theta + Q_3 \delta y = m \vec{g} \cdot \vec{\delta G}. \text{ Or maintenant } \vec{\delta G} = \delta x \vec{i} + \delta y \vec{j}. \text{ D'où :}$$

$$Q_1 = -mg \sin \alpha$$

$$Q_2 = 0$$

$$Q_3 = -mg \cos \alpha$$

L'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

D'où le système constitué par les trois équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 + \lambda_1 \rightarrow m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + \lambda_1 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_2 + r\lambda_1 \rightarrow \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = r\lambda_1 \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_3 + \lambda_2 \rightarrow m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + \lambda_2 \quad (9)$$

et les dérivées des conditions non-holonômes :

$$\ddot{x} + r\ddot{\theta} = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad (11)$$

$$(9) \text{ et } (11) \text{ impliquent : } R_y = \lambda_2 = mg \cos \alpha$$

(7), (8) et (10) sont identiques au traitement précédent, d'où :

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{r} \sin \alpha$$

$$R_x = \lambda_1 = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$$

Le maintien du contact du point I suppose que  $R_y = mg \cos \alpha > 0$ , c'est-à-dire que  $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$  ce qui est toujours le cas.

La condition de non-glissement suppose que  $|R_x| < \text{tg}\phi R_y$ , c'est-à-dire que  $|\text{tg}\alpha| < 3\text{tg}\phi$ . Elle est indépendante du mouvement. Il en résulte qu'il n'y a pas de commutations éventuelles à considérer entre

des phases à roulement sans glissement et des phases à glissement. Si la condition n'est pas vérifiée, la modélisation effectuée n'est pas représentative du mouvement.

### Cas du glissement

Traisons ce cas en holonôme ( $p = 0$ ). La liaison  $y = r$  élimine le paramètre  $y$  et permet d'ignorer la réaction  $R_y$ . Le système possède  $n = m = 2$  degrés de libertés et paramètres de configuration  $q_1 = x$  et  $q_2 = \theta$ .

Les forces généralisées s'obtiennent par :

$$Q_1 \delta x + Q_2 \delta \theta = m \vec{g} \cdot \delta \vec{G} + R_x \vec{i} \cdot \delta \vec{I}$$

d'où :

$$Q_1 = -mg \sin \alpha + R_x$$

$$Q_2 = rR_x$$

L'énergie cinétique du cylindre s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\theta}^2$$

D'où le système constitué par les deux équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1 \rightarrow m \ddot{x} = -mg \sin \alpha + R_x$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_2 \rightarrow \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} = r R_x$$

où ici la force  $R_x$  est donnée par la loi de frottement sec de Coulomb et Morin :

$$R_x = -f |R_y| \text{signe}(\dot{x} + r\dot{\theta})$$

Supposons que nous ayons calculé  $R_y$  par un moyen quelconque ( $R_y = mg \cos \alpha$ ). Il vient :

$$\frac{\ddot{x}}{g \sin \alpha} = -1 - \frac{f}{\text{tg} \alpha} \text{signe}(\dot{x} + r\dot{\theta})$$

$$\frac{r\ddot{\theta}}{\sin \alpha} = 2 \frac{f}{\text{tg} \alpha} g \text{signe}(\dot{x} + r\dot{\theta})$$

La quantité  $\dot{x} + r\dot{\theta}$  peut elle s'annuler et rester nulle ? On a :

$$\frac{\ddot{x} + r\ddot{\theta}}{g \sin \alpha} = -1 - \frac{3 \text{tg} \alpha}{\text{tg} \alpha} \text{signe}(\dot{x} + r\dot{\theta}) < 0$$

En conséquence  $\dot{x} + r\dot{\theta}$  diminue en permanence. Si les conditions initiales sont telles que  $\dot{x} + r\dot{\theta} > 0$ , c'est-à-dire si le point I glisse en montant, ce mouvement va s'inverser jusqu'à ce que la vitesse du point I s'annule. A ce moment  $\ddot{x} + r\ddot{\theta}$  étant toujours négatif, la vitesse du point I devient négative et le glissement continue mais en sens inverse.

### Conclusion :

Ces différents traitements montrent les différentes possibilités offertes par le formalisme de Lagrange. Le traitement à mettre normalement en oeuvre est le premier : traitement en holonôme complet. Quand il subsiste de vraies conditions non-holonômes (qui ne permettent pas d'éliminer des paramètres de configuration) on utilisera les multiplicateurs de Lagrange, afin de pouvoir ignorer totalement les réactions qui ne travaillent pas.

Toutefois, certains systèmes, même simple se prêtent mal au formalisme de Lagrange, à cause de la nécessité de spécifier et d'utiliser de vrais paramètres de configuration. Considérons par exemple les équations du mouvement d'un corps solide isolé dans l'espace. Il faut considérer 6 paramètres de configuration, par exemple les 3 coordonnées de position  $x$ ,  $y$  et  $z$  de son centre de gravité et 3 angles d'Euler précisant son orientation et calculer son énergie cinétique en fonction des dérivées de ces paramètres :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

en notant  $m$  sa masse,  $A$ ,  $B$  et  $C$  ses moments principaux d'inertie et  $p, q, r$  les composantes de sa vitesse instantanée de rotation dans le repère principal d'inertie.

En ce qui concerne les 3 premiers paramètres on trouve tout de suite :

$$m\ddot{x} = m\ddot{y} = m\ddot{z} = 0.$$

En ce qui concerne les 3 autres, la dérivation des équations de Lagrange va nécessiter l'utilisation des relations qui lient les  $p, q, r$  aux dérivées des angles d'Euler et conduire à des équations très complexes, alors que le théorème du moment cinétique conduit immédiatement aux équations d'Euler :

$$A\dot{p} + qr(C - B) = 0$$

$$B\dot{q} + rp(A - C) = 0$$

$$C\dot{r} + pq(B - A) = 0$$

### Intégrales premières

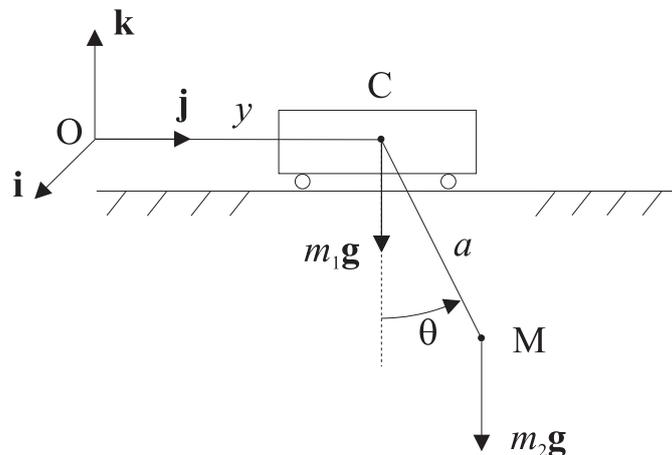


FIGURE 2.2 – Pendule elliptique d'Euler

Considérons le système mécanique représenté figure 2.2 assujetti à évoluer sans frottement dans le plan vertical de la figure. Un chariot de masse  $m_1$  roule sans glisser sur un plan horizontal. Il porte attachée en un point  $C$  par un fil non pesant inextensible de longueur  $a$  une masse  $m_2$  ponctuelle en  $M$ .

On considère les deux paramètres de configuration  $y$  abscisse de  $C$  et  $\theta$  angle de  $CM$  avec la verticale descendante.

La seule force à prendre en compte est le poids  $m_2\mathbf{g}$ . On peut la prendre en compte par l'intermédiaire du potentiel :

$$V = -m_2ga \cos \theta$$

L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{V}_C^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{V}_M^2$$

car  $\mathbf{V}_{G_1} = \mathbf{V}_C$ . On a :

$$\mathbf{V}_C = \dot{y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_C + \dot{\theta} \mathbf{i} \times \mathbf{CM} = y\dot{\mathbf{j}} + \dot{\theta} \mathbf{i} \times a(-\mathbf{k} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) = (\dot{y} + a\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{j} + a\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{k}$$

D'où :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta} \cos \theta)$$

Le système est holonôme, non dissipatif. Il admet le Lagrangien :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{y}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + 2a\dot{\theta} \cos \theta) + m_2 g a \cos \theta$$

Intégrales premières :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow L_2 - L_0 = T + V = cte. \text{ C'est l'intégrale première de l'énergie :}$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 + m_2 \left( \frac{1}{2} a^2 \dot{\theta}^2 + a\dot{\theta} \cos \theta - g a \cos \theta \right) = E$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = cte. \text{ C'est l'intégrale première cinétique :}$$

$$(m_1 + m_2) \dot{y} + m_2 a \dot{\theta} \cos \theta = p_x (= cte)$$

Equations classiques de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0, \text{ d'où :}$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{y} + m_2 a (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m_2 (a^2 \dot{\theta} + a\dot{y} \cos \theta), \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -m_2 (a\dot{y} \sin \theta + g a \sin \theta), \text{ d'où :}$$

$$a\ddot{\theta} + \dot{y} \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

Remarque : Considérons l'abscisse  $y_G$  du centre de gravité du système mécanique. On a :

$$m_1 y + m_2 (y + a \sin \theta) = (m_1 + m_2) y_G, \text{ d'où :}$$

$$(m_1 + m_2) \dot{y}_G = p_x$$

Choisissons comme repère galiléen le repère d'abscisse  $y_G$ , en translation rectiligne uniforme, telle que  $\dot{y}_G = 0$ . Il en résulte que :

$$m_1 y + m_2 (y + a \sin \theta) = 0$$

Dans ce repère, on a :

$$y_M = y + a \sin \theta = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} a \sin \theta + a \sin \theta = \frac{am_1}{m_1 + m_2} \sin \theta$$

$$z_M = -a \cos \theta$$

Le point M décrit une ellipse. La première équation de Lagrange traduit le fait que  $\ddot{y}_G = 0$ . Quand  $m_1 \rightarrow \infty, \dot{y} \rightarrow 0$ . La deuxième redonne l'équation classique du pendule ordinaire.

### Cas des systèmes multi-corps

Considérons un système mécanique constitué par assemblage de  $N$  corps rigides  $\mathbf{C}_i$ , de masse  $m_i$ , de centre d'inertie  $G_i$  et de tenseur d'inertie  $\mathbf{J}_i$  en  $G_i$ . Notons  $\mathbf{V}_i$  la vitesse de translation de  $G_i$  relativement à un repère galiléen et  $\Omega_i$  la vitesse de rotation du corps  $\mathbf{C}_i$  relativement à l'inertie. Ces

vitesse s'expriment en fonction des dérivées des  $m$  coordonnées généralisées  $q_j$  par des relations de la forme :

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}'_{it} + \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{Vij} \dot{q}_j$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\Omega}'_{it} + \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{\Omega ij} \dot{q}_j$$

A titre d'exemple si  $\mathbf{V}_i = \frac{d}{dt} \mathbf{OG}_i$ , alors  $\mathbf{V}'_{it} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{OG}_i$  et  $\mathbf{J}_{Vij} = \frac{\partial}{\partial q_j} \mathbf{OG}_i$ . Plus précisément :

— si le corps  $\mathbf{C}_i$  n'est pas sur une branche cinématique postérieure au mouvement mesuré par la coordonnée articulaire  $q_j$ , alors :

$$\mathbf{J}_{Vij} = \mathbf{J}_{\Omega ij} = \mathbf{0}$$

— sinon,

– si  $q_j$  est une variable mesurant une distance le long d'un axe de vecteur unitaire  $\mathbf{u}_j$ , alors  $\dot{q}_j$  produit au niveau du corps  $\mathbf{C}_i$  un apport de vitesse de translation  $\dot{q}_j \mathbf{u}_j$ . Il en résulte que :

$$\mathbf{J}_{Vij} = \mathbf{u}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{\Omega ij} = \mathbf{0}$$

– si  $q_j$  est une variable mesurant un angle de rotation autour d'un axe de vecteur unitaire  $\mathbf{u}_j$ , passant par un point  $O_j$ , alors  $\dot{q}_j$  produit au niveau du corps  $\mathbf{C}_i$  un apport de vitesse de rotation  $\dot{q}_j \mathbf{u}_j$  et au niveau du point  $G_i$  un apport de vitesse de translation  $\dot{q}_j \mathbf{u}_j \times \mathbf{O}_j G_i$ . Il en résulte que :

$$\mathbf{J}_{Vij} = \mathbf{u}_j \times \mathbf{O}_j G_i \quad \text{et} \quad \mathbf{J}_{\Omega ij} = \mathbf{u}_j$$

$\mathbf{V}'_{it}$  et  $\boldsymbol{\Omega}'_{it}$  sont les vitesses induites par les mouvements imposés dépendant explicitement du temps.

Pour calculer les forces généralisées  $\mathbf{Q}_d$  on considère les déplacements virtuels à temps constant en translation  $\delta \mathbf{G}_i$  et en rotation  $\delta \mathcal{A}_i$  notés :

$$\delta \mathbf{G}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{Vij} \delta q_j$$

$$\delta \mathcal{A}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{\Omega ij} \delta q_j$$

Notons  $\mathbf{F}_{di}$  et  $\mathbf{M}_{di}$  le torseur résultant en  $G_i$  des forces extérieures appliquées aux corps  $\mathbf{C}_i$ , sans compter les composantes associées aux réactions qui ne travaillent pas (elles seront prises en compte par les multiplicateurs). Le travail virtuel de l'ensemble de ces torseurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W_d &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{di} \cdot \delta \mathbf{G}_i + \mathbf{M}_{di} \cdot \delta \mathcal{A}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{di} \cdot \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{Vij} \delta q_j + \mathbf{M}_{di} \cdot \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{\Omega ij} \delta q_j \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$Q_{dj} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{di} \cdot \mathbf{J}_{Vij} + \mathbf{M}_{di} \cdot \mathbf{J}_{\Omega ij}$$

L'énergie cinétique totale du système mécanique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Omega}_i \cdot \mathbf{J}_i (\boldsymbol{\Omega}_i)$$

En remplaçant les  $\mathbf{V}_i$  et  $\boldsymbol{\Omega}_i$  par leurs valeurs, on obtient une expression de la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{T}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + T_0(\mathbf{q})$$

ou les termes  $\mathbf{T}_1(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + T_0(\mathbf{q})$  proviennent des termes  $\mathbf{V}'_{it}$  et  $\mathcal{Q}'_{it}$ .

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{T}_1(\mathbf{q}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) &= \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{T}}_1(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

D'où les  $m$  équations de Lagrange :

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{T}}_1(\mathbf{q}) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_d + \mathbf{C}^T \lambda$$

Que l'on doit associer aux  $p$  équations obtenues en dérivant (2.15) :

$$\mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{c}}_o - \dot{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{c}_1$$

Posons :

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}_d + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} - \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{T}}_1(\mathbf{q})$$

Pour calculer les  $m + p$  inconnues  $\ddot{\mathbf{q}}$  et  $\lambda$  on dispose alors des  $m + p$  équations :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}^T \lambda &= \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{c}_1 \end{aligned}$$

### Résolution 1 :

On peut, tout simplement, faire appel à un programme classique de résolution de système linéaire. De plus en changeant le signe de  $\lambda$ , la matrice du premier membre devient symétrique, ce qui permet d'utiliser une résolution par la décomposition de Choleski (voir annexe).

### Résolution 2 :

La matrice d'énergie cinétique  $\mathbf{M}$  est normalement définie positive. Elle permet de calculer  $\ddot{\mathbf{q}}$  dans la première équation :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{C}^T \lambda)$$

qui reporté dans la deuxième permet d'extraire  $\lambda$  :

$$\lambda = - (\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{c}_1 + \mathbf{S})$$

à condition que le rang de  $\mathbf{C}$  soit complet, c'est-à-dire que les  $p$  condition non-holonômes soient indépendantes. Reporté dans l'expression de  $\ddot{\mathbf{q}}$ , on obtient finalement les équations du mouvements sous la forme :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{c}_1 + \mathbf{S}) = \mathbf{S}$$

Cette méthode nécessite l'inversion explicite de  $\mathbf{M}$ .

**Résolution 3 :** On suppose que le rang de  $\mathbf{C}$  est complet:  $p = \text{rang}(\mathbf{C})$ . Notons  $\mathbf{N}$  la matrice  $m \times (m - p)$  de rang  $m - p$ , noyau de  $\mathbf{C}$ , telle que  $\mathbf{C} \mathbf{N} = \mathbf{0}$ . Il vient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{M} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}^T \mathbf{S} \\ \mathbf{c}_1 \end{pmatrix}$$

A priori la matrice  $m \times m$  du premier membre est de rang complet. On peut calculer  $\dot{\mathbf{q}}$  en résolvant ce système. Le calcul de  $\lambda$  peut être effectué en sélectionnant  $p$  lignes indépendantes dans  $\mathbf{C}^T$  et en résolvant le système  $\mathbf{C}^T \lambda = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{S}$  réduit à ces  $p$  lignes.

**Résolution 4 :**

Notons  $r = \text{rang}(\mathbf{C})$ . On utilise la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{C}$  (voir annexe) pour calculer sa pseudo-inverse  $\mathbf{C}^+$  et son noyau  $\mathbf{N}$ . On considère le vecteur  $\mathbf{z}$  de dimension  $m - r$  tel que :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^+ \mathbf{c}_0 + \mathbf{Nz}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^+ \mathbf{c}_1 + \mathbf{N}\dot{\mathbf{z}}$$

En reportant la valeur  $\ddot{\mathbf{q}}$  tirée de cette dernière équation dans l'équation de Lagrange, il vient :

$$\mathbf{M}(\mathbf{C}^+ \mathbf{c}_1 + \mathbf{N})\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}^T \lambda = \mathbf{S}$$

Soit en multipliant par  $\mathbf{N}^T$  :

$$\mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{N}^T (\mathbf{C}^T \lambda + \mathbf{S} - \mathbf{M} \mathbf{C}^+ \mathbf{c}_1) \text{ or } \mathbf{N}^T \mathbf{C}^T = \mathbf{0}, \text{ d'où}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{S} - \mathbf{M} \mathbf{C}^+ \mathbf{c}_1)$$

Le système à intégrer est alors constitué des  $2m - r$  équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N})^{-1} \mathbf{N}^T (\mathbf{S} - \mathbf{M} \mathbf{C}^+ \mathbf{c}_1)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^+ \mathbf{c}_0 + \mathbf{Nz}$$

Remarque : Si la modélisation est bien faite, les  $p$  conditions non-holonômes sont indépendantes ( $r = p$ ).

## 2.3 Les équations de Kane

Le principal inconvénient des équations de Lagrange provient de la complexité du calcul des termes  $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\dot{\mathbf{T}}_1(\mathbf{q})$  et  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}$ . Ce calcul nécessite des dérivées partielles par rapport aux paramètres de configuration, ce qui est particulièrement délicat lorsque ces paramètres sont des paramètres angulaires non physiques (non liés à un axe matérialisé) tels que les angles d'Euler utilisés pour repérer l'orientation d'un corps. Pour remédier à cet inconvénient Kane propose une approche qui ne nécessite pas cette dérivation par rapport aux coordonnées généralisées. Pour cela il propose de définir directement  $m$  vitesses généralisées  $w_j$  sans spécifier la signification de leur intégrale. Les  $m$  équations différentielles du second ordre peuvent être représentées vectoriellement sous la forme habituelle :

$$\mathbf{Q}_a + \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_{(n.h)} = 0$$

Le calcul des forces généralisées  $\mathbf{Q}_d$  et  $\mathbf{Q}_{(n.h)}$  associées aux forces réelles est similaire à celui utilisé dans les équations de Lagrange. Par contre, pour calculer les forces généralisées  $\mathbf{Q}_a$ , associées aux forces inertielles il faut expliciter ces dernières au niveau de chaque corps.

Considérons le cas d'un système multi-corps et notons  $\mathbf{V}_i$  les vitesses de translation de  $G_i$  et  $\Omega_i$  les vitesses de rotation du corps  $C_i$  relativement à un repère galiléen. Ces vitesses s'expriment comme précédemment en fonction des  $m$  vitesses généralisées  $w_j$  par des relations de la forme :

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{V}'_{it} + \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{Vij} w_j$$

$$\Omega_i = \Omega'_{it} + \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{\Omega ij} w_j$$

L'intégrale définie  $\int_0^t w_j dt$  peut correspondre à un paramètre de configuration  $q_j$  ou pas, comme par exemple celle d'une composante du vecteur vitesse de rotation instantané dont l'intégrale n'a aucune signification physique.

Comme précédemment, on associe aux vitesses  $\mathbf{V}_i$  et  $\Omega_i$  des déplacements virtuels à temps constant en translation  $\delta G_i$  et en rotation  $\delta \mathcal{A}_i$  notés :

$$\delta G_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{Vij} \delta q_j$$

$$\delta \mathcal{A}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{J}_{\Omega ij} \delta q_j$$

où  $\delta q_j$  représente un déplacement virtuel élémentaire selon (ou autour) la direction de l'axe associé à la vitesse  $w_j$ . Ce déplacement virtuel à un sens, même si  $\int_0^t w_j dt$  n'a pas de sens physique. Il en résulte que les :

$$Q_{dj} = \frac{\partial W_d}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{di} \cdot \mathbf{J}_{Vij} + \mathbf{M}_{di} \cdot \mathbf{J}_{\Omega ij}$$

sont les forces généralisées associées à ces déplacements virtuels.

Appelons  $\mathbf{F}_{ai}$  et  $\mathbf{M}_{ai}$  le torseur résultant en  $G_i$  des forces inertielles du corps  $C_i$ . Pour calculer la force généralisée  $Q_{aj}$ , on applique la même technique que pour les  $Q_{dj}$  au moyen du travail virtuel  $\delta W_a$  des forces d'inertie :

$$\delta W_a = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ai} \cdot \delta G_i + \mathbf{M}_{ai} \cdot \delta \mathcal{A}_i$$

D'où :

$$Q_{aj} = \frac{\partial W_a}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{ai} \cdot \mathbf{J}_{Vij} + \mathbf{M}_{ai} \cdot \mathbf{J}_{\Omega ij}$$

Notons  $m_i$  la masse de  $C_i$ , et  $\mathbf{J}_i$  son tenseur d'inertie en  $G_i$ ,  $\gamma_i$  l'accélération de  $G_i$  relative à un repère galiléen et  $\mathbf{h}_i$  le moment cinétique en  $G_i$  de  $C_i$  :

$$\gamma_i = \frac{d}{dt}_{/0} \mathbf{V}_i$$

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{J}_i (\Omega_i)$$

Il vient :

$$\mathbf{F}_{ai} = -m_i \gamma_i$$

$$\mathbf{M}_{ai} = -\frac{d}{dt}_{/0} \mathbf{h}_i = -\mathbf{J}_i (\dot{\Omega}_i) - \Omega_i \times \mathbf{h}_i$$

où  $\dot{\Omega}_i$  est la dérivée  $\Omega_i$  relative au repère galiléen ou au repère lié à  $C_i$  (ces deux dérivées sont égales).

**Remarque :** La présentation traditionnelle des équations de Kane n'utilise ni les déplacements virtuels  $\delta q_j$ ,  $\delta G_i$  et  $\delta \mathcal{A}_i$ , ni les travaux virtuels  $\delta W_d$  des forces réelles et  $\delta W_a$  des forces d'inertie. Nous proposons cette approche car elle permet de bien faire la liaison avec les équations de Lagrange et le théorème des travaux virtuels. Nous utilisons ces déplacements virtuels  $\delta q_j$ ,  $\delta G_i$  et  $\delta \mathcal{A}_i$  et les travaux virtuels  $\delta W_d$  et  $\delta W_a$ , plutôt que de travailler directement en prenant les dérivées partielles par rapport aux vitesses  $w_j$  des puissances virtuelles calculées à partir des vitesses  $\mathbf{V}_i$  et  $\Omega_i$  car ces puissances peuvent faire apparaître des termes en  $w_j^2$  pour lesquels il ne faudrait pas considérer le facteur 2 dans la dérivation partielle par rapport à  $w_j$ .

**Exemple :** Considérons le pendule elliptique d'Euler figure 2.2 traité en 2.2.10.

On considère la vitesse généralisé  $w_1 = \dot{y}$  mesurant la vitesse de translation du point C le long de  $\mathbf{j}$  et la vitesse généralisée  $w_2 = \dot{\theta}$  mesurant la vitesse de rotation de CM autour de  $\mathbf{k}$ .

Les vitesses des centres de masse s'écrivent :

$$\mathbf{V}_{G_1} = \dot{y}\mathbf{j} = w_1\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}_{G_2} = (\dot{y} + a\dot{\theta}\cos\theta)\mathbf{j} + a\dot{\theta}\sin\theta\mathbf{k} = w_1\mathbf{j} + w_2(a\cos\theta\mathbf{j} + a\sin\theta\mathbf{k})$$

Il en résulte les déplacements virtuels :

$$\delta\mathbf{G}_1 = \delta q_1\mathbf{j}$$

$$\delta\mathbf{G}_2 = \delta q_1\mathbf{j} + \delta q_2(a\cos\theta\mathbf{j} + a\sin\theta\mathbf{k})$$

La seule force qui travaille est le poids  $m_2\mathbf{g} = -m_2g\mathbf{k}$ .

Le travail virtuel de  $m_2\mathbf{g}$  s'écrit :

$$\delta W_d = -m_2g\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{G}_2 = -m_2ga\sin\theta\delta q_2, \text{ d'où :}$$

$$Q_{d1} = 0 \text{ et } Q_{d2} = -m_2ga\sin\theta$$

Les accélérations des centres de masse s'écrivent (par dérivation de  $\mathbf{V}_{G_1}$  et  $\mathbf{V}_{G_2}$ ) :

$$\gamma_{G_1} = \dot{w}_1\mathbf{j}$$

$$\gamma_{G_2} = (\dot{w}_1 + a\dot{w}_2\cos\theta - a w_2^2\sin\theta)\mathbf{j} + a(\dot{w}_2\sin\theta + w_2^2\cos\theta)\mathbf{k}$$

Le travail virtuel des forces inertielles s'écrit :

$$\delta W_a = -m_1\gamma_{G_1} \cdot \delta\mathbf{G}_1 - m_2\gamma_{G_2} \cdot \delta\mathbf{G}_2, \text{ soit :}$$

$$\delta W_a = -m_1\dot{w}_1\delta q_1 - m_2(\dot{w}_1 + a\dot{w}_2\cos\theta - a w_2^2\sin\theta)(\delta q_1 + a\cos\theta\delta q_2) - m_2a^2(\dot{w}_2\sin\theta + w_2^2\cos\theta)\sin\theta\delta q_2$$

$$\delta W_a = -((m_1 + m_2)\dot{w}_1 + m_2a(\dot{w}_2\cos\theta - w_2^2\sin\theta))\delta q_1 - m_2a(\dot{w}_1\cos\theta + a\dot{w}_2)\delta q_2$$

d'où :

$$Q_{a1} = -(m_1 + m_2)\dot{w}_1 - m_2a(\dot{w}_2\cos\theta - w_2^2\sin\theta)$$

$$Q_{a2} = -m_2a(\dot{w}_1\cos\theta + a\dot{w}_2)$$

La Première équation de Kane  $Q_{a1} + Q_{d1} = 0$  s'écrit :

$$(m_1 + m_2)\dot{w}_1 + m_2a(\dot{w}_2\cos\theta - w_2^2\sin\theta) = 0$$

On retrouve la première équation de Lagrange.

La deuxième équation de Kane  $Q_{a2} + Q_{d2} = 0$  s'écrit :

$$\dot{w}_1\cos\theta + a\dot{w}_2 + g\sin\theta = 0$$

On retrouve la deuxième équation de Lagrange.

Remarque : Dans le calcul des  $Q_{ai}$ , si on considère une puissance virtuelle  $P_a$  à la place d'un travail virtuel  $\delta W_a$ , on a le terme  $(m_2aw_2^2\sin\theta)w_1$  à la place de  $(m_2aw_2^2\sin\theta)\partial q_1$ . Sa dérivation par rapport à  $w_2$  fournit une quantité supplémentaire fautive pour  $Q_{a2}$  égale à  $2m_2aw_1w_2\sin\theta$ . C'est pour cette raison que nous présentons le calcul des  $Q_{ai}$  et  $Q_{di}$  à partir de travaux virtuels, plutôt qu'à partir des puissances virtuelles.



## Chapitre 3

# Modèle dynamique d'un robot "série"

On considère un robot composé de  $N$  corps  $C_i$  ayant chacun un seul degré de liberté par rapport au corps précédent  $C_{i-1}$ . Le premier corps est lié au socle  $C_0$ . Les méthodes présentées dans ce chapitre conduisent pour ce système à un modèle minimal de 6 équations aux 6 inconnues, dérivées secondes des 6 paramètres de configuration.

### 3.1 La structure du modèle dynamique

Pour justifier la forme générale du modèle, le plus simple est d'utiliser le formalisme de Lagrange en considérant les coordonnées moteurs comme paramètres de configuration. Les développements théoriques qui suivent, et particulièrement la présentation des coefficients de Christoffel peuvent être sautés par les lecteurs qui ne sont intéressés que par les résultats ayant un intérêt pratique.

Supposons que le robot possède  $N$  moteurs et notons  $T$  l'énergie cinétique du robot manipulateur. C'est une forme quadratique des vitesses  $\dot{m}_j$  des moteurs qui se met sous la forme :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{m}}^T \mathbf{A}_m \dot{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{jk} \dot{m}_j \dot{m}_k$$

où les éléments  $a_{jk}$  de la matrice d'inertie symétrique  $\mathbf{A}_m$  dépendent de la configuration :  $a_{jk}(m)$ .

Remarque : Nous n'utilisons pas la convention de sommation d'Einstein, avec indices covariants et contravariants et sommation implicite lorsque le même indice apparaît dans les deux positions, bien qu'elle allège notablement les formules, afin que les lecteurs non accoutumés à cette convention puissent lire plus facilement les développements qui suivent.

Notons  $V(m)$  le potentiel de toutes les forces dérivant d'un potentiel de position, à savoir les forces de pesanteur, les forces des ressorts d'équilibrage, etc ...

#### 3.1.1 Les équations de Lagrange

Si les  $N$  vitesses  $\dot{m}_i$  sont indépendantes (système holonôme), on peut écrire  $N$  équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{m}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial m_i} = \frac{\partial W}{\partial m_i} \text{ pour } i = 1 \text{ à } N$$

Le membre de droite représente les forces généralisées inertielles qui travaillent quand seul  $m_i$  varie et le membre de gauche représente le travail des forces réelles quand seul  $m_i$  varie. Les forces réelles qui travaillent sont :

- les forces généralisées dérivant du potentiel  $V(m)$  :  $p_i = -\frac{\partial V}{\partial m_i}$
- les forces généralisées de frottement :  $-f_{Vii}\dot{m}_i - F_{Si}$  (visqueux et sec, avec en général  $F_{Si}$  du signe de  $\dot{m}_i$ )
- les forces généralisées motrices :  $C_{mi}$

Détaillons la structure du membre de gauche. Il vient :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{m}_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_{ik} \dot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ji} \dot{m}_j$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{m}_i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_{ik} \ddot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ji} \ddot{m}_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \dot{a}_{ik} \dot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \dot{a}_{ji} \dot{m}_j$$

Développons les  $\dot{a}_{ik}$  et  $\dot{a}_{ji}$  sous la forme :

$$\dot{a}_{ik} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j} \dot{m}_j \text{ et } \dot{a}_{ji} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ji}}{\partial m_k} \dot{m}_k$$

Il vient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{m}_i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_{ik} \ddot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ji} \ddot{m}_j + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j} \dot{m}_j \dot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ji}}{\partial m_k} \dot{m}_k \dot{m}_j$$

Par ailleurs :

$$\frac{\partial T}{\partial m_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} \dot{m}_j \dot{m}_k$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{m}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial m_i} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_{ik} \ddot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ji} \ddot{m}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j} + \frac{\partial a_{ji}}{\partial m_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} \right) \dot{m}_j \dot{m}_k$$

Remplaçons partout  $a_{ji}$  par  $a_{ij}$  et  $k$  par  $j$  au niveau de la première somme. Il vient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{m}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial m_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \ddot{m}_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial m_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} \right) \dot{m}_j \dot{m}_k$$

Notons  $b_{i,jk}$  les coefficients de Christoffel définis par :

$$b_{i,jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial a_{ik}}{\partial m_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial m_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} \right)$$

Il vient :

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \ddot{m}_k + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{i,jk} \dot{m}_j \dot{m}_k + f_{Vii} \dot{m}_i + F_{Si} - p_i = C_{mi} \text{ pour } i = 1 \text{ à } N$$

Notons :

- $\mathbf{F}_V$  la matrice diagonale des coefficients de frottement visqueux  $f_{Vii}$ ,
- $\mathbf{F}_S$  le vecteur de forces généralisées de frottement sec de composantes  $F_{Si}$ ,
- $\mathbf{P}_m$  le vecteur des forces généralisées de pesanteur et des ressorts d'équilibrage de composantes  $p_i$ ,
- $\mathbf{B}_m(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}})$  le vecteur des forces généralisées centrifuges et Coriolis de composantes :

$$B_i(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{i,jk} \dot{m}_j \dot{m}_k$$

On a alors sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}_m \ddot{\mathbf{m}} + \mathbf{B}_m(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) + \mathbf{F}_V \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{F}_S - \mathbf{P}_m = \mathbf{C}_m \quad (3.1)$$

**En statique**, lorsque  $\dot{\mathbf{m}} = \ddot{\mathbf{m}} = 0$ , on a  $\mathbf{B}(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) = \mathbf{F}_V \dot{\mathbf{m}} = 0$ . Considérons que les frottements secs sont également nuls. Il en résulte que :

$$\mathbf{P}_m + \mathbf{C}_m = 0$$

Généralement des ressorts d'équilibrage contre-balancent les forces de pesanteur au voisinage des configurations moyenne de travail. Dans ce voisinage  $\mathbf{P}_m \simeq 0 \rightarrow \mathbf{C}_m \simeq 0$ .

### 3.1.2 La puissance des forces centrifuge et Coriolis

Ce paragraphe ne sert qu'à démontrer la relation  $\dot{\mathbf{m}}^T \mathbf{B}_m(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{m}}^T \dot{\mathbf{A}}_m \dot{\mathbf{m}}$  utilisée en commande sur un point théorique très éloigné des réalités physiques.

La puissance des forces généralisées centrifuge et Coriolis s'écrit :

$$\Pi_c = \dot{\mathbf{m}}^T \mathbf{B}_m(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{i,jk} \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k$$

Soit en permutant les indices :

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N b_{i,jk} \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N b_{j,ki} \dot{m}_j \dot{m}_k \dot{m}_i \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{k,ij} \dot{m}_k \dot{m}_i \dot{m}_j \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (b_{i,jk} + b_{j,ki} + b_{k,ij}) \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \end{aligned}$$

D'où :

$$\Pi_c = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial m_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial m_j} \right) \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k$$

Evaluons le terme  $\Pi_a = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{m}}^T \dot{\mathbf{A}}_m \dot{\mathbf{m}}$  :

$$\begin{aligned} \Pi_a &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \dot{a}_{jk} \dot{m}_j \dot{m}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \end{aligned}$$

En effectuant, comme précédemment une permutation des indices on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_a &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{ki}}{\partial m_j} \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial m_k} \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial m_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial m_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial m_j} \right) \dot{m}_i \dot{m}_j \dot{m}_k \end{aligned}$$

D'où la relation :

$$\dot{\mathbf{m}}^T \mathbf{B}_m(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{m}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{m}}^T \dot{A}_m \dot{\mathbf{m}} \quad (3.2)$$

### 3.2 Modèle complet par les théorèmes généraux

Rappelons que le système mécanique est constitué par une *chaîne cinématique simple* de  $N$  corps  $\mathcal{C}_i$  simplement articulés entre eux,  $\mathcal{C}_1$  étant articulé par rapport au socle fixe  $\mathcal{C}_0$ . Nous notons  $\vec{u}_i$  le vecteur unitaire sur l'axe d'articulation entre les corps  $\mathcal{C}_{i-1}$  et  $\mathcal{C}_i$  et  $q_i$  la mesure algébrique de la translation le long de  $\vec{u}_i$  ou de la rotation autour de  $\vec{u}_i$ . Nous notons  $\tau_i$  et  $\rho_i$  deux indicateurs tels que :

$$\tau_i + \rho_i = 1$$

- $\tau_i = 1$  si l'articulation est une translation le long de  $u_i$  ( $\rho_i = 0$ ),
- $\rho_i = 1$  si l'articulation est une rotation autour de  $u_i$  ( $\tau_i = 0$ ).

A chaque corps  $\mathcal{C}_i$  ( $i = 0$  à  $N$ ) est associé un repère  $\mathcal{R}_i$  fixe dans  $\mathcal{C}_i$ . Les origines  $O_i$  des repères  $\mathcal{R}_i$  ( $i = 1$  à  $N$ ) sont choisies sur les axes d'articulation  $\vec{u}_i$ . Dans le cas d'une translation nous notons  $O_i^-$  la position de  $O_i$  dans  $\mathcal{C}_{i-1}$  qui correspond à  $q_i = 0$ . Dans la configuration origine (tous les  $q_i = 0$ ), on choisit l'orientation des bases  $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1$  à  $N$ ) des repères  $\mathcal{R}_i$  toutes parallèles à la base  $\mathcal{B}_0$ .

#### Données géométriques :

- $\mathbf{l}_i = (\mathbf{O}_{i-1} \mathbf{O}_i^-)_{i-1}$  pour  $i = 1$  à  $N$ , les 3 composantes dans la base  $\mathcal{B}_{i-1}$  des  $N$  vecteurs  $\vec{l}_i = \overrightarrow{\mathbf{O}_{i-1} \mathbf{O}_i^-}$ ,
- $\mathbf{d}_i = (\mathbf{O}_i \mathbf{G}_i)_i$  pour  $i = 1$  à  $N$ , les 3 composantes dans la base  $\mathcal{B}_i$  des  $N$  vecteurs  $\vec{d}_i = \overrightarrow{\mathbf{O}_i \mathbf{G}_i}$ , où  $\mathbf{G}_i$  est le centre de masse du corps  $\mathcal{C}_i$ ,
- $\mathbf{e}_i = (\mathbf{O}_i \mathbf{E}_i)_i$  pour  $i = 1$  à  $N$ , les 3 composantes dans la base  $\mathcal{B}_i$  de  $N$  vecteurs  $\vec{e}_i = \overrightarrow{\mathbf{O}_i \mathbf{E}_i}$ , où  $\mathbf{E}_i$  est un point de réduction du torseur  $\{\vec{F}_{E_i}, \vec{\mathcal{M}}_{E_i}\}$  des efforts extérieurs donnés exercés sur le corps  $\mathcal{C}_i$ , à l'exception des forces de pesanteur qui sont comptabilisées à part,
- $\mathbf{u}_i = (u_i)_{i-1}$  pour  $i = 1$  à  $N$ , les 3 composantes dans la base  $\mathcal{B}_{i-1}$  des  $N$  vecteurs  $\vec{u}_i$ .

L'orientation de  $\mathcal{B}_i$  relativement à  $\mathcal{B}_{i-1}$  est donnée par :

$$\mathbf{R}_{q_i, \mathbf{u}_i} = \mathbf{1} + \sin q_i \vec{\mathbf{u}}_i + (1 - \cos q_i) \vec{\mathbf{u}}_i^2$$

Remarque :

Généralement le vecteur colonne  $\mathbf{u}_i$  est un des trois vecteurs de base et la matrice  $\mathbf{R}_{q_i, \mathbf{u}_i}$  se réduit à une matrice des trois matrices élémentaires de rotation autour d'un vecteur de base.

#### Données inertielles :

- $m_i$  la masse du corps  $\mathcal{C}_i$ ,
- $\mathbf{I}_i$  la matrice des 9 composantes dans la base  $\mathcal{B}_i$  du tenseur d'inertie  $\mathcal{I}_i$  en  $\mathbf{G}_i$  du corps  $\mathcal{C}_i$ .

#### Motorisation :

On suppose que la motorisation des articulations est effectuée par des actionneurs possédant éventuellement un système de transmission avec des axes entrée et sortie non alignés. Une translation peut ainsi être réalisée directement par un vérin linéaire ou par un moteur rotatif et une crémaillère, l'axe d'entrée (axe stator-rotor) étant différent de l'axe de sortie (direction de la crémaillère). Une rotation peut être effectuée par un moteur rotatif avec un réducteur à renvoi d'angle.

Appelons  $\mathcal{A}_i$  l'actionneur entraînant le corps  $\mathcal{C}_i$  par rapport au corps  $\mathcal{C}_{i-1}$ . On note :

- $\alpha_i$  le rapport de réduction de la transmission de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$ ,
- $\xi_{v_i}$  le coefficient d'amortissement visqueux ramené sur l'axe de sortie ( $\xi_{v_i} = \alpha_i^2 \xi_{ve_i} + \xi_{vs_i}$ ) de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$ ,

- $Q_{s_i}$  la force ou couple de frottement sec s'opposant au mouvement de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$ , ramené sur l'axe de sortie ( $Q_{s_i} = \alpha_i^2 Q_{se_i} + Q_{ss_i}$ ),
- $\varepsilon_i$  les composantes dans  $\mathcal{B}_{i-1}$  du vecteur unitaire  $\vec{\varepsilon}_i$  de l'axe rotor de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$ ,
- $C_{m_i}$  la force ou le couple moteur de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$
- $j_{m_i}$  l'inertie autour de l'axe de rotation  $\vec{\varepsilon}_i$  du rotor et de la pignonnerie d'entrée rigidement liée au rotor de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$ ,
- $i_{m_i}$  l'inertie du rotor et de la pignonnerie d'entrée autour d'un axe transversal (orthogonal à  $\vec{\varepsilon}_i$ ),
- $\mathbf{I}_{m_i}$  les composantes dans  $\mathcal{B}_{i-1}$  du tenseur d'inertie  $\mathcal{I}_{m_i}$  du rotor et de la pignonnerie d'entrée de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{m_i} &= (j_{m_i} - i_{m_i}) \varepsilon_i \varepsilon_i^T + i_{m_i} \mathbf{1} \\ &= j_{m_i} \varepsilon_i \varepsilon_i^T - i_{m_i} \tilde{\varepsilon}_i^2\end{aligned}$$

Dans le cas où l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$  possède effectivement un système de réduction, la masse  $m_i$  du corps  $\mathcal{C}_i$  comprend naturellement la masse de la pignonnerie (ou arbre de sortie) de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$  et la masse du carter de l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$  qui sont des masses rigidement liées à  $\mathcal{C}_i$ , mais également la masse du rotor et de la pignonnerie d'entrée de l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$ . Cette masse n'est rigidement liée ni à  $\mathcal{C}_i$ , ni à  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Nous l'affectons au corps  $\mathcal{C}_i$  (uniquement dans le cas où ce corps intermédiaire existe effectivement).  $G_i$  est le centre de masse de cet ensemble. On note  $\mathcal{I}_i$  est le tenseur d'inertie de cet ensemble (dont tous les éléments ne tournent pas à la même vitesse) et  $\mathcal{I}_i^!$  le tenseur d'inertie réduit qui ne comporte pas les inerties des parties non rigidement liées au corps  $\mathcal{C}_i$ . Il vient :

$$\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_i^! + \mathcal{I}_{m_{i+1}}$$

Dans le cas où l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$  ne possède pas de système de réduction (cas de vérins linéaires à effet direct ou de moteur rotatif à entraînement direct)  $\mathcal{I}_{m_{i+1}}$  n'existe pas. La masse du rotor (ou du piston du vérin) de  $\mathcal{A}_{i+1}$  est rigidement lié au corps  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Elle est naturellement affectée au corps  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Dans les équation on fera tout simplement :

- $\alpha_{i+1} = 1$
- $\vec{\varepsilon}_{i+1}$  ignoré (en fait identique à  $\vec{u}_{i+1}$ ),  $\mathbf{I}_{m_{i+1}} = 0$
- $\mathcal{I}_i^! = \mathcal{I}_i$ .

### 3.2.1 Algorithme de Newton-Euler

L'application des théorèmes généraux à ce problème, sous forme d'équations récurrentes, est connu sous le nom d'algorithme de Newton-Euler [2]. Nous l'avons adapté pour prendre en compte le système de transmission de la motorisation.

Les équations différentielles du mouvement du mécanisme peuvent être mises sous la forme :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\delta W_E(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}_A$$

où  $\mathbf{q}$  ( $q_i$  pour  $i = 1$  à  $N$ )  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  représente le vecteur configuration du mécanisme et ses dérivées, où  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  est appelé la matrice d'énergie cinétique du système, où  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  regroupe les termes inertiels de type centrifuge et Coriolis, où  $V(\mathbf{q})$  représente le potentiel de pesanteur, où  $\delta W_E(\mathbf{q})$  représente le travail d'autres forces réelles extérieures données et où  $\mathbf{Q}_A$  représente les forces généralisées articulaires motrices produites par les actionneurs. Posons :

$$\mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\delta W_E(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

Il vient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}_A$$

L'algorithme suivant [3] permet de calculer les forces généralisées articulaires motrices  $\mathbf{Q}_A$  à partir de la donnée de  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

Notons :

- $\vec{\Omega}_i$  le vecteur vitesse instantanée de rotation de  $\mathcal{R}_i$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  (supposé galiléen),
- $\vec{W}_i = \frac{d}{dt}_{/o} \vec{O}_o \vec{O}_i$  vitesse absolue de  $O_i$ ,
- $\vec{V}_i = \frac{d}{dt}_{/o} \vec{O}_o \vec{G}_i$  vitesse absolue de  $G_i$ ,
- $\vec{\Omega}_{m_i}$  le vecteur vitesse instantanée de rotation du rotor de  $\mathcal{A}_i$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ,
- $\vec{F}_{I_i}$  la force inertielle du corps  $\mathcal{C}_i$ ,
- $\vec{\mathcal{M}}_{a_i}$  le moment dynamique inertiel du rotor de l'actionneur  $\mathcal{A}_i$  en son centre de gravité,
- $\vec{\mathcal{M}}_{c_i}$  le moment dynamique inertiel en  $G_i$  du corps  $\mathcal{C}_i$ , sans le rotor de l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$ ,
- $\vec{F}_i, \vec{\mathcal{M}}_i$  le torseur exercé en  $O_i$  sur le corps  $\mathcal{C}_i$  par le corps  $\mathcal{C}_{i-1}$ .
- $\vec{F}_{E_i}, \vec{\mathcal{M}}_{E_i}$  le torseur exercé en  $O_i$  sur le corps  $\mathcal{C}_i$  par les forces extérieures réelles données autres que la pesanteur.

### Formules de récurrence

#### Calcul des forces et moments inertiels :

Une récurrence avant permet de calculer les positions, vitesses, accélérations et forces et moments inertiels au niveau de chaque corps. Cette récurrence est initialisée par :

$$\vec{W}_o = \vec{\Omega}_o = \vec{W}_o = \vec{\Omega}_o = \vec{0}$$

Pour  $i = 1$  à  $N$ , on calcule :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\lambda}_i &= \vec{l}_i + \tau_i q_i \vec{u}_i \\ \vec{\Omega}_{m_i} &= \vec{\Omega}_{i-1} + \alpha_i \dot{q}_i \vec{\varepsilon}_i \\ \vec{\Omega}_i &= \vec{\Omega}_{i-1} + \rho_i \dot{q}_i \vec{u}_i \\ \vec{W}_i &= \vec{W}_{i-1} + \vec{\Omega}_{i-1} \times \vec{\lambda}_i + \tau_i \dot{q}_i \vec{u}_i \\ \vec{V}_i &= \vec{W}_i + \vec{\Omega}_i \times \vec{d}_i \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\vec{\Omega}_{m_i} = \vec{\Omega}_{i-1} + \alpha_i \left( \ddot{q}_i \vec{\varepsilon}_i + \dot{q}_i \vec{\Omega}_{i-1} \times \vec{\varepsilon}_i \right)$$

$$\vec{\Omega}_i = \vec{\Omega}_{i-1} + \rho_i \left( \ddot{q}_i \vec{u}_i + \dot{q}_i \vec{\Omega}_{i-1} \times \vec{u}_i \right)$$

$$\vec{W}_i = \vec{W}_{i-1} + \vec{\Omega}_{i-1} \times \vec{\lambda}_i + \vec{\Omega}_{i-1} \times \left( \vec{\Omega}_{i-1} \times \vec{\lambda}_i \right) + \tau_i \left( \ddot{q}_i \vec{u}_i + 2\dot{q}_i \vec{\Omega}_{i-1} \times \vec{u}_i \right)$$

$$\vec{V}_i = \vec{W}_i + \vec{\Omega}_i \times \vec{d}_i + \vec{\Omega}_i \times \left( \vec{\Omega}_i \times \vec{d}_i \right)$$

$$\vec{F}_{I_i} = -m_i \vec{V}_i$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{a_i} = - \left\{ \mathcal{I}_{m_i} \left( \vec{\Omega}_{m_i} \right) + \vec{\Omega}_{m_i} \times \mathcal{I}_{m_i} \left( \vec{\Omega}_{m_i} \right) \right\}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{c_i} = - \left\{ \mathcal{I}'_i \left( \vec{\Omega}_i \right) + \vec{\Omega}_i \times \mathcal{I}'_i \left( \vec{\Omega}_i \right) \right\}$$

#### Calcul des torseurs de réaction :

Une récurrence arrière permet de calculer les torseurs de réaction en appliquant les théorèmes généraux de la mécanique. Cette récurrence est initialisée par :

$$\vec{F}_{N+1} = \vec{\mathcal{M}}_{N+1} = \vec{\mathcal{M}}_{a_{N+1}} = \vec{0}$$

Pour  $i = N$  à 1 on calcule :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i+1} - \left( \vec{F}_{E_i} + m_i \vec{g} + \vec{F}_{E_i} \right)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_i = \vec{\mathcal{M}}_{i+1} - \vec{\mathcal{M}}_{E_i} - \vec{e}_i \times \vec{F}_{E_i} - \vec{d}_i \times \left( \vec{F}_{E_i} + m_i \vec{g} \right) + \vec{\lambda}_{i+1} \times \vec{F}_{i+1} - \vec{\mathcal{M}}_{c_i} - \vec{\mathcal{M}}_{a_{i+1}}$$

$$Q_{A_i} = \left( \tau_i \vec{F}_i + \rho_i \vec{\mathcal{M}}_i \right) \cdot \vec{u}_i - \alpha_i \vec{\mathcal{M}}_{a_i} \cdot \vec{\varepsilon}_i$$

La première équation traduit l'équilibre de toutes les forces (y compris inertielles) appliquées au corps  $\mathcal{C}_i$  (qui inclut la pignonnerie d'entrée de l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$ ).

La deuxième équation traduit l'équilibre des moments dynamiques en  $O_i$  de tous les moments dynamiques appliqués (y compris inertiels) appliqués à ce même corps. Les forces et moments internes entre stator et rotor de l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$  n'interviennent donc pas.

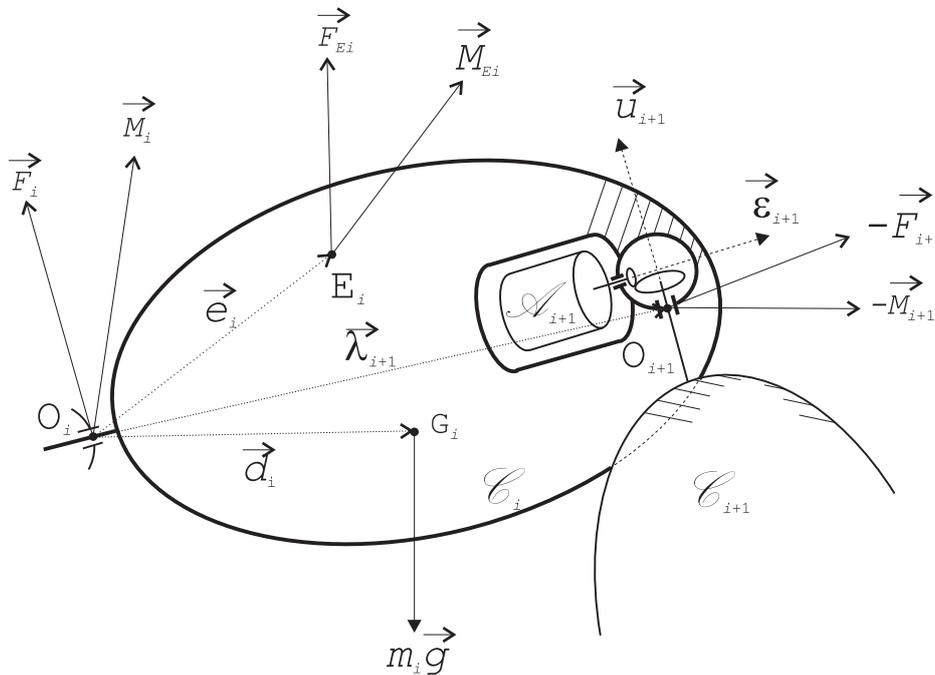


FIGURE 3.1 – Forces externes réelles appliquées au corps  $\mathcal{C}_i$

La dernière équation évalue les  $N$  termes  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  qui d'après les équations de Lagrange valent  $Q_{A_i}$ . Si on écrit la théorème des travaux virtuels dans le déplacement  $\delta q_i$  au système constitué par la pignonnerie d'entrée du moteur  $\mathcal{A}_i$ , on a :

$$C_{m_i} \alpha_i \delta q_i - \xi_{v_i} \dot{q}_i \delta q_i - Q_{s_i} \text{signe}(\dot{q}_i) \delta q_i + \vec{\mathcal{M}}_{a_i} \cdot \vec{\varepsilon}_i \alpha_i \delta q_i - \left( \tau_i \vec{F}_i + \rho_i \vec{\mathcal{M}}_i \right) \cdot \vec{u}_i \delta q_i = 0 \quad (3.3)$$

La force généralisée disponible pour le corps  $\mathcal{C}_i$  est ainsi :

$$\left( \tau_i \vec{F}_i + \rho_i \vec{\mathcal{M}}_i \right) \cdot \vec{u}_i = C_{m_i} \alpha_i - \xi_{v_i} \dot{q}_i - Q_{s_i} \text{signe}(\dot{q}_i) + \vec{\mathcal{M}}_{a_i} \cdot \vec{\varepsilon}_i \alpha_i$$

On ne peut donc la calculer directement en fonction des  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  puisque les  $\vec{\mathcal{M}}_{a_i}$  comportent des termes en  $\ddot{\mathbf{q}}$ . On note  $Q_{A_i}$  la partie qui n'est fonction que des  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  :

$$Q_{A_i} = \alpha_i C_{m_i} - (\xi_{v_i} \dot{q}_i + Q_{s_i} \text{signe}(\dot{q}_i)) \quad (3.4)$$

afin de disposer d'un second membre calculable (non fonction de  $\ddot{\mathbf{q}}$ ) dans les équations de Lagrange. Il résulte de l'équation précédente que l'on a également :

$$Q_{A_i} = \left( \tau_i \vec{F}_i + \rho_i \vec{\mathcal{M}}_i \right) \cdot \vec{u}_i - \alpha_i \vec{\mathcal{M}}_{a_i} \cdot \vec{\varepsilon}_i \alpha_i$$

qui est la troisième équation de la récurrence arrière.

#### Résultat :

A l'issu de ces deux étapes, on dispose des  $N$  composantes des forces généralisées  $Q_{A_i}$  qu'il faut appliquer aux articulations pour obtenir le mouvement défini par  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$ .

$$\mathbf{Q}_A = Q_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$$

### Organisation des calculs

Initialisation :

$$\mathbf{W} = \Omega = \dot{\mathbf{W}} = \dot{\Omega} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{pmatrix}$$

Pour  $i = 1$  à  $N$ , on calcule :

$$\lambda_i = \mathbf{l}_i + \tau_i q_i \mathbf{u}_i$$

$$\mathbf{S}_i = \tau_i \mathbf{1} + \rho_i \mathbf{R}_{q_i, \mathbf{u}_i}$$

$$\Omega_m = \Omega + \alpha_i \dot{q}_i \varepsilon_i \quad (\text{il s'agit de } (\Omega_{m_i})_{i-1})$$

$$\dot{\Omega}_m = \dot{\Omega} + \alpha_i (\ddot{q}_i \varepsilon_i + \dot{q}_i \Omega \times \varepsilon_i) \quad (\text{il s'agit de } (\dot{\Omega}_{m_i})_{i-1})$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{S}_i^T \{ \mathbf{W} + \Omega \times \lambda_i + \tau_i \dot{q}_i \mathbf{u}_i \} \quad (\text{il s'agit de } (W_i)_i)$$

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{S}_i^T \{ \dot{\mathbf{W}} + \dot{\Omega} \times \lambda_i + \Omega \times (\Omega \times \lambda_i) + \tau_i (\ddot{q}_i \mathbf{u}_i + 2\dot{q}_i \Omega \times \mathbf{u}_i) \} \quad (\text{il s'agit de } (\dot{W}_i)_i)$$

$$\dot{\Omega} = \mathbf{S}_i^T \{ \dot{\Omega} + \rho_i (\ddot{q}_i \mathbf{u}_i + \dot{q}_i \Omega \times \mathbf{u}_i) \} \quad (\text{il s'agit de } (\dot{\Omega}_i)_i)$$

$$\Omega = \mathbf{S}_i^T \{ \Omega + \rho_i \dot{q}_i \mathbf{u}_i \} \quad (\text{il s'agit de } (\Omega_i)_i)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} + \Omega \times \mathbf{d}_i \quad (\text{il s'agit de } (V_i)_i)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{W}} + \dot{\Omega} \times \mathbf{d}_i + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{d}_i) \quad (\text{il s'agit de } (\dot{V}_i)_i)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}_i^T \mathbf{g}$$

$$\mathbf{F}_{n_i} = m_i (\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{g}) \quad (\text{il s'agit de } -(\vec{F}_{I_i} + m \vec{g})_i)$$

$$\mathbf{M}_{a_i} = - \{ \mathbf{I}_{m_i} \dot{\Omega}_m + \Omega_m \times (\mathbf{I}_{m_i} \Omega_m) \} \quad (\text{projeté dans } \mathcal{B}_{i-1})$$

$$\mathbf{M}_{c_i} = - \{ \mathbf{I}_i \dot{\Omega} + \Omega \times (\mathbf{I}_i \Omega) \} \quad (\text{projeté dans } \mathcal{B}_i)$$

$$\mathbf{F}_{E_i} = (\vec{F}_{E_i})_i \text{ et } \mathbf{M}_{E_i} = (\vec{M}_{E_i})_i \text{ si des torseurs extérieurs sont à prendre en compte.}$$

Initialisation :

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$$

Pour  $i = N$  à 1 on calcule :

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}_i (\mathbf{M} + \mathbf{d}_i \times \mathbf{F}_{n_i} + \lambda_{i+1} \times \mathbf{F} - \mathbf{M}_{E_i} - \mathbf{e}_i \times \mathbf{F}_{E_i} - \mathbf{M}_{C_i} - \mathbf{M}_{a_{i+1}}) \quad (\text{il s'agit de } (\mathcal{M}_i)_{i-1})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}_i (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{n_i} - \mathbf{F}_{E_i}) \quad (\text{il s'agit de } (F_i)_{i-1})$$

$$Q_{A_i} = (\tau_i \mathbf{F} + \rho_i \mathbf{M}) \cdot \mathbf{u}_i - \alpha_i \mathbf{M}_{a_i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

Remarque : Les termes non définis qui apparaissent dans ces équations (tels que  $\lambda_{N+1}$ ,  $\mathbf{M}_{a_{N+1}}$ , ...) doivent être pris nuls.

### 3.2.2 Algorithme de Mampey

Cet algorithme [3] permet de calculer les termes de la matrice d'énergie cinétique par une récurrence arrière. Nous l'avons adapté pour prendre en compte le système de transmission de la motorisation.

#### Formules de récurrence

Notons  $t_i$  l'énergie cinétique du corps  $\mathcal{C}_i$  (qui inclut la pignonnerie d'entrée de l'actionneur  $\mathcal{A}_{i+1}$ ) :

$$t_i = \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_i \cdot \mathcal{I}_i' (\vec{\Omega}_i) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{m_{i+1}} \cdot \mathcal{I}_{m_i} (\vec{\Omega}_{m_{i+1}})$$

et notons :

$$T_k = \sum_{i=k}^N t_i$$

l'énergie cinétique de la chaîne cinématique qui va du corps  $\mathcal{C}_i$  au corps  $\mathcal{C}_N$ .

Posons la structure suivante pour  $T_k$  :

$$\begin{aligned} 2T_k &= M_k \vec{W}_k \cdot \vec{W}_k + \vec{\Omega}_k \cdot \mathcal{I}_k (\vec{\Omega}_k) + 2\vec{W}_k \cdot (\vec{p}_k \times \vec{\Omega}_k) \\ &+ 2\vec{\Omega}_k \cdot \left( \sum_{i=k+1}^N \dot{q}_i \vec{h}_{ki} \right) + 2\vec{W}_k \cdot \left( \sum_{i=k+1}^N \dot{q}_i \vec{r}_{ki} \right) \\ &+ \sum_{i=k+1}^N \sum_{j=k+1}^N a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

où les  $a_{ij}$  sont les éléments de la matrice d'énergie cinétique.

En exprimant que  $T_{k-1} = t_{k-1} + T_k$ , et en utilisant les formules de récurrence (a) on obtient les formules de récurrence suivantes :

$$M_{k-1} = M_k + m_{k-1}$$

$$\mathcal{I}_{k-1} = \mathcal{I}_k + \mathcal{I}_{k-1} - m_{k-1} \tilde{d}_{k-1}^2 - M_k \tilde{\lambda}_k^2 + \tilde{\lambda}_k \tilde{p}_k + \left( \tilde{\lambda}_k \tilde{p}_k \right)^T$$

$$\vec{p}_{k-1} = \vec{p}_k - m_{k-1} \vec{d}_{k-1} - M_k \vec{\lambda}_k$$

$$\vec{h}_{k-1,k} = \alpha_k j_{m_k} \vec{\varepsilon}_k + \tau_k \left( M_k \vec{\lambda}_k - \vec{p}_k \right) \times \vec{u}_k + \rho_k \left( \mathcal{I}_k (\vec{u}_k) + \vec{\lambda}_k \times (\vec{p}_k \times \vec{u}_k) \right)$$

$$\vec{r}_{k-1,k} = \tau_k M_k \vec{u}_k + \rho_k \vec{p}_k \times \vec{u}_k$$

$$a_{kk} = \alpha_k^2 j_{m_k} + \tau_k M_k + \rho_k \vec{u}_k \cdot \mathcal{I}_k (\vec{u}_k)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{h}_{k-1,i} &= \vec{h}_{ki} + \vec{\lambda}_k \times \vec{r}_{ki} \\ \vec{r}_{k-1,i} &= \vec{r}_{ki} \\ a_{ki} &= \left( \rho_k \vec{h}_{ki} + \tau_k \vec{r}_{ki} \right) \cdot \vec{u}_k \end{aligned} \right\} \text{ pour } i = k+1 \text{ à } N$$

### Organisation des calculs

#### Calcul préliminaire de constantes :

Les éléments suivants, indépendants des  $q_i$  sont calculés pour  $k = 1$  à  $N$  :

$$M_k = \sum_{i=k}^N m_i$$

$$C_k = \mathbf{I}_k - m_k \tilde{\mathbf{d}}_k^2$$

ainsi que :

$$a_{NN} = \tau_N M_N + \rho_N \mathbf{u}_N^T C_N \mathbf{u}_N$$

#### Calcul des variables géométriques :

Les éléments suivants, dépendants des  $q_i$  sont calculés pour  $k = 2$  à  $N$  :

$$\lambda_k = \mathbf{l}_k + \tau_k q_k \mathbf{u}_k$$

$$S_k = \tau_k \mathbf{1} + \rho_k \mathbf{R}_{q_k, \mathbf{u}_k}$$

$S_1$  n'est pas calculée car l'énergie cinétique est indépendante de  $q_1$ .

#### Calcul des termes $a_{ij}$ par récurrence arrière

Initialisation :

$$\mathbf{p} = -m_N \mathbf{d}_N$$

$$\mathbf{J} = C_N$$

Récurrence arrière de  $k = N - 1$  à 1 (base de projection  $\mathcal{B}_k$ ) :

$$\mathbf{p} = S_{k+1} \mathbf{p}$$

$$\mathbf{J} = S_{k+1} \mathbf{J} S_{k+1}^T$$

$$\mathbf{r} = \tau_{k+1} M_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \rho_{k+1} \mathbf{p} \times \mathbf{u}_{k+1} \quad (\text{il s'agit de } (\vec{r}_{k,k+1})_k)$$

$$\mathbf{h} = \alpha_{k+1} j_{m_{k+1}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} + \tau_{k+1} (M_{k+1} \lambda_{k+1} - \mathbf{p}) \times \mathbf{u}_{k+1} + \rho_{k+1} (\mathbf{J} \mathbf{u}_{k+1} + \lambda_{k+1} \times \mathbf{r}) \quad (\text{il s'agit de } (\vec{h}_{k,k+1})_k)$$

$$a_{k,k+1} = \mathbf{u}_k^T (\tau_k \mathbf{r} + \rho_k \mathbf{h}) \text{ et } a_{k+1,k} = a_{k,k+1}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J} + C_k - M_{k+1} \tilde{\lambda}_{k+1}^2 + \tilde{\lambda}_{k+1} \tilde{\mathbf{p}} + (\tilde{\lambda}_{k+1} \tilde{\mathbf{p}})^T \quad (\text{il s'agit de } (\mathcal{J}_k)_k)$$

$$a_{k,k} = \alpha_k^2 j_{m_k} + \tau_k M_k + \rho_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{J} \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} - m_k \mathbf{d}_k - M_{k+1} \lambda_{k+1} \quad (\text{c'est } (\vec{p}_k)_k)$$

Récurrence arrière (sauf pour  $k = 1$ ) de  $i = k - 1$  à 1 (base de projection  $\mathcal{B}_i$ ) :

$$\mathbf{r} = S_{i+1} \mathbf{r} \quad (\text{il s'agit de } (\vec{r}_{i,k+1})_i)$$

$$\mathbf{h} = S_{i+1} \mathbf{h} - \lambda_{i+1} \times \mathbf{r} \quad (\text{il s'agit de } (\vec{h}_{i,k+1})_i)$$

$$a_{i,k+1} = \mathbf{u}_i^T (\tau_i \mathbf{r} + \rho_i \mathbf{h}) \text{ et } a_{k+1,i} = a_{i,k+1}$$

Fin récurrence arrière de  $i = k - 1$  à 1.

Fin récurrence arrière de  $k = N - 1$  à 1.

### 3.2.3 Modèle de simulation

Pour simuler le comportement du mécanisme, il faut pouvoir calculer le vecteur  $\ddot{\mathbf{q}}$  à partir de la donnée  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$  et des forces et couples donnés. Dans la forme générale des équations différentielles du mouvement  $\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{Q}_A$ , on tire :

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\mathbf{A}(\mathbf{q})]^{-1} \{ \mathbf{Q} - \mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \}$$

Par intégration de  $\ddot{\mathbf{q}}$  on obtient  $\dot{\mathbf{q}}$  (et  $\mathbf{q}$  par une nouvelle intégration) ce qui permet de propager le mouvement.

L'algorithme de Mampey permet de calculer  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  et les relations 3.4 permettent de calculer  $\mathbf{Q}_A$ . L'algorithme de Newton-Euler permet de calculer  $\mathcal{Q}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , soit avec  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  :

$$\mathbf{S}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathcal{Q}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0})$$

D'où :

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\mathbf{A}(\mathbf{q})]^{-1} \{ \mathbf{Q}_A - \mathcal{Q}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0}) \}$$

Si on désire calculer les forces et couples de réactions aux liaisons entre corps, on exécute à nouveau l'algorithme de Newton-Euler avec le vecteur  $\ddot{\mathbf{q}}$  trouvé (il y a intérêt à organiser les calculs de manière à réutiliser les éléments indépendants de  $\ddot{\mathbf{q}}$  qui ont été calculés dans  $\mathcal{Q}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0})$ ).



## Chapitre 4

# Modèle dynamique d'un système multi-corps

### 4.1 Introduction

Nous présentons dans cette section un algorithme de modélisation de la dynamique d'un système multi-corps basé sur le principe des travaux virtuels<sup>1</sup> généralisés.

Le qualificatif généralisé est utilisé car contrairement à son utilisation classique où le principe permet d'obtenir une équation unique limitée à un sous-système en éliminant les forces internes inconnues (car elles ne travaillent pas), nous l'utilisons ici pour obtenir le système complet d'équations différentielles d'un système composé de  $N$  corps  $C_i$  ayant des liaisons diverses entre eux. Le passage de l'équation scalaire unique fournie par les travaux virtuels au système complet d'équations différentielles est réalisé, comme dans le cas des équations de Lagrange (également issue des travaux virtuels), en introduisant des multiplicateurs. Comparativement à l'utilisation classique de la méthode de Lagrange, l'approche utilisée est relativement lourde, puisqu'elle n'utilise pas les liaisons cinématiques entre les corps pour réduire le nombre de paramètres de configurations ( $6N$ ). Par contre elle présente l'avantage de permettre le calcul de toutes les composantes des forces internes.

### 4.2 Les paramètres de configuration et leurs dérivées

L'environnement du système est représenté par un corps unique  $C_0$  auquel est associé un repère de référence galiléen  $\mathcal{R}_0 = \{O, \mathcal{B}_0\}$  d'origine un point  $O$  et de base orthonormée directe  $\mathcal{B}_0 = \{\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0\}$ .

A chaque corps  $C_i$  du système mécanique est associé un repère  $\mathcal{R}_i = \{G_i, \mathcal{B}_i\}$  d'origine le centre de gravité  $G_i$  du corps  $C_i$  et de base (orthonormée directe)  $\mathcal{B}_i = \{\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i\}$ .

S'il existe des liaisons avec des éléments extérieurs au système, qui sont animés d'un mouvement donné, on représentera ces éléments par des corps  $C_k$  avec  $k > N$ .

Les éléments intervenant dans les relations de la mécanique sont présentés sous forme vectorielle intrinsèque. Au moment de faire des calculs, il faut faire intervenir des valeurs numériques. Ce sont, les

1. Certains mécaniciens préfèrent l'approche puissances virtuelles à l'approche travaux virtuels. Les deux approches sont strictement équivalentes. Là où les travaux virtuels font intervenir le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{\delta M}$  de la force  $\vec{F}$  par le déplacement virtuel  $\vec{\delta M}$  de son point d'application  $M$ , les puissances virtuelles font intervenir le produit scalaire  $\vec{F} \cdot \vec{V}_M^*$  de la force  $\vec{F}$  par la vitesse virtuelle  $\vec{V}_M^*$  du point  $M$ . La différence est essentiellement terminologique. Les puissances virtuelles sont plus pratiques au niveau des rotations car elles évitent l'introduction des micro-rotations virtuelles, mais le poids de l'habitude nous a influencé dans notre choix.

composantes de ces éléments dans une base ou dans une autre. Le choix de la base de projection étant arbitraire, il est retardé le plus possible.

Les composantes d'un vecteur  $\vec{T}$  ou opérateur  $\mathcal{T}$  dans une base  $\mathcal{B}_k$  seront respectivement notées  $(\vec{T})_k$  et  $(\mathcal{T})_k$ . La notation  $(\vec{T})_k$  représente la colonne des 3 composantes du vecteur  $\vec{T}$  dans une base  $\mathcal{B}_k$  et la notation  $(\mathcal{T})_k$  représente la matrice carrée des 9 composantes de l'opérateur  $\mathcal{T}$  dans une base  $\mathcal{B}_k$ . La plupart du temps nous simplifions la notation  $(\vec{T})_k$  en  $(T)_k$ .

#### 4.2.1 Les paramètres de position, vitesse et accélération

Le repère  $\mathcal{R}_i$  est situé relativement au rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  de référence par sa position représentée par le vecteur :

$$\vec{r}_i = \overrightarrow{OG_i}$$

et par son attitude notée  $\mathcal{A}_i$  qui sera représentée dans ce qui suit par l'opérateur rotation  $\mathcal{R}_{0i}$  qui transforme  $\mathcal{B}_0$  en  $\mathcal{B}_i$  :

$$\mathcal{B}_i = \mathcal{R}_{0i}(\mathcal{B}_0) \text{ c.-à.-d. } \begin{cases} \vec{i}_i = \mathcal{R}_{0i}(\vec{i}_0) \\ \vec{j}_i = \mathcal{R}_{0i}(\vec{j}_0) \\ \vec{k}_i = \mathcal{R}_{0i}(\vec{k}_0) \end{cases}$$

Notons :

$$\vec{v}_i = \frac{d}{dt}_{/0} \vec{r}_i$$

la vitesse de translation de  $G_i$  relativement à  $\mathcal{R}_0$ , et

$$\vec{\gamma}_i = \frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{r}_i$$

l'accélération de translation de  $G_i$  relativement à  $\mathcal{R}_0$ .

#### 4.2.2 Les paramètres d'attitude et vitesse de rotation

Pour noter l'attitude de la base  $\mathcal{B}_i$  relativement à la base  $\mathcal{B}_0$  nous utiliserons la notation  $\vec{\mathcal{A}}_i$ . Cette notation représente 3 paramètres d'attitude virtuels ou fictifs dont les dérivées sont égales à la vitesse de rotation. Les paramètres effectivement utilisés pour représenter les attitudes sont soit la matrice de passage :

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{C}_{oi} = (\mathcal{R}_{0i})_0 = (\mathcal{R}_{0i})_i$$

qui fait intervenir 9 paramètres liés par 6 conditions, soit le quaternion unitaire  $Q_i$  associé à cette matrice, qui fait intervenir 4 paramètres liés par une condition.

**ATTENTION :** Le sens de  $\mathbf{S}_i$  est tel que :

$$(T)_0 = \mathbf{S}_i (T)_i \text{ et } (\mathcal{T})_0 = \mathbf{S}_i (\mathcal{T})_i \mathbf{S}_i^T$$

Nous notons  $\vec{\Omega}_i$  la vitesse de rotation de  $\mathcal{B}_i$  relativement à  $\mathcal{B}_0$  et  $\tilde{\Omega}_i$  le tenseur antisymétrique associé. On a :

$$\frac{d}{dt}_{/0} \vec{\Omega}_i = \frac{d}{dt}_{/i} \vec{\Omega}_i \triangleq \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i$$

et :

$$\frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} = \tilde{\Omega}_i \circ \mathcal{R}_{0i}$$

**Remarque :** Comme déjà signalé, nous essayons de conserver le plus longtemps possible les équations sous forme vectorielle pure (avec des vecteurs et des opérateurs et non pas sous forme matricielle avec des composantes de vecteur ou d'opérateurs). Dans la relation ci-dessus, *le symbole  $\circ$  représente la composition des opérateurs*. Lorsque les composantes de tous les opérateurs qui interviennent dans cette expression sont exprimées dans la même base (quelle qu'elle soit), cette expression se traduit par la multiplication des matrices dans le même ordre, mais lorsque les composantes ne sont pas toutes exprimées dans la même base, il est fréquent que l'ordre des opérands soit inversé (cf. les expressions suivantes) :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} \right)_0 &= (\tilde{\Omega}_i)_0 (\mathcal{R}_{0i})_0 = (\tilde{\Omega}_i)_0 \mathbf{S}_i \\ \left( \frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} \right)_i &= (\tilde{\Omega}_i)_i (\mathcal{R}_{0i})_i = (\tilde{\Omega}_i)_i \mathbf{S}_i \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} \right)_0 &= (\tilde{\Omega}_i)_0 \mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i (\tilde{\Omega}_i)_i \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_i = (\mathcal{R}_{0i})_i (\tilde{\Omega}_i)_i \\ \left( \frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} \right)_i &= (\tilde{\Omega}_i)_i \mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i^T (\tilde{\Omega}_i)_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i = (\tilde{\Omega}_i)_0 (\mathcal{R}_{0i})_0^2 \end{aligned}$$

soit en ne conservant que les résultats :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} \right)_0 &= (\tilde{\Omega}_i)_0 \mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i (\tilde{\Omega}_i)_i \\ \left( \frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i} \right)_i &= (\tilde{\Omega}_i)_i \mathbf{S}_i = (\tilde{\Omega}_i)_0 \mathbf{S}_i^2 \end{aligned}$$

Les expressions de la deuxième ligne sont inhabituelles et très peu utilisées. Alors que les composantes dans  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}_i$  de  $\mathcal{R}_{0i}$  sont égales, ce n'est plus le cas des composantes de leurs dérivées  $\frac{d}{dt}_{/0} \mathcal{R}_{0i}$ . Généralement on n'exprime ces composantes que dans  $\mathcal{B}_0$ .

Bien que  $\vec{\mathcal{A}}_i$  ne représente rien de précis, nous donnons à  $d\vec{\mathcal{A}}_i$  le sens précis suivant :

$$d\vec{\mathcal{A}}_i = \vec{\Omega}_i dt$$

c'est-à-dire le vecteur micro-rotation élémentaire de  $\mathcal{B}_i$  relativement à  $\mathcal{B}_0$ . Nous l'utilisons pour exprimer le travail élémentaire d'un moment dynamique  $\vec{M}$  appliqué au corps  $C_i$  :  $\delta w = \vec{M} \cdot d\vec{\mathcal{A}}_i$ . Il eut peut être été plus simple de considérer la puissance virtuelle  $p = \vec{M} \cdot \vec{\Omega}_i^*$ .

### 4.2.3 Les contraintes cinématiques

Les liaisons cinématiques entre les corps imposent des contraintes entre les paramètres de configuration. Nous les appelons indifféremment *contraintes géométriques*, *liaisons mécaniques* ou *liaisons cinématiques*. Elles sont traitées dans cette modélisation comme des conditions de liaison non-holonôme, car nous *ne* les utiliserons *pas* pour éliminer des paramètres de configuration.

### Les paramètres cinématiques

Pour exprimer ces liaisons, on fait souvent intervenir des point particuliers des corps. Un point  $P_i$  appartenant au corps  $C_i$  est repéré dans le repère local  $\mathcal{R}_i$  de ce corps par le vecteur  $\overrightarrow{G_i P_i}$  noté  $\vec{p}_i$  :

$$\vec{p}_i = \overrightarrow{G_i P_i}$$

Vectoriellement, on a :

$$\frac{d}{dt}_{/0} \vec{p}_i = \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i$$

soit en composantes :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt}_{/0} \vec{p}_i \right)_0 &= -(p_i)_0 \times (\Omega_i)_0 = -(\mathcal{S}_i(p_i)_i) \times (\Omega_i)_0 = -\mathcal{S}_i((p_i)_i \times (\Omega_i)_i) \\ \left( \frac{d}{dt}_{/0} \vec{p}_i \right)_i &= -(p_i)_i \times (\Omega_i)_i \end{aligned}$$

### Les paramètres dynamiques

Une liaison entre deux corps  $C_i$  et  $C_j$  fait intervenir un torseur de liaison  $(\vec{f}, \vec{n})$  en un certain point de contact P entre les deux corps.  $\vec{f}$  est la force appliquée par  $C_i$  à  $C_j$  en P et  $\vec{n}$  est le moment dynamique appliqué par  $C_i$  à  $C_j$ . Le corps  $C_j$  applique à  $C_i$  le torseur opposé  $(-\vec{f}, -\vec{n})$ .

Supposons que cette liaison soit par exemple une liaison pivot (ou rotoïde) d'axe  $\vec{a}$ . Alors  $\vec{f}$  est une force interne dont les 3 composantes inconnues ne travaillent pas car le travail total de  $\vec{f}$  et  $-\vec{f}$  est nul étant donné que  $P_i = P_j = P$  :

$$\delta w = \vec{f} \cdot \delta P_i + (-\vec{f}) \cdot \delta P_j = (\vec{f} - \vec{f}) \cdot \delta P = 0$$

Il en est de même des deux composantes de  $\vec{n}$  dans le plan orthogonal à  $\vec{a}$ . Mais la composante  $c = \vec{n} \cdot \vec{a}$  de  $\vec{n}$  sur  $\vec{a}$  travaille dans le déplacement d'angle  $\delta\theta$  de rotation virtuelle de  $C_j$  par rapport à  $C_i$ . En effet si on considère le travail de l'action  $\vec{n}$  et de la réaction  $-\vec{n}$ , on a :

$$\delta w = c\theta + (-c)(\theta + \delta\theta) = -c\delta\theta$$

La mise en équation du système peut donc ignorer les 5 composantes inconnues qui ne travaillent pas, mais nécessite la donnée de la composante  $c$  qui travaille.

D'une manière générale, en appelant *forces généralisées* les composantes des forces et des moments, on distingue :

- les *forces généralisées inertielles* : qui prennent leur origine dans le mouvement des corps. Elles proviennent de la dérivation des quantités cinétiques. Ce sont les composantes des termes  $m_i \vec{\gamma}_i$  et  $\frac{d}{dt}_{/0} \vec{h}_i$  (voir sections suivantes).
- les *forces généralisées réelles* : les composantes des toutes les autres forces et moments, d'origine diverses (gravité, magnétique, électrostatique, contact, viscosité, etc...). Parmi les forces réelles, on distingue deux sous-groupe :
  - les *forces généralisées réelles internes inconnues*, composantes de forces ou moments de liaisons qui ne travaillent pas,
  - les *forces généralisées réelles données*, internes ou externes. Elles sont dites données car connaissant les paramètres de configuration et leurs dérivées premières, il existe des modèles qui permettent de les calculer.

A titre d'exemple, pour les *forces généralisées réelles données*, citons :

- les forces de pesanteur et les forces de rappel des ressorts qui sont calculées en fonction partir des paramètres de configuration,
- les forces de frottement visqueux ou sec qui sont calculées en fonction des vitesses de configuration,
- les forces aérodynamiques qui sont calculées en fonction partir des paramètres et des vitesses de configuration,
- ... etc.

Dans ce qui suit nous nous intéressons aux *forces généralisées vectorielles* associées aux *sous-vecteurs de configuration*  $\vec{r}_i$  et  $\vec{\mathcal{A}}_i$ . Nous définissons ces forces généralisées vectorielles à partir du travail virtuel des forces réelles, en faisant apparaître les facteurs  $\vec{f}_i$  et  $\vec{n}_i$  des vecteurs  $\vec{r}_i$  et  $\vec{\mathcal{A}}_i$  dans l'expression de ce travail virtuel :

$$\delta w = \sum_{i=1}^N \left( (f_i \cdot \delta \vec{r}_i) + (\vec{n}_i \cdot \delta \vec{\mathcal{A}}_i) \right)$$

Généralement, les modèles décrivant les organes mécaniques fournissent un effort scalaire en fonction d'une variation de distance ou d'angle. Montrons dans ces deux cas comment en déduire les forces généralisées vectorielles associées.

**Effort lié à une variation de distance** C'est le cas de l'effort produit par un moteur (vérin), un ressort ou un amortisseur linéaires liant le point  $P_i$  de  $C_i$  à  $P_j$  de  $C_j$ .

Notons :

$$\begin{aligned} \vec{d}_{ij} &= \overrightarrow{P_i P_j} \\ \vec{p}_i &= \overrightarrow{G_i P_i} \\ \vec{p}_j &= \overrightarrow{G_j P_j} \end{aligned}$$

Au déplacement relatif  $\vec{d}_{ij}$  de  $P_j$  par rapport à  $P_i$  est associé à une force d'intensité  $\phi(l, \dot{l})$ , colinéaire à  $\vec{d}_{ij}$ , appliquée à  $C_i$  et son opposée appliquée à  $C_j$ . Les paramètres  $l$  et  $\dot{l}$  sont obtenus par :

$$l = \sqrt{\vec{d}_{ij} \cdot \vec{d}_{ij}} \text{ et } \vec{u}_{ij} = \frac{1}{l} \vec{d}_{ij}$$

et en dérivant :

$$\dot{l} = \frac{1}{l} \vec{d}_{ij} \cdot \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} = \vec{u}_{ij} \cdot \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij}$$

Le travail virtuel de cette paire action-réaction s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta w &= \phi \vec{u}_{ij} \cdot \overrightarrow{\delta P_i} - \phi \vec{u}_{ij} \cdot \overrightarrow{\delta P_j} \\ &= \phi \vec{u}_{ij} \cdot (\delta \vec{r}_i - \vec{p}_i \times \delta \vec{\mathcal{A}}_i) - \phi \vec{u}_{ij} \cdot (\delta \vec{r}_j - \vec{p}_j \times \delta \vec{\mathcal{A}}_j) \\ &= \phi \vec{u}_{ij} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j - \vec{p}_i \times \delta \vec{\mathcal{A}}_i + \vec{p}_j \times \delta \vec{\mathcal{A}}_j) \\ &= \phi \vec{u}_{ij} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) + (\phi \vec{p}_i \times \vec{u}_{ij}) \cdot \delta \vec{\mathcal{A}}_i - (\phi \vec{p}_j \times \vec{u}_{ij}) \cdot \delta \vec{\mathcal{A}}_j \end{aligned}$$

Il en résulte les forces généralisées suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{f}_i &= \phi \vec{u}_{ij} \\ \vec{n}_i &= \phi \vec{p}_i \times \vec{u}_{ij} \\ \vec{f}_j &= -\phi \vec{u}_{ij} \\ \vec{n}_j &= -\phi \vec{p}_j \times \vec{u}_{ij} \end{aligned}$$

qui sont tout simplement la force elle-même et le moment en  $O_i$  et  $O_j$  de cette force.

**Effort lié à une variation angulaire** C'est le cas de l'effort produit par un moteur, un ressort ou un amortisseur rotatifs associés à un axe de rotation  $\vec{a}_i$  de  $C_i$  parallèle et de même sens que  $\vec{a}_j$  de  $C_j$ . A l'angle de rotation  $\theta$  de  $C_j$  par rapport à  $C_i$  autour de cet axe commun est associé à un couple  $c$  colinéaire à  $\vec{a}_i$  d'intensité  $c(\theta, \dot{\theta})$  appliquée à  $C_i$  et son opposée appliquée à  $C_j$ . Pour évaluer  $\theta$  on utilise les repères orthonormés  $\{\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i\}$  lié à  $C_i$  et  $\{\vec{a}_j, \vec{b}_j, \vec{c}_j\}$  lié à  $C_j$  parallèles entre eux quand  $\theta = 0$ . Les expressions de  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  sont donnés section 4.5.2.

Dans le déplacement virtuel  $\delta\theta$  le travail virtuel de la paire action-réaction s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta W &= -c\delta\theta \\ &= -c\vec{a}_i \cdot (\delta\vec{\mathcal{A}}_j - \delta\vec{\mathcal{A}}_i)\end{aligned}$$

Il en résulte les forces généralisées suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{f}_i &= \vec{0} \\ \vec{n}_i &= c\vec{a}_i \\ \vec{f}_j &= \vec{0} \\ \vec{n}_j &= -c\vec{a}_i\end{aligned}$$

où  $\vec{n}_i$  et  $\vec{n}_j$  sont tout simplement les projections sur  $\vec{a}_i$  du couple d'action-réaction.

### 4.3 Le modèle dynamique

Le mouvement des corps est contraint par les lois de la mécanique. Notons  $m_i$  la masse du corps  $C_i$ ,  $\mathcal{I}_i$  son tenseur d'inertie en  $G_i$  et

$$\vec{h}_i = \mathcal{I}_i(\vec{\Omega}_i)$$

son moment cinétique par rapport à  $G_i$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}_{/0} \vec{h}_i &= \frac{d}{dt}_{/i} \vec{h}_i + \vec{\Omega}_i \times \vec{h}_i \\ &= \mathcal{I}_i\left(\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i\right) + \vec{\Omega}_i \times \vec{h}_i\end{aligned}$$

Notons  $\vec{f}_i$  la résultante des forces données appliquées à  $C_i$  et  $\vec{n}_i$  le moment résultant en  $G_i$  des efforts donnés appliqués à  $C_i$ . La loi des travaux virtuels permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{f}_i - m_i \vec{\gamma}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^N (\vec{n}_i - \mathcal{I}_i\left(\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i\right) - \vec{\Omega}_i \times \vec{h}_i) \cdot \delta\vec{\mathcal{A}}_i = 0 \quad (4.1)$$

où les vecteurs  $\delta\vec{r}_i$  sont les vecteurs de déplacement virtuel des points  $G_i$  relativement au point O et où les vecteurs  $\delta\vec{\mathcal{A}}_i$  sont les vecteur de micro-rotation virtuels des  $B_i$  par rapport à la base  $B_0$ .

Rappelons que les efforts donnés incluent tous les efforts qui travaillent dans les mouvements contraints et en particulier :

- Les forces à distance (gravité, forces électriques, magnétiques, ...). Nous ne détaillerons par leur expression. C'est généralement une expression classique, fonction de la position et éventuellement de la vitesse des corps et d'une de ses caractéristiques physiques (masse, capacité, ...).
- Les forces de pression (poussée d'Archimède, forces aérodynamiques, ...). Nous ne détaillerons par leur expression qui est souvent complexe et du domaine des spécialistes de la discipline concernée (mécanique du vol ou autre).

- Les efforts internes qui travaillent par suite du déplacement relatif des deux corps (effort produit par un actionneur, un ressort, un amortisseur, ...). Nous avons détaillé en 4.2.3 comment évaluer ces efforts.

Il est inutile d'inclure les efforts inconnus qui maintiennent les liaisons non dissipatives car ceux-ci ne travaillent pas.

## 4.4 Mise en oeuvre du modèle

La mise en oeuvre du modèle du système nécessite de considérer les composantes des vecteurs. Parmi toutes les combinaisons possibles d'expression de ces composantes, celle qui est le plus couramment utilisée consiste à exprimer tout ce qui a trait aux translations dans la base  $B_0$  et tout ce qui a trait aux rotations dans les bases  $B_i$  concernées.

Notons :

- $\mathbf{f}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_0$  des  $N$  vecteurs  $\vec{f}_i$ ,
- $\mathbf{m}$  la matrice diagonale  $3N \times 3N$  réalisée avec les  $N$  masses  $m_i$ ,
- $\vec{\mathbf{r}}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_0$  des  $N$  vecteurs  $\vec{r}_i$ ,
- $\delta\mathbf{r}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_0$  des  $N$  vecteurs  $\delta\vec{r}_i$ ,
- $\mathbf{n}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_i$  des  $N$  vecteurs  $\vec{n}_i$ ,
- $\mathbf{I}$  la matrice bloc-diagonale  $3N \times 3N$  réalisée avec les  $N$  matrices composantes des  $\mathcal{I}_i$  dans  $B_i$ ,
- $\vec{\Omega}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_i$  des  $N$  vecteurs  $\vec{\Omega}_i$ ,
- $\mathbf{s}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_i$  des  $N$  vecteurs  $\vec{\Omega}_i \times \vec{h}_i$ ,
- $\delta\mathbf{A}$  le vecteur qui concatène les composantes dans  $B_i$  des  $N$  vecteurs  $\delta\vec{\mathcal{A}}_i$ .
- $\mathbf{q}$  le vecteur  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ .

### 4.4.1 Les liaisons non-holonômes

Les liaisons cinématiques introduisent  $p$  équations *indépendantes*<sup>2</sup> entre les  $6N$  composantes des paramètres de configuration  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{\mathcal{A}}_1, \vec{\mathcal{A}}_2, \dots, \vec{\mathcal{A}}_N$  qui sont globalement notées :

$$\mathbf{G}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{\mathcal{A}}_1, \vec{\mathcal{A}}_2, \dots, \vec{\mathcal{A}}_N) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Il en résulte que le système n'a que :

$$n = 6N - p$$

degrés de liberté effectifs.

La différentiation de l'ensemble de ces contraintes notées :

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{A}) = \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

impose la relation :

$$\delta\mathbf{G} = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}}\delta\mathbf{r} + \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{A}}\delta\mathbf{A} + \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t}\delta t = \mathbf{J}\delta\mathbf{q} - \mathbf{V}\delta t = \mathbf{0}$$

où on a posé :

$$\mathbf{J} = [ \mathbf{J}_r \quad \mathbf{J}_A ] \text{ avec } \mathbf{J}_r = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{r}}, \mathbf{J}_A = \frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{A}}$$

2. Les équations de liaisons redondantes sont à éliminer dans  $\mathbf{G}$ . Le nombre  $p$  de liaisons indépendantes est le rang de la jacobienne de  $\mathbf{G}$ .

Remarque : Les matrices  $\mathbf{J}_A$  et  $\mathbf{J}$  sont des pseudo-jacobiniennes de  $\mathbf{G}$ , car en fait  $\mathbf{A}$  n'est pas défini. Ceci n'a aucune importance car d'une part les coefficients de ces matrices sont obtenus directement à partir des relations cinématiques (entre les vitesses) et d'autre part les relations  $\mathbf{G}$  ne sont pas explicitement utilisées, seule l'expression de  $\mathbf{J}$  est nécessaire.

Le vecteur  $\mathbf{V}$  est non nul que s'il existe des contraintes avec des mouvements explicitement imposés en fonction du temps. Mais à temps constant ( $\delta t = 0$ , cas des travaux virtuels), la relation précédente se simplifie en :

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

ce qui signifie que le vecteur  $\delta\mathbf{q}$  des déplacements virtuels élémentaires est assujéti à être orthogonal à toutes les lignes de la matrice  $\mathbf{J}$ .

#### 4.4.2 Le système différentiel matriciel

La projection de la loi des travaux virtuels (4.1) s'écrit matriciellement :

$$(\mathbf{f} - m\ddot{\mathbf{r}})^T \delta\mathbf{r} + (\mathbf{n} - \mathbf{I}\dot{\Omega} - \mathbf{s})^T \delta\mathbf{A} = 0$$

Elle signifie que le vecteur  $\begin{pmatrix} \mathbf{f} - m\ddot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{n} - \mathbf{I}\dot{\Omega} - \mathbf{s} \end{pmatrix}$  est orthogonal au vecteur  $\delta\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{r} \\ \delta\mathbf{A} \end{pmatrix}$ . Or  $\delta\mathbf{q}$  est orthogonal aux  $p$  lignes de  $\mathbf{J}$ . Il en résulte que le vecteur  $\begin{pmatrix} \mathbf{f} - m\ddot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{n} - \mathbf{I}\dot{\Omega} - \mathbf{s} \end{pmatrix}$  doit être une combinaison de ces  $p$  lignes. Notons  $-\lambda$  le vecteur (*multiplicateurs de Lagrange*) des composantes de cette combinaison. Il vient :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} - m\ddot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{n} - \mathbf{I}\dot{\Omega} - \mathbf{s} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^T \lambda = -\begin{pmatrix} \mathbf{J}_r^T \\ \mathbf{J}_A^T \end{pmatrix} \lambda$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_r^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{J}_A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\Omega} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} - \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

système  $6N$  équations à  $6N + p$  inconnues  $\ddot{\mathbf{r}}$ ,  $\dot{\Omega}$  et  $\lambda$ .

La dérivation des contraintes s'écrit également :

$$\mathbf{J}_r \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}_A \dot{\Omega} = \mathbf{V}$$

Une nouvelle dérivation conduit à :

$$\mathbf{J}_r \ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{J}_A \dot{\Omega} = \Gamma \text{ avec } \Gamma = \dot{\mathbf{V}} - \dot{\mathbf{J}}_r \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{J}}_A \dot{\Omega}$$

D'où le système différentiel complet de  $6N + p$  équations à  $6N + p$  inconnues :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_r^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{J}_A^T \\ \mathbf{J}_r & \mathbf{J}_A & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\Omega} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} - \mathbf{s} \\ \Gamma \end{pmatrix}$$

#### 4.4.3 Résolution du système différentiel

Posons :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\Omega} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} - \mathbf{s} \end{pmatrix}$$

Le système différentiel complet se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \Gamma \end{pmatrix}$$

De la première équation, on tire :

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{J}^T \lambda) \quad (4.3)$$

qui reporté dans la deuxième donne :

$$\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{J}^T \lambda) = \Gamma \rightarrow (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T) \lambda = (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} - \Gamma)$$

D'où :

$$(\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T) \lambda = (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} - \Gamma)$$

Pour résoudre ce système symétrique on procède à une factorisation UDU de  $(\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T)$ . La résolution fournit  $\lambda$  qui reporté dans (4.3) fournit  $\dot{\mathbf{w}}$ .

L'intégration de  $\dot{\mathbf{w}}$  fournit  $\mathbf{w}$  qui doit respecter  $\mathbf{J} \mathbf{w} = \mathbf{v}$ .

#### 4.4.4 Corrections pour respect des contraintes

L'erreur :

$$\varepsilon_V = \mathbf{v} - \mathbf{J} \mathbf{w}$$

due à l'intégration peut être corrigée en ajoutant  $\Delta \mathbf{w}$  à  $\mathbf{w}$  tel que  $\mathbf{J} (\mathbf{w} + \Delta \mathbf{w}) = \mathbf{v}$ . Ce système étant sous-déterminé, on choisit la solution qui minimise  $\frac{1}{2} \Delta \mathbf{w}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{w}$ , soit :

$$\Delta \mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \varepsilon_V$$

Le calcul de  $\Delta \mathbf{w}$  se fait se fait en utilisant la factorisation UDU précédente.

L'intégration de  $\mathbf{w}$  (après conversion de  $\Omega$  en dérivée des paramètres d'attitude) fournit la configuration  $\mathbf{A}$  du système qui doit vérifier  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . L'erreur due à la dérive peut être corrigée au moyen d'une variation  $\Delta \mathbf{q}$  telle que  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{A}) + \mathbf{J} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0}$ . La même résolution que ci-dessus conduit à :

$$\Delta \mathbf{q} = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{A}) \quad (4.4)$$

#### 4.4.5 Cas particulier de l'intégration de l'attitude

Pour "intégrer" les  $\vec{\Omega}_i$  il est intéressant d'utiliser le quaternion d'attitude  $Q_i$  dont la dérivée est donnée par :

$$\dot{Q}_i = \frac{1}{2} Q_i * \Omega_i$$

où  $*$  représente la multiplication des quaternions et  $\Omega_i$  est le quaternion pur  $\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix}$  avec  $\omega_i$  vecteur des composantes de  $\vec{\Omega}_i$  dans  $\mathcal{B}_i$ . Si on note  $s_i$  et  $\mathbf{v}_i$  les parties scalaires et pures de  $Q_i$  la multiplication s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= -\frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T \omega_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \frac{1}{2} (s_i \mathbf{v}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \omega_i) \end{aligned}$$

L'intégration de  $\dot{Q}_i$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  peut être effectuée par la même méthode que pour les autres variables (méthode d'Euler, de Runge-Kutta, etc...). Toutefois, nous préconisons l'intégration multiplicative suivante :

On estime le vecteur de micro-rotation de  $\mathcal{B}_i$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$  par :

$$\Delta \mathcal{A}_i = \frac{1}{2} [\omega_i(t) + \omega_i(t + \Delta t)] \Delta t \quad (4.5)$$

que l'on peut améliorer par la correction d'Edward :

$$\Delta \mathcal{A}_i^{cor} = \Delta \alpha_i + \frac{1}{12} \Delta \mathcal{A}_i^- \times \Delta \mathcal{A}_i$$

où  $\Delta \mathcal{A}_i^-$  est la valeur calculée par (4.5) à la période d'intégration précédente. A partir de  $\Delta \mathcal{A}_i^{cor}$  (ou de  $\Delta \mathcal{A}_i$  si on ne fait pas la correction d'Edward) on construit le quaternion de rotation :

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\beta_i}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\beta_i}{2}\right) \mathbf{u}_i \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \beta_i = \|\Delta \mathcal{A}_i^{cor}\| \\ \mathbf{u}_i = \frac{1}{\beta_i} \Delta \mathcal{A}_i^{cor} \end{cases}$$

D'où :

$$Q_i(t + \Delta t) = Q_i(t) * \Pi_i$$

### Correction de l'attitude

Pour forcer le respect des contraintes géométriques, on utilisera pour corriger l'attitude  $\mathcal{A}_i$ , la même méthode (multiplicative) que pour son intégration avec la quantité  $\Delta \mathcal{A}_i$  qui figure dans le vecteur de correction  $\Delta \mathbf{q}$  calculé par (4.4).

## 4.5 Modélisation détaillée des contraintes cinématiques

Nous détaillons dans cette partie la modélisation des contraintes cinématiques entre deux corps. Plus précisément la manière d'obtenir les lignes de  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ , les jacobiniennes de ces lignes et leurs dérivées. Ce sont ces dernières qui interviennent dans le système différentiel matriciel présenté en section 4.4.2.

La présentation se limite à la forme vectorielle intrinsèque de ces équations. Pour obtenir la forme matricielle il faut les projeter en essayant de minimiser le nombre de changements de base nécessaires à leur expression. Nous proposerons une approche possible section suivante.

Nous présentons également l'interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$  associés à ces contraintes. Ce sont simplement les composantes de la force ou du moment qui maintiennent la liaison sur les directions de base utilisées pour exprimer ces contraintes.

Cette modélisation s'appuie sur 4 contraintes géométriques de base qui sont :

- La liaison rotule notée  $\vec{G}^{3r}(P_i, P_j)$  qui exprime que  $P_i \in C_i$  et  $P_j \in C_j$  sont assujettis à être coïncidents,
- La liaison distance notée  $G^{1r}(P_i, P_j, d)$  qui exprime que  $P_i \in C_i$  et  $P_j \in C_j$  sont assujettis à rester à la distance constante  $d \neq 0$ .
- La liaison orthogonalité de plans notée  $G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$  qui exprime que les plans  $\Pi_i$  (normal au vecteur unitaire  $\vec{u}_i$ ) de  $C_i$  et  $\Pi_j$  (normal au vecteur unitaire  $\vec{u}_j$ ) de  $C_j$  sont assujettis à être orthogonaux.
- La liaison appartenance à un plan notée  $G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij})$  qui exprime que le point  $P_j \in C_j$  est assujetti à appartenir au plan  $\Pi_i$  de  $C_i$  normal  $\vec{u}_i$  et passant par  $P_i$ .

Toutes les autres contraintes sont modélisées par l'association de plusieurs des 4 contraintes de base :

- Le parallélisme d'axe noté  $G_j^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$  ou  $G_i^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$  qui exprime que  $\vec{u}_i \in C_i$  doit être parallèle à  $\vec{u}_j \in C_j$ .
- L'appartenance à un axe notée  $G^{2n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij})$  qui exprime que  $P_j \in C_j$  appartient à l'axe de direction  $\vec{u}_i$  passant par  $P_i \in C_i$ .
- Le joint de Cardan (ou universel) noté  $G^{3t1r}(P_i, P_j, \vec{u}_i, \vec{u}_j)$  qui exprime que les points  $P_i$  et  $P_j$  coïncidents et que  $\vec{u}_i$  est l'axe fixe de la croix dans  $C_i$  et  $\vec{u}_j$  l'axe fixe de la croix dans  $C_j$ .
- La liaison pivot ou rotoïde notée  $G^{3r2r}(P_i, P_j, \vec{u}_i, \vec{u}_j)$  de direction  $\vec{u}_i$  passant  $P_i$  dans  $C_i$  et de direction  $\vec{u}_j$  passant  $P_j$  dans  $C_j$ .
- La liaison pivot glissant ou cylindrique notée  $G^{2n2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{d}_{ij})$  qui exprime que les directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  sont assujetties à être parallèles entre elles et de même sens et parallèles au vecteur  $\overrightarrow{P_i P_j}$ .
- La liaison glissière ou prismatique notée  $G^{2n3r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{d}_{ij})$  qui ajoute à la précédente l'interdiction de rotation autour de l'axe.
- La liaison glissière hélicoïdale ou vis (screw joint) notée  $G^{2n3r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{d}_{ij}, k)$  qui est une liaison pivot glissant avec une rotation autour de l'axe proportionnelle à la translation le long de l'axe.

Remarque : La signification des exposants est la suivante :

- $1t, 2t, 3t$  : suppression d'un, 2 ou 3 ddl en translation,
- $1n, 2n$  : suppression d'un ou 2 ddl en translation (définis par une ou deux directions orthogonales aux ddl supprimés)
- $1r, 2r, 3r$  : suppression d'un, 2 ou 3 ddl en rotation autour d'un ou des vecteurs en argument.

#### 4.5.1 Contraintes géométriques de base

Quatre contraintes géométriques de base permettent d'exprimer toutes les liaisons mécaniques entre deux corps.

##### Points coïncidents

Les points  $P_i \in C_i$  et  $P_j \in C_j$  sont assujettis à être coïncidents. Cette contrainte symétrique sera notée  $G^{3t}$  car elle supprime 3 ddl relatifs en translation :

$$\overrightarrow{G^{3t}}(P_i, P_j) = \overrightarrow{P_i P_j} = \vec{d}_{ij} = \vec{0}$$

**Dérivation** : Exprimons la dérivée de cette contrainte qui s'écrit :

$$\vec{d}_{ij} = \overrightarrow{OG_j} + \overrightarrow{G_j P_j} - (\overrightarrow{OG_i} + \overrightarrow{G_i P_i})$$

D'où sa dérivée première :

$$\frac{d}{dt}_{/0} \vec{d}_{ij} = \vec{v}_j - \vec{v}_i - \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i + \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j$$

soit :

$$-\vec{v}_i + \vec{v}_j + \vec{p}_i \times \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \vec{\Omega}_j = \vec{0} \quad (4.6)$$

Dérivée seconde :

$$\frac{d^2}{dt^2}_{/0} \vec{d}_{ij} = -\vec{\gamma}_i + \vec{\gamma}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i - \vec{\Omega}_i \times (\vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i) + \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j + \vec{\Omega}_j \times (\vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j) = \vec{0}$$

soit mettant les termes quadratiques en vitesse dans le deuxième membre :

$$-\vec{\gamma}_i + \vec{\gamma}_j + \vec{p}_i \times \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j = \vec{\Omega}_i^2 \circ \vec{p}_i - \vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j \quad (4.7)$$

**Remarque :** Les facteurs des accélérations du premier membre sont identiques aux facteurs des vitesses de (4.6).

#### Multiplicateurs de Lagrange associés :

La puissance virtuelle, dans le mouvement réel qui respecte la liaison, de la paire de forces  $\vec{f}$  et  $-\vec{f}$  d'action et réaction qui impose cette liaison, est nulle. Si  $\vec{f}$  est la force appliqué en  $P_i = P_j$  par  $C_i$  à  $C_j$ , cette puissance s'écrit :

$$0 = \vec{f} \cdot (\vec{v}_j + \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j) - \vec{f} \cdot (\vec{v}_i + \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i)$$

Dans la mise en équation du mouvement par les puissances virtuelles, on remplace ces forces internes qui ne travaillent par les contraintes sur les vitesses, multipliées par un vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\vec{\lambda}$ , à savoir :

$$0 = \vec{\lambda} \cdot (-\vec{v}_i + \vec{v}_j + \vec{p}_i \times \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \vec{\Omega}_j)$$

On constate immédiatement, dans ce cas, que le vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\vec{\lambda}$  est tout simplement la force  $\vec{f}$  appliqué en  $P_i = P_j$  par  $C_i$  à  $C_j$ .

#### Liaison distance

$P_i \in C_i$  et  $P_j \in C_j$  sont assujettis à rester à la distance constante  $l \neq 0$ . Cette contrainte symétrique sera notée  $G^{lt}$  car elle supprime un ddl relatif en translation :

$$G^{lt}(P_i, P_j, d) = \frac{1}{2} (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} - d^2) = \vec{0}$$

**Dérivation :** Exprimons la dérivée de cette contrainte qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G^{lt} = 0 &= \vec{d}_{ij} \cdot \frac{d}{dt}_{/0} \vec{d}_{ij} \\ &= \vec{d}_{ij} \cdot (-\vec{v}_i + \vec{v}_j + \vec{p}_i \times \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \vec{\Omega}_j) \end{aligned}$$

soit :

$$-\vec{d}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{v}_j + (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_i) \cdot \vec{\Omega}_i - (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\Omega}_j = 0 \quad (4.8)$$

Dérivée seconde :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} G^{lt} &= -\vec{d}_{ij} \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{\gamma}_j + (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_i) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_j) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j + \\ &\frac{d}{dt}_{/0} \vec{d}_{ij} \cdot \left( \frac{d}{dt}_{/0} \vec{d}_{ij} \right) + (\vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j - \vec{\Omega}_i^2 \circ \vec{p}_i) \cdot \vec{d}_{ij} \end{aligned}$$

soit mettant les termes quadratiques en vitesse dans le deuxième membre :

$$-\vec{d}_{ij} \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{\gamma}_j + \left( \vec{d}_{ij} \times \vec{p}_i \right) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - \left( \vec{d}_{ij} \times \vec{p}_j \right) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j = - \left\| \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} \right\|^2 + \left( \vec{\Omega}_i^2 \circ \vec{p}_i - \vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j \right) \cdot \vec{d}_{ij}$$

Remarque : Les facteurs des accélérations du premier membre sont identiques aux facteurs des vitesses de (4.8).

#### Multiplicateur de Lagrange associé :

Notons  $f \vec{u}_{ij}$  la projection sur  $\vec{d}_{ij}$  de la force transmise par le segment  $P_i P_j$ , avec :

$$\vec{u}_{ij} = \frac{1}{d} \vec{d}_{ij}$$

La puissance virtuelle, dans le mouvement réel qui respecte la liaison, de la paire de forces  $f \vec{u}_{ij}$  et  $-f \vec{u}_{ij}$  d'action et réaction qui impose la liaison, est nulle. Si  $f \vec{u}_{ij}$  est la force appliqué en  $P_j$  par  $C_i$  à  $C_j$ , et  $-f \vec{u}_{ij}$  la force appliqué en  $P_i$  par  $C_j$  à  $C_i$ , cette puissance s'écrit comme précédemment :

$$0 = f \vec{u}_{ij} \cdot \left( \vec{v}_j + \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j \right) - f \vec{u}_{ij} \cdot \left( \vec{v}_i + \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i \right)$$

Dans la mise en équation du mouvement par les puissances virtuelles, cette composante ne travaille pas. Elle est remplacée par la contrainte sur les vitesses multiplié par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , à savoir :

$$0 = \lambda \vec{d}_{ij} \cdot \left( -\vec{v}_i + \vec{v}_j + \vec{p}_i \times \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \vec{\Omega}_j \right)$$

ce qui montre que, dans ce cas,  $f$  et  $\lambda$  sont reliés par la relation :

$$f = \lambda d$$

#### Orthogonalité de plans

Les plans  $\Pi_i$  (normal au vecteur unitaire  $\vec{u}_i$ ) de  $C_i$  et  $\Pi_j$  (normal au vecteur unitaire  $\vec{u}_j$ ) de  $C_j$  sont assujettis à être orthogonaux. Cette contrainte symétrique sera notée  $G^{1r}$  car elle supprime un ddl relatif en rotation :

$$G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad (4.9)$$

**Dérivation :** Exprimons la dérivée de cette contrainte. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G^{1r} &= \vec{u}_j \cdot \left( \vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i \right) + \vec{u}_i \cdot \left( \vec{\Omega}_j \times \vec{u}_j \right) \\ &= \vec{\Omega}_i \cdot \left( \vec{u}_i \times \vec{u}_j \right) + \vec{\Omega}_j \cdot \left( \vec{u}_j \times \vec{u}_i \right) \\ 0 &= \left( \vec{u}_j \times \vec{u}_i \right) \cdot \left( \vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Cette relation implique que la vitesse relative de rotation de  $C_j$  par rapport à  $C_i$  est orthogonale à la direction de la charnière  $\vec{u}_j \times \vec{u}_i$ .

Remarque : La relation  $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$  implique  $\|\vec{u}_j \times \vec{u}_i\| = 1$ .

Dérivée seconde : Elle s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2} G^{1r} = \left( \vec{u}_j \times \vec{u}_i \right) \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) + \left( \vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i \right) \cdot \frac{d}{dt} \left( \vec{u}_j \times \vec{u}_i \right) = 0$$

soit mettant les termes quadratiques en vitesse dans le deuxième membre :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_j \times \vec{u}_i) \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) &= (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \cdot \frac{d}{dt} (\vec{u}_i \times \vec{u}_j) \\ &= (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \cdot \left( (\vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i) \times \vec{u}_j + \vec{u}_i \times (\vec{\Omega}_j \times \vec{u}_j) \right) \end{aligned}$$

soit compte tenu de (4.10) :

$$(\vec{u}_j \times \vec{u}_i) \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) = (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \cdot \left( \vec{u}_i \times (\vec{u}_j \times \vec{\Omega}_i) - \vec{u}_j \times (\vec{u}_i \times \vec{\Omega}_j) \right)$$

et compte tenu de (4.9) :

$$(\vec{u}_j \times \vec{u}_i) \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) = (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \cdot \left( \vec{u}_j \cdot (\vec{u}_i \cdot \vec{\Omega}_i) - \vec{u}_i \cdot (\vec{u}_j \cdot \vec{\Omega}_j) \right)$$

Remarque : Les facteurs des accélérations du premier membre sont identiques aux facteurs des vitesses de (4.10).

#### Multiplicateur de Lagrange associé :

Notons  $\vec{v}_{ij} = \vec{u}_j \times \vec{u}_i$  le vecteur unitaire sur la direction charnière et  $c\vec{v}_{ij}$  la projection sur  $\vec{v}_{ij}$  du couple d'action appliqué par le corps  $C_i$  au corps  $C_j$ . La puissance virtuelle, dans le mouvement réel qui respecte la liaison, de la paire de couples  $c\vec{v}_{ij}$  et  $-c\vec{v}_{ij}$  d'action et réaction qui impose la liaison, est nulle. Cette puissance s'écrit :

$$0 = c\vec{v}_{ij} \cdot \vec{\Omega}_j - c\vec{v}_{ij} \cdot \vec{\Omega}_i$$

Dans la mise en équation du mouvement par les puissances virtuelles, cette composante ne travaille pas. Elle est remplacée par la contrainte sur les vitesses multiplié par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , à savoir :

$$0 = \lambda (\vec{u}_j \times \vec{u}_i) \cdot (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i)$$

ce qui montre que, dans ce cas,  $\lambda$  est la composante du couple d'action-réaction sur  $\vec{v}_{ij}$  :

$$c = \lambda$$

#### Appartenance à un plan

Le point  $P_j \in C_j$  est assujetti à appartenir au plan  $\Pi_i$  de  $C_i$  normal  $\vec{u}_i$  et passant par  $P_i$ . Cette contrainte qui supprime 1 ddl relatif en translation sera notée  $G^{ln}$  :

$$G^{ln} (\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) = \vec{u}_i \cdot \vec{d}_{ij} = 0$$

**Dérivation** : Exprimons la dérivée de cette contrainte qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G^{ln} (\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) &= (\vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i) \cdot \vec{d}_{ij} + \vec{u}_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} = 0 \\ &= (\vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i) \cdot \vec{d}_{ij} + \vec{u}_i \cdot (\vec{v}_j + \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j - \vec{v}_i - \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i) \\ &= \vec{u}_i \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) + (\vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij})) \cdot \vec{\Omega}_i + (\vec{p}_j \times \vec{u}_i) \cdot \vec{\Omega}_j \end{aligned} \quad (4.11)$$

soit :

$$\frac{d}{dt} G^{ln} = \vec{u}_i \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) + (\vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij})) \cdot \vec{\Omega}_i - (\vec{u}_i \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\Omega}_j = 0 \quad (4.12)$$

Dérivée seconde : Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} G^{1n} = 0 = & \vec{u}_i \cdot (\vec{\gamma}_j - \vec{\gamma}_i) + \left( \vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij}) \right) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - (\vec{u}_i \times \vec{p}_j) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j + \\ & \left( \vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i \right) \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) + \left( \left( \vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i \right) \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij}) + \vec{u}_i \times \left( \left( \vec{\Omega}_i \times \vec{p}_i \right) + \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} \right) \right) \cdot \vec{\Omega}_i + \\ & + \left( \left( \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j \right) \times \vec{u}_i + \vec{p}_j \times \left( \vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i \right) \right) \cdot \vec{\Omega}_j \end{aligned}$$

soit mettant les termes quadratiques en vitesse dans le deuxième membre :

$$\begin{aligned} & \vec{u}_i \cdot (\vec{\gamma}_j - \vec{\gamma}_i) + \left( \vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij}) \right) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - (\vec{u}_i \times \vec{p}_j) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j \\ = & \left( \vec{u}_i \times \vec{\Omega}_i \right) \cdot \left( \vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij}) \right) + 2 \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} - \vec{u}_i \cdot (\vec{\Omega}_j \circ \vec{p}_j) \end{aligned}$$

Remarque : Les facteurs des accélérations du premier membre sont identiques aux facteurs des vitesses de (4.12).

#### Multiplicateur de Lagrange associé :

Notons  $f \vec{u}_i$  la projection sur  $\vec{u}_i$  de la force d'action appliqué par le corps  $C_i$  au corps  $C_j$  au point  $P_j$ . La puissance virtuelle, dans le mouvement réel qui respecte la liaison, de la paire de composantes de forces  $f \vec{u}_i$  et  $-f \vec{u}_i$  d'action et réaction qui impose la liaison, est nulle. Cette puissance s'écrit :

$$0 = f \vec{u}_i \cdot \left( \vec{v}_j + \vec{\Omega}_j \times \vec{p}_j \right) - f \vec{u}_i \cdot \left( \vec{v}_i + \vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij}) \right)$$

Dans la mise en équation du mouvement par les puissances virtuelles, cette composante ne travaille pas. Elle est remplacée par la contrainte sur les vitesses multiplié par un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ , à savoir :

$$0 = \lambda \left( \vec{u}_i \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) + \left( \vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij}) \right) \cdot \vec{\Omega}_i - (\vec{u}_i \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\Omega}_j \right)$$

ce qui montre que, dans ce cas,  $\lambda$  est la composante de la force d'action-réaction sur  $\vec{u}_i$  :

$$f = \lambda$$

## 4.5.2 Mécanismes réels et autres contraintes géométriques

Parmi les contraintes géométriques de base précédentes, on a les correspondances suivantes entre ces contraintes et les liaisons mécaniques classiques :

- **liaison rotule**  $\Leftrightarrow$  contrainte  $G^{3t}(P_i, P_j) = \vec{d}_{ij} = \vec{0}$
- **liaison par un lien rotulé**  $\Leftrightarrow$  contrainte  $G^{1t}(P_i, P_j, d) = \frac{1}{2} (\vec{d}_{ij} \cdot \vec{d}_{ij} - d^2) = 0$
- **liaison ponctuelle**  $\Leftrightarrow$  contrainte  $G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) = \vec{u}_i \cdot \vec{d}_{ij} = 0$

Examinons les autres contraintes mécaniques que l'on peut réaliser en réunissant des contraintes géométriques de base.

### Parallélisme d'axes

On le spécifie par le vecteur  $\vec{u}_i \in C_i$  qui doit être parallèle au vecteur  $\vec{u}_j \in C_j$ . Cette contrainte qui supprime 2 ddl est rotation est notée  $G^{2r}$ . On ne peut pas utiliser l'expression  $\vec{u}_i \times \vec{u}_j = \vec{0}$ , car elle conduit à 3 équations. On est conduit à introduire une base orthonormé qui complète  $\vec{u}_i$  ou  $\vec{u}_j$ . Considérons par

exemple la base orthonormée directe  $\{\vec{u}_j, \vec{b}_j, \vec{c}_j\}$ .  $\vec{u}_j$  sera parallèle à  $\vec{u}_i$  si les deux contraintes suivantes sont :

$$G_j^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{pmatrix} G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{c}_j) \\ G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{b}_j) \end{pmatrix} = 0$$

En supposant que  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  soient de même sens, les deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associés à ces contraintes représentent les composantes du couple d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  respectivement sur les axes  $\vec{c}_j \times \vec{u}_j = \vec{b}_j$  et  $\vec{u}_j \times \vec{b}_j = \vec{c}_j$ .

On aurait également pu considérer la base orthonormée directe  $\{\vec{u}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i\}$  et écrire :

$$G_i^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{pmatrix} G^{1r}(\vec{u}_j, \vec{c}_i) \\ G^{1r}(\vec{u}_j, \vec{b}_i) \end{pmatrix} = 0$$

Dans ce cas, en supposant que  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  sont de même sens, les deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associés à ces contraintes représentent les composantes du couple d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  respectivement sur les axes  $\vec{c}_i \times \vec{u}_i = \vec{b}_i$  et  $\vec{u}_i \times \vec{b}_i = \vec{c}_i$ .

**Remarque :** Les contraintes n'imposent que le parallélisme de  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$ . Le sens relatif reste ce qu'il est au moment du choix des axes. Il y a intérêt à les choisir de même sens pour faciliter l'interprétation des multiplicateurs.

### Liaison appui plan

On la spécifie par l'appartenance de  $P_j \in C_j$  au plan orthogonal à  $\vec{u}_i$  passant par  $P_i \in C_i$  et par le parallélisme de  $\vec{u}_i$  avec  $\vec{u}_j \in C_j$ .

$$G^{1n2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{pmatrix} G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) \\ G^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \end{pmatrix} = 0$$

### Liaison linéaire rectiligne

On la spécifie par le point  $P_j \in C_j$  qui doit appartenir à l'axe de direction  $\vec{u}_i$  passant par  $P_i \in C_i$ . Cette contrainte qui supprime les 2 ddl de déplacement selon les normales à l'axe  $\vec{u}_i$  est notée  $G^{2n}$ . Elle s'écrit en utilisant  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$  tels que  $\{\vec{u}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i\}$  soit une base orthonormée directe :

$$G^{2n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) = \begin{pmatrix} G^{1n}(\vec{b}_i, \vec{d}_{ij}) \\ G^{1n}(\vec{c}_i, \vec{d}_{ij}) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Les deux multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associés à ces contraintes représentent les composantes de la force d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  respectivement sur les axes  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ .

### Joint de Cardan (universal joint)

Considérons un joint de Cardan entre deux corps  $C_i$  et  $C_j$  dont la croix à pour centre les points coïncidents  $P_i$  et  $P_j$ . Notons  $\vec{u}_i$  l'axe fixe de la croix dans  $C_i$  et  $\vec{u}_j$  l'axe fixe de la croix dans  $C_j$ . Ces deux axes sont toujours perpendiculaires. Il en résulte que le joint universel est spécifié par les 4 équations :

$$G^{3t1r}(P_i, P_j, \vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{pmatrix} G^{3t}(P_i, P_j) \\ G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Les 3 premiers multiplicateurs de Lagrange correspondent aux composantes de la force d'action-réaction exercée par  $C_i$  sur  $C_j$  (en composantes dans la base où sont exprimées les relations  $G^{3t}$ ) et le quatrième multiplicateur est la projection sur  $\vec{u}_j \times \vec{u}_i$  du couple transmis par le joint au corps  $C_j$ .

### Liaison pivot ou rotoïde (revolute joint)

Considérons une liaison pivot entre deux corps  $C_i$  et  $C_j$  dont l'axe est défini par les points coïncidents  $P_i$  et  $P_j$  et les directions  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  qui sont également coïncidentes (parallèles et de même sens). Il en résulte que la liaison pivot est spécifiée par les 5 équations :

$$G^{3t2r}(P_i, P_j, \vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{pmatrix} G^{3t}(P_i, P_j) \\ G_i^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \text{ ou } G_j^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Les 3 premiers multiplicateurs de Lagrange correspondent aux composantes de la force d'action-réaction exercée par  $C_i$  sur  $C_j$  (en composantes dans la base où sont exprimées les relations  $G^{3t}$ ) et les deux derniers multiplicateurs sont les projections sur  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$  ou sur  $\vec{b}_j$  et  $\vec{c}_j$  du couple transmis par la liaison au corps  $C_j$ .

Cette liaison ne laisse subsister qu'un seul ddl entre  $C_i$  et  $C_j$ . Ce ddl peut être mesuré par l'angle  $\theta$  de la rotation relative de  $C_j$  par rapport à  $C_i$  autour de  $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ . Pour évaluer  $\theta$  on utilise les deux bases orthonormées  $\{\vec{u}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i\}$  liée à  $C_i$  et  $\{\vec{u}_j, \vec{b}_j, \vec{c}_j\}$  liée à  $C_j$ , parallèles entre elles pour  $\theta = 0$ . Il en résulte que :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \vec{c}_i \cdot \vec{c}_j \\ \sin \theta &= \vec{c}_i \cdot \vec{b}_j = -\vec{b}_i \cdot \vec{c}_j \end{aligned}$$

D'où :

$$\theta = \text{atan2}(\vec{c}_i \cdot \vec{b}_j, \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j) = \text{atan2}(\vec{c}_i \cdot \vec{b}_j, \vec{c}_i \cdot \vec{c}_j)$$

Par ailleurs :

$$\dot{\theta} = \vec{u}_i \cdot (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i)$$

et :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \vec{u}_i \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) + (\vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i) \cdot (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \\ &= \vec{u}_i \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) + (\vec{\Omega}_i \times \vec{u}_i) \cdot \vec{\Omega}_j \end{aligned}$$

### Liaison pivot glissant ou cylindrique (cylindrical joint)

Considérons une liaison pivot glissant entre deux corps  $C_i$  et  $C_j$  dont l'axe est défini par les directions coïncidentes  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_j$  assujetties à être parallèles et entre elles et de même sens, et parallèles au vecteur  $\overrightarrow{P_i P_j}$ . Il en résulte que la liaison cylindrique est spécifiée par les 4 équations :

$$G^{2n2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{d}_{ij}) = \begin{pmatrix} G^{2n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) \\ G_i^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Les deux premiers multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associés à ces contraintes représentent les composantes de la force d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  en  $P_j$  respectivement sur les axes  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$  liés à  $C_i$  et orthogonaux à  $\vec{u}_i$ . Les deux suivants  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ , représentent les composantes du couple d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  respectivement sur les axes  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ .

### Liaison glissière ou prismatique (translational joint)

Pour obtenir une liaison glissière à partir de la liaison cylindrique précédente, il suffit d'interdire la rotation autour de l'axe  $\vec{u}_i = \vec{u}_j$ . Pour cela, on impose que la direction de  $\vec{b}_i$  et la direction  $\vec{c}_j$  soient orthogonales. Il en résulte que la liaison glissière est spécifiée par les 5 équations :

$$G^{2n3r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{d}_{ij}) = \begin{pmatrix} G^{2n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) \\ G^{1r}(\vec{c}_i, \vec{b}_j) \\ G_i^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Les deux premiers multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  associés à ces contraintes représentent les composantes de la force d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  en  $P_j$  respectivement sur les axes  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$  liés à  $C_i$  et orthogonaux à  $\vec{u}_i$ . Les trois suivants  $\lambda_3$  à  $\lambda_5$ , représentent les composantes du couple d'action-réaction exercé par  $C_i$  sur  $C_j$  respectivement sur les axes  $\vec{u}_i$ ,  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ .

Cette liaison ne laisse subsister qu'un seul ddl entre  $C_i$  et  $C_j$ . Ce ddl peut être mesuré par :

$$q = \vec{u}_i \cdot \vec{d}_{ij} = G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij})$$

d'où :

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{d}{dt} G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) \\ \ddot{q} &= \frac{d^2}{dt^2} G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) \end{aligned}$$

### Liaison glissière hélicoïdale ou vis (screw joint)

Pour obtenir une liaison glissière hélicoïdale à partir de la liaison cylindrique, il suffit d'indiquer que la translation  $\vec{d}_{ij}$  projetée sur  $\vec{u}_i$  est proportionnelle (facteur  $k$ ) à l'angle de rotation  $\theta$  de deux vecteurs  $\vec{b}_i$  et  $\vec{b}_j$  qui coïncident quand la projection de  $\vec{d}_{ij}$  sur  $\vec{u}_i$  est nulle. Il en résulte que la liaison glissière est spécifiée par les 5 équations :

$$G^{2n3r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j, \vec{d}_{ij}) = \begin{pmatrix} G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) + k(\theta + 2n\pi) \\ G^{2n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij}) \\ G_i^{2r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Les quatre derniers multiplicateurs sont ceux de la liaison cylindrique (composantes de la force et du couple sur  $\vec{b}_i$  et  $\vec{c}_i$ ). Le premier multiplicateur  $\lambda_1$  est égal à la projection de la force et du couple sur  $\vec{u}_i$ , ce qui impose à ces deux projections d'être dans le rapport  $1/k$  (elles sont respectivement égales à  $\lambda_1$  et  $k\lambda_1$ ). Remarque : Le signe de  $k$  dépend du pas (positif à gauche et négatif à droite).

#### 4.5.3 Projection des contraintes

Nous avons convenu d'exprimer les composantes des vecteurs  $\vec{v}_i$ ,  $\vec{v}_j$ ,  $\vec{\gamma}_i$  et  $\vec{\gamma}_j$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ , celles des vecteurs  $\vec{p}_i$ ,  $\vec{\Omega}_i$  et  $\frac{d}{dt}\vec{\Omega}_i$  dans  $\mathcal{B}_i$ .

Dans ce qui suit, on note :

- $\mathbf{r}_i$  le vecteur colonne des composantes de  $\vec{r}_i = \overrightarrow{OG_i}$  dans  $\mathcal{B}_0$ ,
- $\mathbf{S}_i$  la matrice de changement de base entre les bases  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}_i$  (c'est-à-dire  $\mathbf{C}_{0i}$ ).
- $\mathbf{v}_i$  le vecteur colonne des composantes de  $\frac{d}{dt}\vec{r}_i$  dans  $\mathcal{B}_0$ ,

- $\omega_i$  le vecteur colonne des composantes de  $\vec{\Omega}_i$  dans  $\mathcal{B}_i$  (car on réserve la notation  $\Omega_i$  au quaternion pur associé à  $\omega_i$ ),
- $\mathbf{p}_i$  le vecteur colonne (constant) des composantes de  $\vec{p}_i = \overrightarrow{G_i P_i}$  dans  $\mathcal{B}_i$  et  $\tilde{\mathbf{p}}_i$  la matrice antisymétrique associée,
- $\mathbf{u}_i$  le vecteur colonne (constant) des composantes de  $\vec{u}_i$  (direction particulière de  $C_i$ ) dans  $\mathcal{B}_i$  et  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  la matrice antisymétrique associée,
- $\mathbf{d}_{ij}$  le vecteur colonne des composantes de  $\vec{d}_{ij} = \overrightarrow{P_i P_j}$  dans  $\mathcal{B}_0$  :

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{S}_j \mathbf{p}_j - \mathbf{S}_i \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$$

- $\mathbf{C}_{ij}$  la matrice de changement de base entre les bases  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathcal{B}_j$  :

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{S}_i^T \mathbf{S}_j$$

Examinons par exemple quelques contraintes :

### Liaison rotule

Les dérivées première et seconde (section 4.5.1) de la liaison rotule  $\overrightarrow{G^{3t}}(P_i, P_j) = \vec{0}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\vec{v}_i + \vec{v}_j + \vec{p}_i \times \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \vec{\Omega}_j &= \vec{0} \\ -\vec{\gamma}_i + \vec{\gamma}_j + \vec{p}_i \times \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - \vec{p}_j \times \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j &= \vec{\Omega}_i^2 \circ \vec{p}_i - \vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j \end{aligned}$$

Pour être cohérentes, les expressions précédentes seront globalement exprimées en projection dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

Il en résulte que les 3 lignes correspondantes de la matrice  $\mathbf{J}$  sont partout nulles, sauf : matrice  $-\mathbf{1}_{3 \times 3}$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{r}_i$ , matrice  $\mathbf{1}_{3 \times 3}$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{r}_j$ , matrice  $\mathbf{S}_i \tilde{\mathbf{p}}_i$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{\mathcal{A}}_i$  et matrice  $-\mathbf{S}_j \tilde{\mathbf{p}}_j$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{\mathcal{A}}_j$ . Le tableau suivant résume ces résultats :

colonnes relatives à	$\delta \vec{r}_i$	$\delta \vec{r}_j$	$\delta \vec{\mathcal{A}}_i$	$\delta \vec{\mathcal{A}}_j$	autres
éléments de $\mathbf{J}$	$-\mathbf{1}_{3 \times 3}$	$\mathbf{1}_{3 \times 3}$	$\mathbf{S}_i \tilde{\mathbf{p}}_i$	$-\mathbf{S}_j \tilde{\mathbf{p}}_j$	$\mathbf{0}_{3 \times 3}$

Les 3 lignes correspondantes du vecteur  $\Gamma$  sont constituées par les composantes dans la base  $\mathcal{B}_0$  du vecteur  $\vec{\Omega}_i^2 \circ \vec{p}_i - \vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j$ , soit :

$$3 \text{ lignes de } \Gamma \text{ relatives à } \overrightarrow{G^{3t}}(P_i, P_j) \quad : \quad (\mathbf{S}_i (\omega_i \times (\omega_i \times \mathbf{p}_i)) - \mathbf{S}_j (\omega_j \times (\omega_j \times \mathbf{p}_j)))^T$$

### Liaison distance

Les dérivées première et seconde (section 4.5.1) de la liaison distance  $G^{1t}(P_i, P_j, d) = \vec{0}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} -\vec{d}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{v}_j + (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_i) \cdot \vec{\Omega}_i - (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\Omega}_j &= 0 \\ -\vec{d}_{ij} \cdot \vec{\gamma}_i + \vec{d}_{ij} \cdot \vec{\gamma}_j + (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_i) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i - (\vec{d}_{ij} \times \vec{p}_j) \cdot \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j &= - \left\| \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} \right\|^2 + (\vec{\Omega}_i^2 \circ \vec{p}_i - \vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j) \cdot \vec{d}_{ij} \end{aligned}$$

La cohérence des bases de projection utilisées implique que pour la ligne correspondante de la matrice  $\mathbf{J}$  les seuls éléments non nuls sont :  $-\mathbf{d}_{ij}^T$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{r}_i$ , vecteur ligne  $\mathbf{d}_{ij}^T$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{r}_j$ , vecteur ligne  $-(\vec{p}_i \times \vec{d}_{ij})_i^T$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{\mathcal{A}}_i$  et vecteur ligne  $(\vec{p}_j \times \vec{d}_{ij})_j^T$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{\mathcal{A}}_j$ . Le tableau suivant résume ces résultats :

colonnes relatives à	$\delta \vec{r}_i$	$\delta \vec{r}_j$	$\delta \vec{\mathcal{A}}_i$	$\delta \vec{\mathcal{A}}_j$	autres
éléments de <b>J</b>	$-\mathbf{d}_{ij}^T$	$\mathbf{d}_{ij}^T$	$-(\mathbf{p}_i \times (\mathbf{S}_i^T \mathbf{d}_{ij}))^T = \mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{S}_i \tilde{\mathbf{p}}_i$	$(\mathbf{p}_j \times (\mathbf{S}_j^T \mathbf{d}_{ij}))^T = -\mathbf{d}_{ij}^T \mathbf{S}_j \tilde{\mathbf{p}}_j$	$\mathbf{0}_{1 \times 3}$

**Remarque :** Nous donnons dans ce tableau (et dans les suivants) des expressions apparemment plus lourdes utilisant le produit vectoriel en plus des expressions plus synthétiques utilisant la matrice antisymétrique car ces premières sont en fait plus rapides à calculer.

La ligne correspondante du vecteur  $\Gamma$  est constituée par le scalaire  $-\left\| \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij} \right\|^2 + (\tilde{\Omega}_i^2 \circ \tilde{\mathbf{p}}_i - \tilde{\Omega}_j^2 \circ \tilde{\mathbf{p}}_j) \cdot \vec{d}_{ij}$ , soit en exprimant tout dans  $\mathcal{B}_0$  :

$$\text{ligne de } \Gamma \text{ relatives à } G^{1r}(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j, d) \quad : \quad \mathbf{d}_{ij}^T (-\mathbf{d}_{ij} + \mathbf{S}_i (\boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i)) - \mathbf{S}_j (\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{p}_j)))$$

### Liaison orthogonalité

Les dérivées première et seconde (section 4.5.1) de la liaison orthogonalité de plans  $G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\vec{u}_j \times \vec{u}_i) \cdot (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) &= 0 \\ (\vec{u}_j \times \vec{u}_i) \cdot \left( \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_j - \frac{d}{dt} \vec{\Omega}_i \right) &= (\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \cdot \left( \vec{u}_j \cdot (\vec{u}_i \cdot \vec{\Omega}_i) - \vec{u}_i \cdot (\vec{u}_j \cdot \vec{\Omega}_j) \right) \end{aligned}$$

La cohérence des bases de projection utilisées implique que pour la ligne correspondante de la matrice **J** les seuls éléments non nuls sont : vecteur ligne  $(\vec{u}_i \times \vec{u}_j)_i^T$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{\mathcal{A}}_i$  et vecteur ligne  $(\vec{u}_j \times \vec{u}_i)_j^T$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{\mathcal{A}}_j$ . Le tableau suivant résume ces résultats :

colonnes relatives à	$\delta \vec{\mathcal{A}}_i$	$\delta \vec{\mathcal{A}}_j$	autres
éléments de <b>J</b>	$(\mathbf{u}_i \times (\mathbf{C}_{ij} \mathbf{u}_j))^T = -\mathbf{u}_j^T \mathbf{C}_{ij}^T \tilde{\mathbf{u}}_i$	$(\mathbf{u}_j \times (\mathbf{C}_{ji} \mathbf{u}_i))^T = -\mathbf{u}_i^T \mathbf{C}_{ji}^T \tilde{\mathbf{u}}_j$	$\mathbf{0}_{1 \times 3}$

**Remarque :** Le deuxième terme  $(\vec{u}_j \times \vec{u}_i)_j^T$  s'obtient également à partir du premier  $(\vec{u}_i \times \vec{u}_j)_i^T$  en le post-multipliant par  $\mathbf{C}_{ji}^T$  (sous forme ligne, ou en le pré-multipliant par  $\mathbf{C}_{ji}$  sous forme colonne, puis en le transposant pour obtenir la ligne cherchée).

La ligne correspondante du vecteur  $\Gamma$  est constituée par le scalaire  $(\vec{\Omega}_j - \vec{\Omega}_i) \cdot (\vec{u}_j \cdot (\vec{u}_i \cdot \vec{\Omega}_i) - \vec{u}_i \cdot (\vec{u}_j \cdot \vec{\Omega}_j))$ , soit :

$$\begin{aligned} \text{ligne de } \Gamma \text{ relatives à } G^{1r}(\vec{u}_i, \vec{u}_j) \quad : \quad & (\mathbf{S}_j \boldsymbol{\omega}_j - \mathbf{S}_i \boldsymbol{\omega}_i)^T (\mathbf{S}_j \mathbf{u}_j (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\omega}_i) - \mathbf{S}_i \mathbf{u}_i (\mathbf{u}_j^T \boldsymbol{\omega}_j)) \\ & = 2 (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\omega}_i) (\mathbf{u}_j^T \boldsymbol{\omega}_j) - (\mathbf{u}_i^T \mathbf{C}_{ij} \boldsymbol{\omega}_j) (\mathbf{u}_j^T \boldsymbol{\omega}_j) - (\mathbf{u}_i^T \boldsymbol{\omega}_i) (\mathbf{u}_j^T \mathbf{C}_{ji} \boldsymbol{\omega}_i) \end{aligned}$$

### Liaison appui plan

Les dérivées première et seconde (section 4.5.1) de la liaison appui plan  $G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij})$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{u}_i \cdot (\vec{v}_j - \vec{v}_i) + (\vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij})) \cdot \vec{\Omega}_i - (\vec{u}_i \times \vec{p}_j) \cdot \vec{\Omega}_j &= 0 \\ \dots = (\vec{u}_i \times \vec{\Omega}_i) \cdot (\vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_i - \vec{d}_{ij}) + 2 \frac{d}{dt} \vec{d}_{ij}) - \vec{u}_i \cdot (\tilde{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j) \end{aligned}$$

La cohérence des bases de projection utilisées implique que pour la ligne correspondante de la matrice **J** les seuls éléments non nuls sont : vecteur ligne  $-\vec{u}_i$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta \vec{r}_i$ , vecteur

ligne  $\vec{u}_i$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta\vec{r}_j$ , vecteur ligne  $\vec{u}_i \times (\vec{p}_i + \vec{d}_{ij})$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta\vec{\mathcal{A}}_i$  et vecteur ligne  $-\vec{u}_i \times \vec{p}_j$  pour les 3 colonnes relatives à  $\delta\vec{\mathcal{A}}_j$ . Les tableaux suivants résument ces résultats :

colonnes relatives à	$\delta\vec{r}_i$	$\delta\vec{r}_j$	$\delta\vec{\mathcal{A}}_i$
éléments de <b>J</b>	$-\mathbf{u}_i^T$	$(\mathbf{C}_{ji}\mathbf{u}_i)^T = \mathbf{u}_i^T \mathbf{C}_{ij}$	$(\mathbf{u}_i \times (\mathbf{p}_i + \mathbf{S}_i^T \mathbf{d}_{ij}))^T = -(\mathbf{p}_i + \mathbf{S}_i^T \mathbf{d}_{ij})^T \tilde{\mathbf{u}}_i$
colonnes relatives à	$\delta\vec{\mathcal{A}}_j$		autres
éléments de <b>J</b>	$(\mathbf{p}_j \times (\mathbf{C}_{ji}\mathbf{u}_i))^T = -\mathbf{u}_i^T \mathbf{C}_{ij} \tilde{\mathbf{p}}_j$		$\mathbf{0}_{1 \times 3}$

La ligne correspondante du vecteur  $\Gamma$  est constituée par le scalaire :

$$(\vec{u}_i \times \vec{\Omega}_i) \cdot \left( \vec{\Omega}_i \times (\vec{p}_i - \vec{d}_{ij}) + 2 \frac{d}{dt/0} \vec{d}_{ij} \right) - \vec{u}_i \cdot (\vec{\Omega}_j^2 \circ \vec{p}_j)$$

d'où la ligne de  $\Gamma$  relative à  $G^{1n}(\vec{u}_i, \vec{d}_{ij})$  :

$$(\mathbf{u}_i \times \boldsymbol{\omega}_i)^T (\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{p}_i - \mathbf{S}_i^T \mathbf{d}_{ij}) + 2 (\mathbf{S}_i^T (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \mathbf{C}_{ij}(\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{p}_j) - \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i) - \mathbf{u}_i^T \mathbf{C}_{ij} (\boldsymbol{\omega}_j \times (\boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{p}_j)))$$



# Bibliographie

- [1] D. Bellet, “*Cours de mécanique générale*”, Cépaduès éditions. Toulouse, 1988.
- [2] John M. Hollerbach, “*A Recursive Lagrangian Formulation of Manipulators Dynamics and a Comparative Study of Dynamics Formulation Complexity*”, IEEE Trans. Man & Cybernetics, SMC 10-11, 1980, pp 730- 736.
- [3] M. Llibre, R. Mampey, J.P. Chrétien, “*Simulation de la dynamique des robots manipulateurs motorisés*”, AFCET, Congrès automatique 1983, Productique et robotique intelligente, Besançon 15-17 novembre 1983, pages 197-205.

