Equations de Lagrange

On désire écrire les équations différentielles du mouvement d'un corps, ou d'un ensemble de corps ayant des liaisons entre eux, ou avec l'environnement.

Les M corps ont potentiellement $6M$ degrés de libertés. Du fait des liaisons existantes on peut exprimer ces $6M$ degrés de libertés potentiels en fonction d'un nombre réduit m de **paramètres de configurations** notés q_i. Le système n'a donc plus que m degrés de liberté. Les liaisons qui ont été exploitées pour réduire le nombre de degré de liberté de $6M$ à m se nomment des **liaisons holonômes**. Elles permettent d'exprimer les positions et orientations des corps en fonction des q_i.

Il peut subsister des liaisons qui contraignent les mouvements et qu'on ne sait pas exploiter pour réduire encore le nombre de paramètres de configurations. Ces liaisons imposent p relations entre les q_i. Elles sont appelées relations de **liaisons non holonômes**. Nous les noterons :

$$R_{jNH}\left(q_1, q_2, \ldots, q_m\right) = 0 \ , \ j = 1, p$$

Elles sont telles qu'on ne sait pas (ou qu'on ne veut pas [1]) exprimer un des q_i en fonction des autres. Il arrive souvent que ces équations (ou certaines d'entre elles) s'obtiennent directement sous leurs formes dérivées :

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial R_{jNH}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial R_{jNH}}{\partial t} = 0$$

et qu'on ne sait pas les intégrer, ce qui conduit à caractériser les relations de liaisons non holonômes en disant que ce sont des relations entre les vitesses des paramètres alors que les relations de liaisons holonômes sont des relations entre les paramètres eux mêmes. Comme nous venons de le voir, cette caractérisation est inexacte, mais elle est couramment utilisée. Nous les noterons sous forme matricielle :

$$C\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}_0 = 0$$

où C est par définition une matrice $p \times m$ de rang p.

Loi des travaux virtuels

Pour toute partie d'un système, la somme des travaux, dans tout déplacement virtuel[2], des forces réelles[3] et d'inertie[4] est nulle à tout instant.

Si on note T l'energie cinétique du système, $\{\mathbf{F}_k\}$ l'ensemble des forces réelles appliquées aux corps d'un système et $\{\mathbf{P}_k\}$ les points d'applications de ces forces, la loi des travaux virtuels permet d'écrire (après de nombreux calculs) :

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{P}_k - \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i = 0$$

Le premier terme représente les travaux des forces réelles dans les déplacements virtuels $\delta\mathbf{P}_k$ et le deuxième, le travail des forces d'inertie dans ces mêmes déplacements. Au niveau du premier terme, on peut faire apparaître les forces généralisées Q_i qui travaillent quand seul le paramètre de configuration q_i varie :

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i \delta q_i = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{P}_k \Rightarrow Q_i = \frac{\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta\mathbf{P}_k}{\partial q_i}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i}\right]\delta q_i = \sum_{i=1}^{m} Q_i \delta q_i$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} - Q_i\right]\delta q_i = 0$$

1. car on ne désire pas éliminer cette variable.
2. à temps constant
3. y compris les forces qui maintiennent les liaisons holonômes ou non holonômes qui ne sont pas respectées par le déplacement virtuel considéré.
4. qui correspondent au mouvement réel.

Les équations de Lagrange

Système holonôme ($p = 0$) :

Le vecteur δq peut prendre toutes les directions de $\mathbb{R}^m$. On dit que le système a :

$$n = m$$

degrés de liberté. Il en résulte que le vecteur entre crochets, orthogonal à δq, est forcément nul, d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}$$

Système non holonôme ($p \neq 0$) : δq est orthogonal aux p lignes de C. Le système n'a que :

$$n = m - p$$

degrés de liberté. Le vecteur entre crochets doit donc appartenir aux sous-espace engendré par les lignes de C. Notons λ le vecteur de ses composantes sur ces lignes. Il vient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} + C^T \lambda$$

Théorèmes de l'énergie

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \delta q_i$$

S'il existe un potentiel à temps constant [5], en posant $L = T - V$, on a :

$$\frac{d}{dt}(L_2 - L_0) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Remarque :

$$\text{Si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow L_2 - L_0 = cte$$

est appelé **intégrale première de Painlevé**.

Si V ne dépend pas des vitesses, on a $V = V_0 \Rightarrow L_2 = T_2$. L'intégrale première de Painlevé s'écrit alors :

$$\text{Si } \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow T_2 - T_0 + V = cte$$

Le terme T_0 qui ne dépend pas des vitesses des paramètres de configuration provient des vitesses des mouvements imposés. S'il n'y a pas de mouvement imposé, on retrouve l'intégrale première de l'énergie :

$$T + V = cte$$

5. C'est-à-dire si toutes les forces qui travaillent dépendent d'un potentiel, à l'exception éventuellement des forces associées aux mouvements imposés (car ils sont bloqués à temps constant).