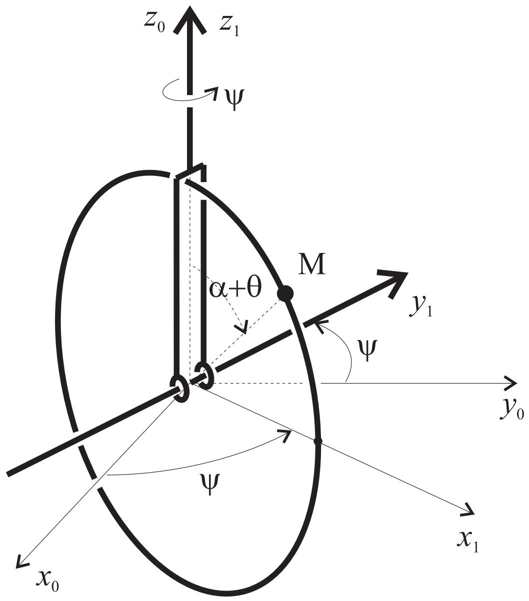
Le couple gyroscopique

Considérons une roue de bicyclette suspendue à une fourche d'axe vertical d'axe $\vec{z}_0$. La roue est entraînée en rotation par un moteur à vitesse de rotation constante $\dot{\theta} = \omega$ autour de l'axe $\vec{y}_1$. Si la roue touchait le sol, elle avancerait selon $\vec{x}_1$. Avec un guidon, on peut faire varier l'angle ψ entre une direction horizontale fixe $\vec{x}_0$ et la direction $\vec{x}_1$.



Considérons le point M situé sur la jante de rayon r à la colatitude α lorsque $\theta = 0$.
On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\left[\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1 + \cos(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right]$$

Sa vitesse s'écrit :

$$\vec{V} = r\left[\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \dot{\theta}\sin(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right] + r\dot{\psi}\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1$$

où le dernier terme provient de la dérivée $\frac{d}{dt}\vec{x}_1 = \dot{\psi}\vec{z}_0 \times \vec{x}_1 = \dot{\psi}\vec{y}_1$.
Dérivons cette vitesse. On obtient :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} = {} & r\left[\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \ddot{\theta}\sin(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right] + r\ddot{\psi}\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1 \\ & + r\left[-\dot{\theta}^2\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right] + r\dot{\psi}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\vec{y}_1 \\ & + r\dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta+\alpha)\vec{y}_1 - r\dot{\psi}^2\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1\end{aligned}$$

où le dernier terme provient de la dérivée $\frac{d}{dt}\vec{y}_1 = \dot{\psi}\vec{z}_0 \times \vec{y}_1 = -\dot{\psi}\vec{x}_1$.
Cette accélération s'écrit encore :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma} = {} & r\ddot{\theta}\left[\cos(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \sin(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right] \\ & + r\ddot{\psi}\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1 \\ & - r\dot{\theta}^2\left[\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1 + \cos(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right] \\ & - r\dot{\psi}^2\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1 \\ & + 2r\dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta+\alpha)\vec{y}_1\end{aligned}$$

où on reconnaît :
— ligne 1 : l'accélération tangentielle dans le mouvement de rotation autour de l'axe de la roue (module égal à $r\ddot{\theta}$)

$$\vec{\Gamma}_{t\theta} = r\ddot{\theta}\left[\cos(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \sin(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right]$$

— ligne 2 : l'accélération tangentielle dans le mouvement de rotation autour de l'axe de la fourche (module égal à $d\ddot{\psi}$ ou d est la distance du point M à la fourche),

$$\vec{\Gamma}_{t\psi} = r\ddot{\psi}\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1$$

— ligne 3 : l'accélération centripète dans le mouvement de rotation autour de l'axe de la roue (module égal à $r\dot{\theta}^2$ et dirigée vers le centre),

$$\vec{\Gamma}_{c\theta} = -r\dot{\theta}^2\left[\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1 + \cos(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right] = -\dot{\theta}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

— ligne 4 : l'accélération centripète dans le mouvement de rotation autour de l'axe de la roue de la fourche (module égal à $d\dot{\psi}^2$ dirigé vers l'axe de la fourche),

$$\vec{\Gamma}_{c\psi} = -r\dot{\psi}^2\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1$$

— ligne 5 : l'accélération de Coriolis égale à $2\vec{\Omega}\times\vec{V}_r$ avec $\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{z}_0$ et $\vec{V}_r = r\dot{\theta}\left[\cos(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \sin(\theta+\alpha)\vec{z}_0\right]$.

$$\vec{\Gamma}_{2\Omega V} = 2r\dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta+\alpha)\vec{y}_1$$

Remarquons au passage que l'accélération de Coriolis provient de la somme des termes suivants :

$$\vec{\Gamma}_{2\Omega V} = \left[\frac{d}{dt}r\sin(\theta+\alpha)\right]\dot{\psi}\vec{y}_1 + r\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\frac{d}{dt}\vec{x}_1 - r\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha)\frac{d}{dt}\vec{z}_0$$

Le premier est dû à variation de la vitesse d'entraînement $\vec{V}_e = r\dot{\psi}\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1$ (induite par $\dot{\psi}\vec{z}_0$) qui résulte de la variation du bras de levier $r\sin(\theta+\alpha)$ produite par $\dot{\theta}$. Le deuxième est la variation de vitesse relative $\vec{V}_r = r\left[\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\vec{x}_1 - \dot{\theta}\sin(\theta+\right.$ produite par la rotation $\dot{\psi}\vec{z}_0$.

Considérons au point M un élément de jante de masse dm, et calculons le moment dynamique au point O produit par $dm\vec{\Gamma}$. Il vient :

$$d\vec{\mathscr{M}} = dm\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\vec{\Gamma}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\vec{\Gamma}_{t\theta} &= r^2\ddot{\theta}\vec{y}_1\\
\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\vec{\Gamma}_{t\psi} &= r^2\ddot{\psi}\left[\sin^2(\theta+\alpha)\vec{z}_0 - \cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\alpha)\vec{x}_1\right]\\
\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\vec{\Gamma}_{c\theta} &= \vec{0}\\
\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\vec{\Gamma}_{c\psi} &= -r^2\dot{\psi}^2\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1\\
\overrightarrow{\mathrm{OM}}\times\vec{\Gamma}_{2\Omega V} &= 2r^2\dot{\psi}\dot{\theta}\left[\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)\vec{z}_0 - \cos^2(\theta+\alpha)\vec{x}_1\right]
\end{aligned}$$

Pour la suite, on simplifie les calculs en se limitant au cas $\ddot{\theta} = \ddot{\psi} = 0$.

Cas d'une jante uniforme

Dans ce cas on a $dm = \frac{m}{2\pi}d\alpha$. Intégrons $d\vec{\mathscr{M}}$ pour α variant de 0 à 2π. L'intégrale des produits $\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\theta+2\alpha)$ sera nulle. Par ailleurs comme $\cos^2(\theta+\alpha) = \left[\frac{1}{2}\cos(2\theta+2\alpha)+\frac{1}{2}\right]$, seule l'intégrale du $\frac{1}{2}$ sera non nulle. D'où :

$$\vec{\mathscr{M}} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)2r^2\dot{\psi}\dot{\theta}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\vec{x}_1\right]d\alpha$$

soit :

$$\vec{\mathscr{M}} = -mr^2\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{x}_1 = \vec{\Omega}\times\vec{\sigma} \text{ avec } \begin{cases}\vec{\Omega} = \dot{\psi}\vec{z}_0\\ \vec{\sigma} = mr^2\dot{\theta}\vec{y}_1\end{cases}$$

Si on calcule l'intégrale des forces dynamiques $d\vec{F} = m\frac{d\alpha}{2\pi}\vec{\Gamma}$ on trouve $\vec{F} = \vec{0}$. Le torseur dynamique résultant est donc un couple pur appelé couple gyroscopique. Il provient du moment dynamique produit principalement par les masses qui se trouvent au voisinage de l'axe de la fourche. Les accélérations de Coriolis de ces masses, dirigées selon l'axe de la roue, sont de sens opposées en haut et en bas. Elle produisent ce couple gyroscopique autour de l'axe $\vec{x}_1$. Les masses qui sont en quadrature (au voisinage de l'axe $\vec{x}_1$) ont des accélérations de Coriolis quasiment nulles (leur vitesse relative $\vec{V}_r$ est parallèle à $\vec{\Omega}$). Elle ne contribuent donc pas au couple gyroscopique.

Si la fourche est suspendue au plafond, et qu'on tourne le guidon, la roue va avoir tendance à s'incliner, dans ce mouvement son centre de masse va s'écarter de la verticale du point de suspension. Le couple de rappel créé par la gravité va équilibrer le couple gyroscopique. On peut ainsi écarter la roue de la verticale selon la direction $\vec{y}_1$ en exerçant sur le guidon une force selon $\vec{x}_1$. Cette force va faire précessionner la roue en ψ créant ainsi le couple gyroscopique qui va équilibrer le couple de rappel de la gravité.

Cas de deux masses ponctuelles

S'il n'y a que deux masses ponctuelles de masse $m/2$ diamétralement opposées en α et $\alpha+\pi$, on trouve un moment égal à :

$$\begin{aligned}\vec{\mathscr{M}} = & -mr^2\dot{\psi}^2\cos(\theta+\alpha)\sin(\theta+\alpha)\vec{y}_1 \\ & +2mr^2\dot{\psi}\dot{\theta}\left[\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)\vec{z}_0-\cos^2(\theta+\alpha)\vec{x}_1\right]\end{aligned}$$

et une résultante dynamique égale à :

$$\vec{F}=\vec{0}$$

(avec une seule masse m, on trouve le même moment dynamique $\vec{\mathscr{M}}$, mais avec une résultante dynamique non nulle).

Les termes autour de $\vec{y}_1$ et $\vec{z}_0$ sont à moyenne nulle quand les masses tournent. Le terme autour de $\vec{x}_1$:

— passe par un maximum (en valeur absolue) de $\vec{\mathscr{M}} \simeq -2mr^2\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{x}_1$ pour $\theta+\alpha\simeq k\pi$ (masses au voisinage de l'axe $\vec{z}_0$),

— et un minimum (en valeur absolue) de $\vec{\mathscr{M}}\simeq\vec{0}$ pour $\theta+\alpha\simeq\frac{\pi}{2}+k\pi$ (masses au voisinage de l'axe $\vec{x}_1$),

— avec une valeur moyenne égale à $\vec{\mathscr{M}}=-mr^2\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{x}_1$.

On retrouve le fait que l'origine dynamique du couple gyroscopique est l'accélération de Coriolis des masses qui se trouvent au voisinage de l'axe de précession.

Cas de trois masses ponctuelles de masse $m/3$ situées à 120 degrés.

En remarquant que :

$$\begin{aligned}\cos\beta+\cos\left(\beta+2\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\beta+4\frac{\pi}{3}\right)&=0\\ \sin\beta+\sin\left(\beta+2\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\beta+4\frac{\pi}{3}\right)&=0\\ \cos 2\beta+\cos 2\left(\beta+2\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2\left(\beta+4\frac{\pi}{3}\right)&=0\\ \sin 2\beta+\sin 2\left(\beta+2\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2\left(\beta+4\frac{\pi}{3}\right)&=0\end{aligned}$$

on obtient encore $\vec{F}=\vec{0}$ et

$$\vec{\mathscr{M}}=-mr^2\dot{\psi}\dot{\theta}\vec{x}_1$$

On trouve le même couple gyroscopique permanent que dans le cas de la jante uniforme. Il en est de même avec 4 masses en quadrature.