

Vibrations

Etude des petits mouvements par la méthode de Lagrange

On se place dans le cadre de l'étude des petits mouvements d'un système mécanique dont toutes les forces non inertielles dérivent d'un potentiel de position. Soit \mathbf{y} le vecteur des paramètres de configuration et $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ ce potentiel de position. Appelons \mathbf{y}_{eq} la position d'équilibre et posons $\delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{eq}$. On a :

$$\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq} + \delta\mathbf{y}) = \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq}) + \delta\mathbf{y}^T \left(\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}} \right) + \frac{1}{2} \delta\mathbf{y}^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \delta\mathbf{y}$$

Si la forme quadratique $\delta\mathbf{y}^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \delta\mathbf{y}$ est définie positive et si $\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}} = 0$, alors $\mathcal{V}(\mathbf{y}) > \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})$ quel que soit $\delta\mathbf{y}$. Le point \mathbf{y}_{eq} défini par $\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}} = 0$ est à un minimum de potentiel. C'est un point d'équilibre stable. Au contraire, si la forme est définie négative, le point \mathbf{y}_{eq} est à un maximum de potentiel qui correspond à un équilibre instable. Si la forme a des valeurs propres des 2 signes, le point d'équilibre est stable pour certains modes et instable pour d'autres.

Méthodologie :

1) Déterminer la position d'équilibre \mathbf{y}_{eq} par l'extremum du potentiel $\mathcal{V}(\mathbf{y})$:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{V}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0 \text{ pour } \mathbf{y} = \mathbf{y}_{eq}$$

2) Exprimer l'énergie cinétique et le potentiel en fonction de la variable d'écart $\mathbf{x} = \delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{eq}$

En remarquant que :

$$\mathcal{V}(\mathbf{y}) = \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq}) + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}(\mathbf{y}_{eq})}{\partial \mathbf{y}^2} \right) \mathbf{x} + cte$$

on voit que l'expression de \mathcal{V} en fonction de \mathbf{x} s'obtient (à une constante additive près) en ne conservant que les termes quadratique de $\mathcal{V}(\mathbf{y})$.

Finalement, dans le cas particulier considéré, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}} \text{ et } \mathcal{V} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$$

où \mathbf{M} et \mathbf{K} sont deux matrices constantes $n \times n$.

3) Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \rightarrow \frac{d}{dt} (\mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Le mouvement est le résultat d'un échange entre l'énergie cinétique acquises par les masses et inerties et l'énergie potentielle (des ressorts, des poids, etc...).

Remarque : Les équations différentielles du mouvement d'un système dynamique peuvent toujours se mettre sous la forme $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{S}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$, avec \mathbf{M} définie positive symétrique (si tous les corps ont une masse non nulle). Aux petits mouvements, la linéarisation du terme $\mathbf{S}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$ donne $\mathbf{S}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \simeq \mathbf{F} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x}$ ou \mathbf{F} et \mathbf{K} sont des matrices quelconques. \mathbf{F} est éventuellement nulle (pas de forces dissipatives par exemple) et \mathbf{K} est éventuellement symétrique (par exemple lorsque toutes les forces dérivent d'un potentiel de position). La forme étudiée ici est donc très particulière.

4) Intégration par découplage.

\mathbf{M} est généralement régulier (l'énergie cinétique est définie positive si tous les corps considérés ont une masse).

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

On pose :

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$$

et on considère le changement de variable régulier :

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{z}$$

d'où :

$$\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (1)$$

On choisit \mathbf{P} de telle manière que la matrice :

$$\Lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$$

soit diagonale d'éléments λ_i . Les équations (1) sont alors découplées en :

$$\ddot{z}_i + \lambda_i z_i = 0 \text{ pour } i = 1, n$$

On en déduit les mouvements des modes $z(t)$, puis $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \mathbf{z}(t)$.

5.1) Calcul des λ_i et de \mathbf{P} .

La relation $\Lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}$ s'écrit $\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{P} \Lambda$. Notons \mathbf{p}_i le i -ième vecteur colonne de \mathbf{P} . Il est tel que :

$$\mathbf{A} \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}) \mathbf{p}_i = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{1}$ est la matrice identité $n \times n$. Pour trouver à cette équation, autre chose que la solution triviale $\mathbf{p}_i = \mathbf{0}$, il faut que :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}) = 0$$

Les λ_i sont les solutions de cette équation caractéristique de degré n .

Posons :

$$\mathbf{B}(\lambda_i) = \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{1}$$

Si on développe le déterminant $\det(\mathbf{B}(\lambda_i))$ selon sa k -ième ligne, on a une expression de la forme :

$$\det(\mathbf{B}(\lambda_i)) = b_{k1} B_{k1} + b_{k2} B_{k2} + \dots + b_{kn} B_{kn}$$

où les b_{ki} sont les éléments de k -ième ligne de $\mathbf{B}(\lambda_i)$ et les B_{ki} sont leurs cofacteurs. Considérons l'expression :

$$e = b_{j1} B_{k1} + b_{j2} B_{k2} + \dots + b_{jn} B_{kn}$$

C'est le produit des éléments de la j -ième ligne de $\mathbf{B}(\lambda_i)$ par les B_{ki} (cofacteurs des éléments de la k -ième ligne). Ce produit est nul, car il correspond au déterminant d'une matrice qui a les lignes j et k identiques. Ce produit est donc nul quel que soit j différent de k . Il est également nul pour $j = k$, puisque $\det(\mathbf{B}(\lambda_i)) = 0$. Le vecteur :

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} B_{k1} \\ \vdots \\ B_{kn} \end{pmatrix}$$

est donc orthogonal à toutes les lignes de $\mathbf{B}(\lambda_i)$, c'est donc le vecteur \mathbf{p}_i recherché (qui est défini à une constante multiplicative près).

Remarque : Pour calculer les vecteurs \mathbf{p} , on choisit n'importe quelle ligne de $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})$ et on calcule ses cofacteurs pour une valeur littérale de λ , ce qui donne le vecteur propre générique $\mathbf{p}(\lambda)$. Il n'y a qu'à particulariser les valeurs des λ_i pour avoir tous les \mathbf{p}_i . Si pour un des vecteurs, toutes les composantes sont nulles, il faut procéder avec une autre ligne de $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})$.

4.2) **Expression de la solution :** Dans le cas où tous les λ_i sont positifs, la solution générale peut s'écrire :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n k_i \mathbf{p}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \varphi_i)$$

(car les \mathbf{p}_i sont définis à un coefficient multiplicatif près). Cette solution dépend donc de $2n$ paramètres inconnus k_i et φ_i qui seront calculés en prenant en compte les $2n$ conditions initiales $\mathbf{x}(t=0)$ et $\dot{\mathbf{x}}(t=0)$.

4.3) Masses et raideurs dans les modes propres

Dans le cas particulier sans dissipation (\mathbf{F} nulle), avec une matrice \mathbf{K} symétrique (toutes les forces dérivent d'un potentiel de position) et lorsque toutes les valeurs propres sont distinctes, on peut démontrer que la matrice \mathbf{P} (dont tous les vecteurs colonnes sont définis à un coefficient multiplicatif près) est telle que :

$$\mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P} = \bar{\mathbf{M}} \text{ et } \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P} = \bar{\mathbf{K}}$$

où $\bar{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{K}}$ sont diagonales. L'équation différentielle initiale peut être mise sous la forme découplée :

$$\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

qui permet d'interpréter $\bar{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{K}}$ comme des masses et raideurs dans les modes propres. Toutefois ces valeurs sont arbitraires et seuls les rapports $\bar{k}_i/\bar{m}_i = \lambda_i$ sont significatifs, ce qui ôte tout sens physique à ces matrices. A titre d'exemple, on peut trouver une matrice \mathbf{P} telle que $\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{1}$ et $\bar{\mathbf{K}} = \Lambda$. Toutefois, dans le cas de calculs littéraux ou de calculs effectués à la main, elles peuvent être intéressantes pour calculer la réponse à des oscillations forcées (cf. remarque finale).

5) Méthode des modes propres

On cherche, a priori une solution de la forme :

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}e^{st}$$

qui reporté dans l'équation différentielle donne :

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}) \mathbf{b}e^{st} = \mathbf{0}$$

Ici aussi, pour avoir autre chose que la solution triviale $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, il faut que :

$$\det(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K}) = 0$$

Mais comme \mathbf{M} est régulière, cette équation est identique à :

$$\det(s^2\mathbf{1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}) = 0$$

On voit donc que les solutions sont telles que :

$$-s^2 = \lambda_i$$

Ainsi, si les λ_i sont positifs, tels que $\lambda_i = \omega_i^2$, on aura $s_i = i\omega_i$ imaginaire pur, ce qui donne pour \mathbf{x} un mode sinusoïdal, c'est pour cela que lorsqu'il n'y a pas de terme dissipatif dans l'équation différentielle les mécaniciens posent directement $\mathbf{x} = \mathbf{b} \sin(\omega t + \varphi)$ et résolvent ensuite l'équation $\det(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}) = 0$.

Le vecteur \mathbf{b} noyau de $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{K})$ est également noyau de $(s^2\mathbf{1} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})$. On a donc $\mathbf{b}_i = \mathbf{p}_i$ et on peut utiliser la procédure précédente (utilisant les cofacteurs) pour calculer les amplitudes des modes propres.

6) Oscillations forcées

Supposons l'existence d'un deuxième membre à l'équation différentielle avec une entrée forcée, du type :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{e} \sin(\omega_f t + \varphi)$$

A la solution générale $\mathbf{x}_g(t)$ précédemment calculée, on va ajouter une solution particulière $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{c} \sin(\omega_f t + \varphi)$, telle que :

$$(-\mathbf{M}\omega_f^2 + \mathbf{K}) \mathbf{c} \sin(\omega_f t + \varphi) = \mathbf{e} \sin(\omega_f t + \varphi)$$

d'où :

$$\mathbf{c} = (-\mathbf{M}\omega_f^2 + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{e}$$

avec :

$$(-\mathbf{M}\omega_f^2 + \mathbf{K})^{-1} = \frac{\text{adj}(-\mathbf{M}\omega_f^2 + \mathbf{K})}{\det(-\mathbf{M}\omega_f^2 + \mathbf{K})}$$

Mais on a $\det(-\mathbf{M}\omega_i^2 + \mathbf{K}) = 0$, ce qui fait que si $\omega_f = \omega_i$ le vecteur \mathbf{c} peut devenir infini (il y a résonance), sauf si des termes du numérateur sont également nuls. Pour les composantes pour lesquelles les termes du numérateur sont nuls on dit qu'il y a anti-résonance ou étouffement puisque la pulsation ω_f n'apparaît pas en sortie sur cette composante.

Remarque : Le calcul à la main ou littéral de $(-\mathbf{M}\omega_f^2 + \mathbf{K})^{-1}$ peut être facilité en utilisant les matrices de masse et de raideur dans les modes propres.

En effet, on peut vérifier que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_f^2)^{-1} &= (\mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-T}\mathbf{P}^T\mathbf{M}\omega_f^2\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})^{-1} \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P}\omega_f^2)^{-1}\mathbf{P}^T \\ &= \mathbf{P}(\bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{M}}\omega_f^2)^{-1}\mathbf{P}^T \end{aligned}$$

et $(\bar{\mathbf{K}} - \bar{\mathbf{M}}\omega_f^2)^{-1}$ étant diagonale, son inversion est immédiate.