Les mathématiques du mécanisme d'Anticythère

Table des matières

1 Introduction....1
2 Algorithme d'Euclide....1
3 Fractions continues....2
4 Réduites et approximations d'un nombre irrationnel....3
5 Les engrenages de la machine d'Anticythère....4

1 Introduction

La machine d'Anticythère est un mécanisme à engrenages datant de l'antiquité grecque trouvé en 1901 dans l'épave d'une galère romaine. C'est un mécanisme astronomique extrêmement perfectionné qui permettait de prévoir les dates des éclipses. Sa conception a demandé une grande maîtrise technologique dans la réalisation des engrenages et de sérieuses connaissances mathématiques que nous présentons dans ce document.
Le problème mathématique qu'ont du résoudre les concepteurs de cette machine a été de trouver la meilleure approximation qui soit pour des rapport de durées non entières (par exemple celle des mois synodiques et draconitiques) à l'aide de rapports de nombres entiers aussi petits que possible car ces nombres sont ceux des dents des engrenages. Les concepteurs se sont appuyés sur les travaux d'Euclide : algorithme de recherche du plus grand commun diviseur, de Diophante d'Alexandrie : approximation diophantienne des nombres irrationnels dont l'existence a été révélée au monde par Hippase de Métaponte, élève de Pythagore.

2 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide recherche le PGCD de deux entiers A et B, avec $A > B$.

Remarquons que le PGCD de A et B est le même que celui de (A-B) et B, car s'il divise A et B, il divise aussi A-B. On peut donc remplacer le couple A, B par le couple de nombres plus petits (A-B), B .

Considérons la division entière de A par B qui permet d'écrire :

$$A = Bq + r \text{ avec } r < b$$

où q est le quotient et r le reste.

L'algorithme d'Euclide de recherche du PGCD accélère le processus de notre remarque en retranchant à A, q fois B ce qui revient à remplacer le couple (A,B) par le couple (B,r).

Notons r = rem(A,B) et utilisons la relation :

$$\text{pgcd}(A,B) = \text{pgcd}(B, \text{rem}(A,B))$$

itérativement jusqu'à ce que le reste soit nul. Le dernier diviseur non nul est le pgcd. C'est aussi le dernier reste non nul de l'itération précédente ***quand elle est présente***.

Exemple 88 = **8**x11 et 56=**8**x7

A	*B*	*q*	*r*
88	56	1	32
56	32	1	24
32	24	1	**8**
24	**8**	3	0

Autre exemple : 165 = **3**x55 et 72=**3**x24

A	*B*	*q*	*r*
165	72	2	21
72	21	3	9
21	9	2	**3**
9	**3**	3	0

Remarque : Dans le calcul du PGCD, le quotient n'est pas exploité.

3 Fractions continues

3.1 Exemples d'introduction

Premier exemple :

Utilisons le tableau précédent pour développer le rapport 88/56. En utilisant la première ligne on peut écrire :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{32}{56}=1+\frac{1}{\frac{56}{32}}$$

En utilisant la deuxième ligne, on écrit :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{1}{1+\frac{24}{32}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{32}{24}}}$$

En utilisant la suivante :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{8}{24}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{24}{8}}}}$$

et finalement :

$$\frac{88}{56}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$$

ce qui s'écrit avec la notation des fractions continues :

$$\frac{88}{56}=[1,1,1,3]$$

Ce qui donne les approximations suivantes pour **1.571428**... (88/56)

- 1
- $1+\frac{1}{1}=2$
- $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=\frac{3}{2}=1,5$
- $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{11}{7}=1.571428$

On a ainsi, pour 88/56 les approximations de plus en plus précises suivantes 1, 2, 3/2 et 11/7

Deuxième exemple :

Utilisons le tableau précédent pour développer le rapport 165/72. En utilisant la première ligne on peut écrire :

$$\frac{165}{72}=2+\frac{21}{72}=2+\frac{1}{\frac{72}{21}}$$

En utilisant la deuxième ligne, on écrit :

$$\frac{165}{72}=2+\frac{21}{72}=2+\frac{1}{\frac{72}{21}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{21}{9}}}$$

En utilisant la suivante :

$$\frac{165}{72}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{21}{9}}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{9}{3}}}}$$

et finalement :

$$\frac{165}{72}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$$

ce qui s'écrit avec la notation des fractions continues :

$$\frac{165}{72}=[2,3,2,3]$$

Ce qui donne les approximations suivantes pour 2,2916666 (165/72)

- 2
- $2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2.3333$
- $2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}}=\frac{16}{7}=2,2857$

- $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}=\frac{55}{24}=2{,}2916666$

On a ainsi pour 165/72 les approximations de plus en plus précises suivantes 2, 7/3, 16/7 et 55/24.

3.2 Formalisation de la récurrence

Pour formaliser la récurrence on pose :

$$p_0=A \quad , \quad p_1=B \quad , \quad a_0=q \quad \text{et} \quad p_2=r$$

Ainsi devient :

$$p_0=a_0 p_1+p_2 \quad \text{avec} \quad a_0 \quad \text{entier positif et} \quad p_2<p_1 \quad .$$

puis on pour calculer a_1 et p_2 et ainsi de suite on applique la relation de récurrence :

$$p_{j-1}=a_{j-1}p_j+p_{j+1}$$

tant que p_j est non nul. Cette relation définit le quotient a_{j-1} et le reste p_{j+1} :

$$a_{j-1} \;=\; floor\left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right)$$

$$p_{j+1} \;=\; p_{j-1}-a_{j-1}p_j$$

Remarquons que :

$$\frac{A}{B}=q+\frac{r}{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{B}=\frac{p_0}{p_1}=a_0+\frac{p_2}{p_1} \;=\; a_0+\cfrac{1}{\cfrac{p_1}{p_2}}$$

puis :

$$\frac{A}{B}= \; a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{p_3}{p_2}} \;=\; a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{\cfrac{p_2}{p_3}}}$$

etc... :

$$\frac{A}{B}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}=[a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots]$$

où on a introduit la notation $[a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots]$ pour exprimer la fraction continue.

Le dernier a_n est obtenu lorsque $p_{n+2}=0$. Il est tel que $p_n/p_{n+1}=a_n=[a_n]$ en utilisant la notations que nous venons d'introduire.

Il en résulte que $p_j/p_{j+1}=[a_j,p_{j+1}/p_{j+2}]=[a_j,a_{j+1},\ldots,a_n]$ et finalement :

$$\frac{p_0}{p_1}=[a_0,a_1,\ldots,a_n]$$

4 Réduites et approximations d'un nombre irrationnel

Soit un nombre μ quelconque, a priori irrationnel. On applique la même procédure en posant :

$\mu=\frac{A}{B}$ avec $A=\mu$ et $B=1$, soit avec les notations de la récurrence $p_0=\mu$ et $p_1=1$.

On cherche a_0 et p_2 tels que :

$p_0=a_0 p_1+p_2$ avec a_0 entier positif et $p_2<p_1$

mais maintenant les p_j sont des réels. La relation de récurrence :

$$p_{j-1}=a_{j-1}p_j+p_{j+1}\Rightarrow\begin{cases} a_{j-1}=floor\left(\frac{p_{j-1}}{p_j}\right) \\ p_{j+1}=p_{j-1}-a_{j-1}p_j \end{cases}$$

ne s'arrêtera pas si μ est un vrai réel.

Exemple pour π :

$$\pi\simeq\frac{3.1415926535}{1}=3+\frac{0.1415926535}{1}=3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{0.1415926535}}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{0.008851425}{0.1415926535}}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{\cfrac{0.1415926535}{0.008851425}}}$$

$$\pi= 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{0.00882128}{0.008851425}}} = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{\cfrac{0.008851425}{0.00882128}}}}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{0.000030144}{0.00882128}}}} = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{0.00882128}{0.000030144}}}}}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{0.00001913}{0.000030144}}}}}$$

qui donne l'approximation :

$\pi=[3,7,15,1,292,...]$

On appelle *réduite d'ordre p de cette fraction continue infinie* le rapport des 2 nombres entiers obtenus en arrêtant la réduction au dénominateur de la fraction continue au terme a_p :

$$\frac{h_p}{k_p}=[a_0,a_1,...,a_p]$$

On a :

- $\frac{h_0}{k_0}=\frac{a_0}{1}$, soit 3 pour π.

- $\frac{h_1}{k_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{22}{7} = 3{,}1429$ pour π .
- $\frac{h_2}{k_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{333}{106} = 3.141509$ pour π
- $\frac{h_3}{k_3} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_2 + a_3} = \frac{355}{113} = 3.14159292$ pour π
- etc...

La fraction h_p / k_p est une ***approximation diophantienne*** du nombre irrationnel μ. Elle est nommée ainsi car ce genre de problème avec une équation à variables sur l'ensemble des nombres rationnels a fait l'objet de nombreuses études par **Diophante d'Alexandrie** (époque inconnue autour de J.-C.).

Les relations de récurrence suivantes permettent de calculer ces réduites :

$$h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2}$$
$$k_n = a_n k_{n-1} + k_{n-2}$$

on les initialise avec $h_0 = a_0$, $k_0 = 1$ et $h_{-1} = 1$ et $k_{-1} = 0$, et on applique la récurrence de *n*=1 à *p*, ou jusqu'à ce qu'on ait atteint la précision désirée.

On peut également utiliser l'initialisation $h_{-2} = 0$ et $k_{-1} = 1$ qui permet d'appliquer la récurrence de *n*=0 à *p*.

Précision :

On peut montrer que la différence de deux réduites successives est donnée par :

$$\frac{h_{p+1}}{k_{p+1}} - \frac{h_k}{p_k} = \frac{(-1)^p}{k_p k_{p+1}}$$

ce qui permet d'affirmer que $|\mu - \frac{h_p}{k_p}| < \frac{1}{k_p k_{p+1}}$. On a ainsi une borne de l'erreur que l'on fait en limitant le réduite à l'ordre *p*.

Exemple :

$\pi = [3,7,15,1,292,...]$

n	a_n	h_n	k_n	h_n/k_n	$1/k_n k_{n+1}$
-2	-	0	1	-	-
-1	-	1	0	-	-
0	3	3	1	3	1/7
1	7	22	7	3.1428	1/742
2	15	333	106	3.141509	1/11978
3	1	355	113	3.14159292	1/430326
4	292	103993	33102	3.1415926530	-

On voit tout l'intérêt des approximations 22/7 à moins de 1/742 près et 355/113 à moins de 1/430000 près. L'approximation 333/106 est moins intéressante car elle manipule des nombres du même ordre de grandeur que 355/113 avec une précision inférieure. L'approximation suivante 103993/33102 manipule des nombres trop grands, mais elle offre 9 décimales exactes.

Cette approximation diophantienne à l'aide des fractions continue est connue **d'Aryabhata** (mathématicien astronome indien vers 500) qui l'utilise en particulier pour calculer des racines carrées et cubiques.

On doit à **Hippase de Métaponte** (élève de **Pythagore**) la révélation au monde (vers -500) de l'existence de nombre non rationnels, ce qui aurait provoqué l'ire des autres disciples qui l'auraient jeté à la mer.

Hippase aurait révélé l'irrationalité du nombre d'or ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) ou de la longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 qui vaut $\sqrt{2}$. Examinons comment se fait cette dernière démonstration par l'absurde. Au préalable remarquons que :

- si n est pair, n^2 est pair
- si n est impair n^2 est impair
- ***n* est pair si et seulement si *n*² est pair**.

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, il existe 2 entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ est une fraction ***irréductible***. Montrons que ceci est impossible.

Comme $p^2=2q^2$ il en résulte que p^2 est pair et que p est pair.

Puisque p est pair posons $p = 2p'$. Il vient :

$p^2=4p'^2$, or $p^2=2q^2$ d'où $2q^2=4p'^2$ soit $q^2=2p'^2$ il en résulte que q^2 est pair et que q est pair.

Posons $q=2q'$. , d'où $\frac{p}{q}=\frac{2p'}{2q'}$ est une fraction réductible ce qui contredit l'hypothèse de départ : La fraction irréductible est réductible (à l'infini). On a une impossibilité, les nombres entiers p et q premiers entre eux ne peuvent pas exister.

5 Les engrenages de la machine d'Anticythère

Dans la machine d'Anticythère, découverte dans l'épave d'une galère romaine qui a été coulée à l'époque du siège de Syracuse, le nombre de dents des engrenages de son mécanisme permettent de retrouver la périodicité des éclipses prédites par le Saros. Le Saros est la plus courte période qui est un commun multiple des mois synodiques, draconitiques et anomalistiques.

Dans un premier temps on cherche un commun multiple du mois synodique S = 29.530589 jours et du mois draconitique D = 27.212211 jours. On cherche des petits entiers s et d tels que :

$$s\,S \simeq d\,D$$

ce qui revient à chercher le rapport qui approche au mieux $\frac{S}{D}=1.08519623$

L'application des méthodes précédentes conduit à la fraction continue suivante :

$$\frac{S}{D}=[1,11,1,2,1,4,3,2,2,4,4,3,1,2,1,22,...]$$

et au tableau des réduites suivant :

	s	d	dD - sD
1	1	1	2.318
2	11	12	1.710
3	12	13	0.608
4	35	38	0.493
5	47	51	0.115
6	223	242	0.034
7	716	777	0.014

Les 6ème et 7ème approximations, à moins de 0.034 jour près (moins d'une heure) sont excellentes.

Par ailleurs, si on considère la durée A = 27.55455 jours du mois anomalistique, et que l'on cherche le nombre arrondi entier *a* de ces mois dans la durée moyenne $\frac{sS+dD}{2}$ et qu'on calcule l'écart de *aA* à cette durée moyenne, on trouve :

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	12	13	38	50	239	767
écart	0.817	4.963	4.146	13.256	10.153	0.199	9.555

Ainsi la 6ème approximation est excellente en ce qui concerne la coïncidence anomalistique, ce qui explique, a posteriori, cette solution qui est donc constitué de :

- 223 mois synodiques
- 242 mois draconitiques
- 239 mois anomalistiques.

Elle dure 18 ans et 10 à 11 jours environ (suivant le calage des années bissextiles). Cette période de retour des éclipses tous les 18 ans est citée dans une tablette babylonienne.

La machine d'Anticythère comporte les engrenages avec 223, 242 et 239 dents.