Formule de Héron

Table des matières

1 Introduction

Ce document regroupe quelques digressions autour de la formule de Héron. Il y a quelques temps, en recherchant les coordonnées des points d'intersection de deux cercles, je suis tombé sur une expression avec 4 produits successifs faisant intervenir les longueurs des cotés d'un triangle. Cette expression m'a rappelé une formule que j'avais rencontré lors de mes études plus d'un demi-siècle auparavant, ce qui m'a incité à rédiger ce petit mémo.

Héron d'Alexandrie est un ingénieur, mécanicien et mathématicien grec du 1er siècle après J.-C. On lui doit sa fameuse formule qui permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs de ses trois cotés, mais aussi l'énoncé que la nature choisit le chemin le plus court pour propager la vision, la réalisation de nombreux automates et d'une machine à vapeur...

2 Démonstration géométrique présumée originale

La démonstration géométrique originale de la formule de Héron est difficile à trouver. Voici ce que j'ai trouvé ici : www.numdam.org/item/NAM_1861_1_20__432_1/.

C'est la numérisation d'un texte des *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1re série , tome 20 (1861) p. 432-433, texte lui-même rédigé d'après des *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs*, textes restitués et traduits en français par M. J.-H. Vincent, membre de l'Institut; 1858, p131.

Cette démarche est peut-être celle suivie par Héron.

Soient ABG le triangle, H le centre du cercle inscrit, D, E, Z les points de contact respectifs sur les côtés AB, BG, GA. Prolongeons GB d'une longueur BC = AD, GC est donc la moitié du périmètre, et le *double* de l'aire du triangle est égal au rectangle HE.GC. Élevons en H une perpendiculaire à HG et en B une perpendiculaire à GB. Soient L le point de rencontre de ces deux perpendiculaires et K l'intersection de HL et de GB; les quatre points G, H, B, L sont sur une même circonférence. Les deux triangles rectangles GLB, HAD étant équiangles sont semblables, donc

$$\frac{GB}{BL} = \frac{AD}{DH} = \frac{BC}{HE}, \quad \frac{GB}{BC} = \frac{BL}{HE} = \frac{BK}{KG},$$

$$\frac{GB + BC}{BC} = \frac{BK + KE}{KE},$$

ou

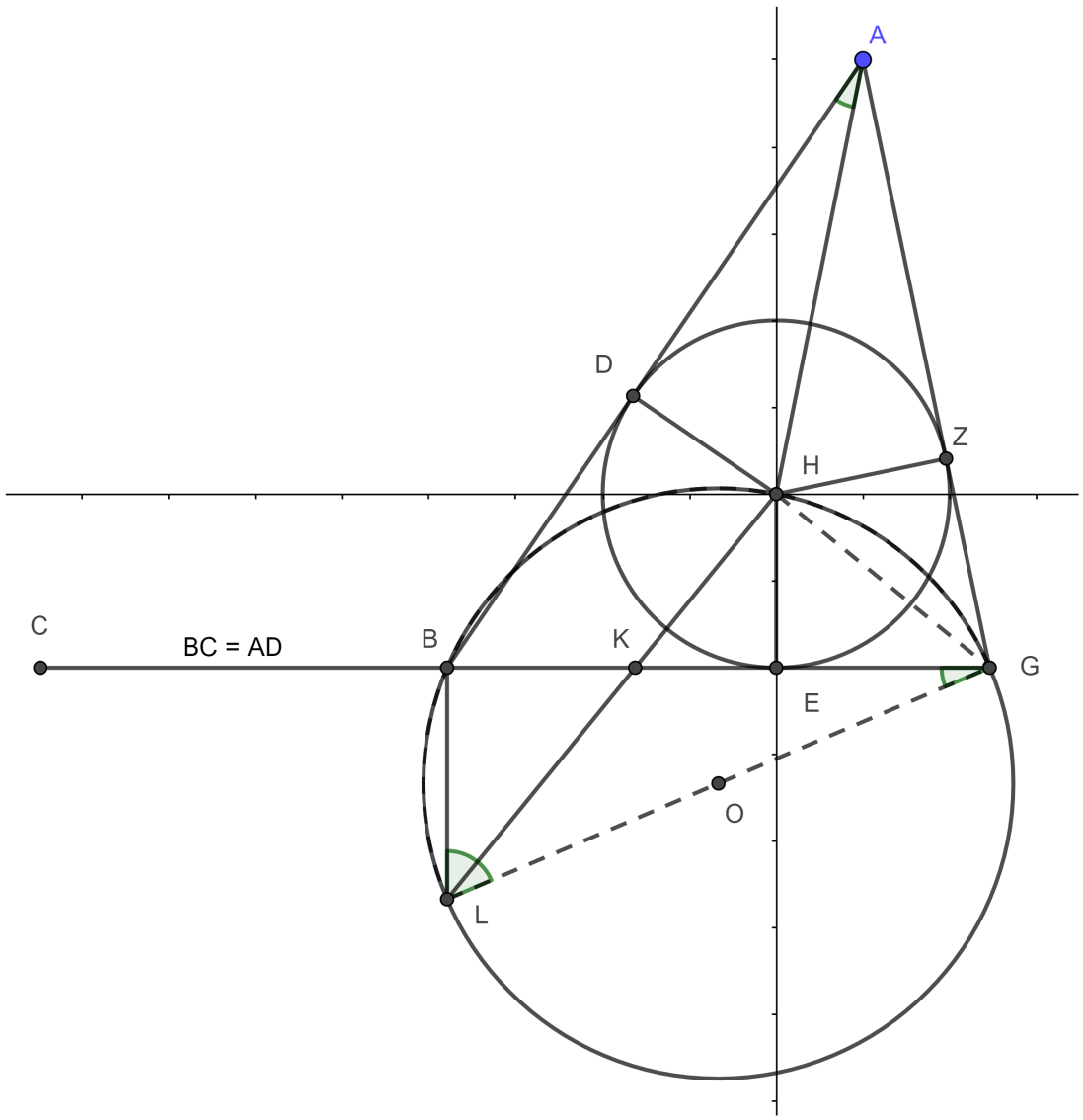
$$\frac{GC}{BC} = \frac{BE}{KE}, \quad \frac{\overline{GC}^2}{GC.BC} = \frac{GE.BE}{GE.BK} = \frac{GE}{\overline{HE}^2},$$

donc

$$\overline{HE}^2.\overline{GC}^2 = GC.BC.GE.BE.$$

Or GC est la moitié du périmètre, BC la moitié du périmètre moins BG, GE la moitié du périmètre moins AB, BE la moitié du périmètre moins AG; mais HE.GC est le *double* de l'aire du triangle. Donc, etc.

Le texte ne comportait pas de figure. La figure suivante, correspond à sa description.



Les ligne 3, 4 indiquent que GC est la moitié du périmètre : En effet $GC=GE+EB+AD$. Or le périmètre est égal à :

$$2p=GE+EB+BD+DA+AZ+ZG=GE+EB+EB+AD+AD+GE=2GC$$

d'où la valeur du demi-périmètre p :

$$p=GE+EB+AD=GC$$

Exploitons cette égalité. Posons $AB=c$, $BG=a$ et $GA=b$. La relation permet d'écrire :

$p=GB+AD=GB+BC=a+BC$ d'où : $\boxed{BC=AD=AZ=p-a}$

$p=GE+BD+AD=GE+c$ d'où : $\boxed{GE=GZ=p-c}$

$p=GE+EB+AD=GZ+EB+AZ=AG+EB=b+EB$ d'où : $\boxed{BE=BD=p-b}$

Les lignes 4 et 5 indiquent que $HE.GC=2S$ ou S est l'aire du triangle ABC . En effet on a : $HE.GC=HE(GE+EB+BC)$ or $HE.GE$ est l'aire du quadrilatère $HEGZ$ double de celle du triangle HEG , ensuite $HE.EB$ est l'aire du quadrilatère $HEBD$ et finalement $HE.BC=HE.AD$ est l'aire du quadrilatère $ADHZ$. La somme des aires de ces 3 quadrilatères est l'aire du triangle. Il y a donc une erreur dans le texte. La vrai relation est :

$$HE.GC=S$$

En appelant $r=HE=HZ=HD$ le rayon du cercle inscrit, cette relation s'écrit :

$$\boxed{S=p.r}$$

Les lignes 8,9 indiquent que les 4 points *G, H, B, L* sont une une même circonférence. Je ne connaissait pas ce théorème. Il est évident que le cercle circonscrit aux points G, B, et L a pour diamètre GL. Ce cercle coupe la bissectrice AH en H'. Le triangle GH'L est rectangle en H'. Mais je ne connais pas de théorème qui énonce que H' et H sont confondus. J'en donne une démonstration dans un chapitre suivant sous forme de préliminaire à la formule de Héron. Dans ce qui suit le résultat est tenu pour acquis.

La première identité de la ligne 12 provient de la similitude des triangles GBL et ADH. qui sont équiangles d'après le texte. Mais cela n'a rien d'évident. Nous le démontrons dans le chapitre annexe qui suit l'analyse de cette démonstration. Cette démonstration préliminaire établit d'abord que la droite AD passe par le centre du cercle de diamètre GL, et ensuite que les angles des triangles *GBL* et *ADH* sont égaux d'où la première des 2 identités $\frac{GB}{BL}=\frac{AD}{DH}=\frac{BC}{HE}$. La deuxième est évidente car $AD=BC$ par construction et $DH=HE$ car ce sont 2 rayons du cercle inscrit au triangle ABG.

La première égalité de la deuxième partie de la ligne 12 : la relation provient de l'identité des rapports extrêmes précédents en permutant BL et BC. Ensuite, il y a une coquille d'imprimerie. Il faut mettre KE à la place de KG en bas du dernier rapport. Cette relation s'obtient en utilisant les rapport d'homothétie dans les triangles KBL et KHE qui sont opposés par le sommet avec un angle à la base droit.

La ligne 13 est obtenue à partir de la relation précédente en ajoutant 1 à chaque coté de l'égalité.

Cela conduit à la première égalité de la ligne 15.

La seconde égalité de cette ligne est obtenue en multipliant chaque membre de la relation précédente par un rapport unité. On constate une coquille d'imprimerie dans le texte, où BK est utilisé à la place de KE. Cette égalité devrait s'écrire :

$$\frac{\overline{GC}^2}{GC.BC}=\frac{GE.BE}{GE.KE}$$

La dernière égalité de cette ligne présente aussi une coquille d'imprimerie au numérateur du dernier élément. Pour établir cette dernière égalité, il faut considérer le triangle KHG qui est rectangle en *H*. Il en résulte que les triangles KEH et HEG sont semblables (angles égaux étant donné la complémentarité des angle $\widehat{KHE}$ et $\widehat{EHG}$. Ainsi on a $\frac{HE}{KE}=\frac{GE}{HE}$ qui implique $\overline{HE}^2=GE.KE$. Finalement on obtient :

$\frac{\overline{GC}^2}{GC.BC}=\frac{GE.BE}{GE.KE}=\frac{GE.BE}{\overline{HE}^2}$. L'égalité du produit des extrêmes et du produit des moyens fournit la dernière relation :

$$\overline{HE}^2.\overline{GC}^2=GC.BC.GE.BE$$

D'où, en utilisant les relations précédemment encadrées :

$$\boxed{S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p est le DEMI-PÉRIMÈTRE.

Cette formule s'écrit également :

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$
$$16S^2 = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2)$$
$$16S^2 = ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)$$
$$16S^2 = ((c+a)^2 - b^2)(b^2 - (c-a)^2)$$

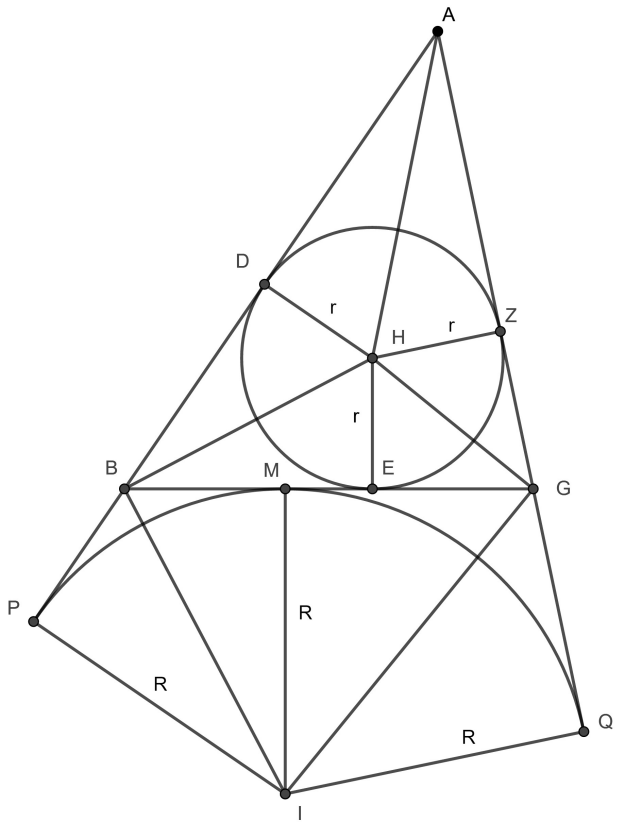
En développant, puis en factorisant une partie des termes, on obtient également les formes suivantes :

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$$
$$16S^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

3 Autres démonstrations

3.1 Avec le cercle exinscrit

Si, au lieu d'utiliser le cercle externe précédent qui est assez mal commode, on utilise le cercle exinscrit de sommet A, la démonstration précédente se simplifie légèrement.



L'égalité des longueurs des tangentes AP=AQ donne :

$$AP=AQ=\frac{1}{2}(AP+AQ)=\frac{1}{2}((AB+BM)+(AG+GM))=\frac{1}{2}(c+BM+c+GM)=\frac{1}{2}(a+b+c)=p$$

$$AP=AB+BP=AB+BM=p\Rightarrow BM=BP=p-c$$

$$AQ=AG+GQ=AG+GM=p\Rightarrow GM=GQ=p-b$$

En considérant les triangles symétriques intérieurs au cercle exinscrit, l'aire du triangle ABG s'écrit également, en notant l'aire d'un triangle de sommets U, V, W sous la forme $[UVW]$:

$$S=2[AIP]-2[BIM]-2[GIM]=2[AIP]-2[IBG]$$

En notant R le rayon du cercle exinscrit, on a $[AIP]=\frac{1}{2}AP.IP=\frac{1}{2}pR$ et $IBG=\frac{1}{2}aR$ d'où :

$S=(p-a)R$, qui multiplié par $S=pr$ donne $S^2=p(p-a)rR$.

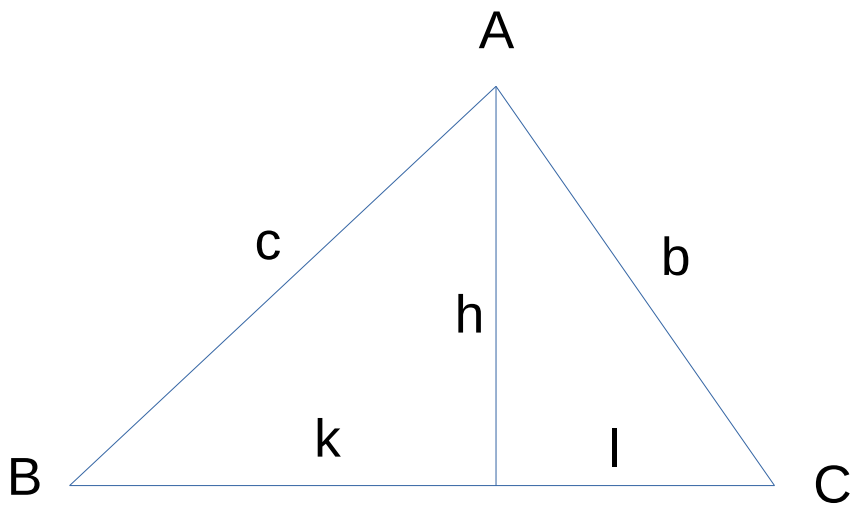
Les triangles rectangle BIM et HBE sont semblables (les bissectrices internes et externes étant orthogonales, on en déduit l'égalité des angles à la base par complémentarité). Il en résulte que :

$\frac{HE}{BE}=\frac{BM}{IM}$ soit en faisant le produit des extrêmes et moyens $rR=BE.BM=(p-c)(p-b)$

Finalement en reportant dans l'expression précédente de S^2 on retrouve :

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

3.2 Plus simple mais calculatoire



Dans le triangle quelconque ABC de cotés $a = BC$, $b = AC$ et $c = BA$, on trace la hauteur issue de A de longueur h qui sépare le segment BC en deux segments de longueurs k et l telles que :

$$k+l=a \qquad \text{(kla)}$$

Calcul de *k* et *l* : Le théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$k^2+h^2=c^2$$
$$l^2+h^2=b^2$$

Soustrayons ces 2 relations pour éliminer *h*, puis éliminons *l*. Il vient :

$$\begin{aligned} k^2-l^2 &= c^2-b^2 \\ k^2-(a-k)^2 &= c^2-b^2 \\ 2ak-a^2 &= c^2-b^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$k=\frac{c^2+a^2-b^2}{2a} \qquad \text{(keq)}$$

et en utilisant () :

$$l=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \qquad \text{(leq)}$$

Remarque : Nous utiliserons ces deux relations pour calculer les coordonnées des intersections de 2 cercles.

Calculons de la hauteur *h*. Il vient:

$$h^2=c^2-k^2$$
$$h^2=c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2$$
$$h^2=\left(c+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c-\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)$$
$$h^2=\frac{\left((c+a)^2-b^2\right)\left(b^2-(c-a)^2\right)}{4a^2}$$
$$h^2=\frac{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}{4a^2}$$

Or la surface du triangle est donnée par :

$$S=\frac{1}{2}ah$$

d'où la formule de Héron :

$$16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Remarque : Pour calculer *h*, il est aussi simple de faire :

$$h=\sqrt{c^2-k^2} \qquad \text{(heq)}$$

avec *k* tiré de (7).

4 Démonstration préliminaire au texte de l'annale

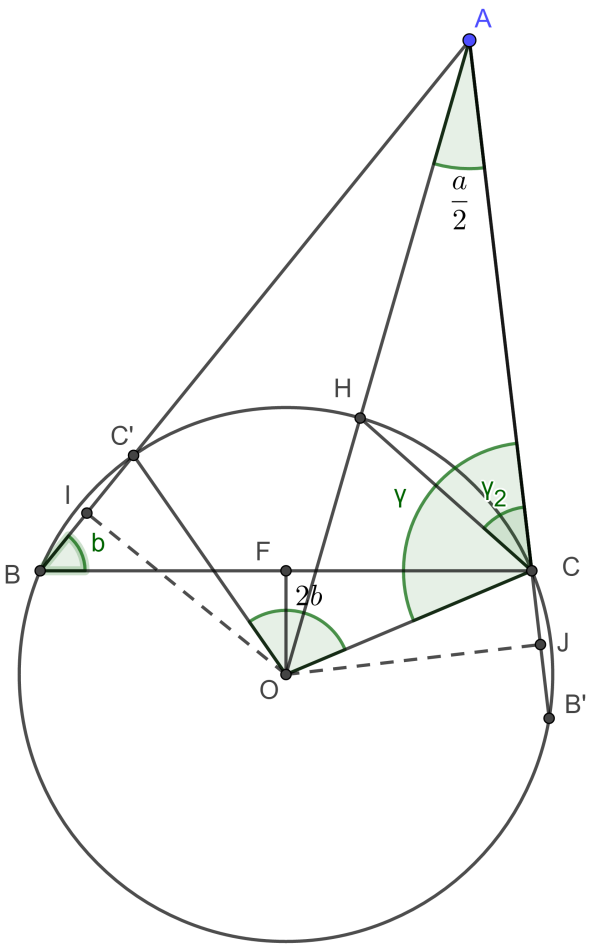
Le texte des *Nouvelles Annales de Mathématiques* prend pour évident que ***le cercle centré sur l'intersection de la bissectrice d'un angle au sommet d'un triangle et de la médiatrice de la base opposée à ce sommet, et passant par les 2 sommets extrémités de cette base, passe également par le centre du cercle inscrit au triangle.***

Je n'ai pas trouvé cette évidence. Elle existe peut-être. Voici le chemin que j'ai suivi pour démontrer cette affirmation.

Considérons un triangle ABC, et le point O intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et du segment opposé BC.

Traçons le cercle de centre O passant par B et C. Il coupe la médiatrice en H.

Montrons que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.



La droite AB coupe le cercle de centre O en B et C' et la droite AC le coupe en C et B'.

Le point O étant sur la bissectrice de les longueurs des segments OI et OJ reliant O aux pieds des perpendiculaires abaissées sur AB et AC sont égales : OI = OJ.

Les triangles rectangles OIC' et OJC qui ont les hypoténuses égales et un autre coté égal, sont égaux. Il en résulte que C et C' sont symétriques par rapport à OA.

L'angle au centre $\widehat{C'OC}$ qui intercepte l'arc $C'C$ est le double de l'angle $\widehat{C'BC}=b$ qui intercepte le même arc, d'où $\widehat{HOC}=b$

Dans le triangle isocèle HOC, on a $2\widehat{OCH}+b=pi$ d'où $\widehat{OCH}=\frac{pi-b}{2}$.

Dans le triangle AOC, on a est égal à.

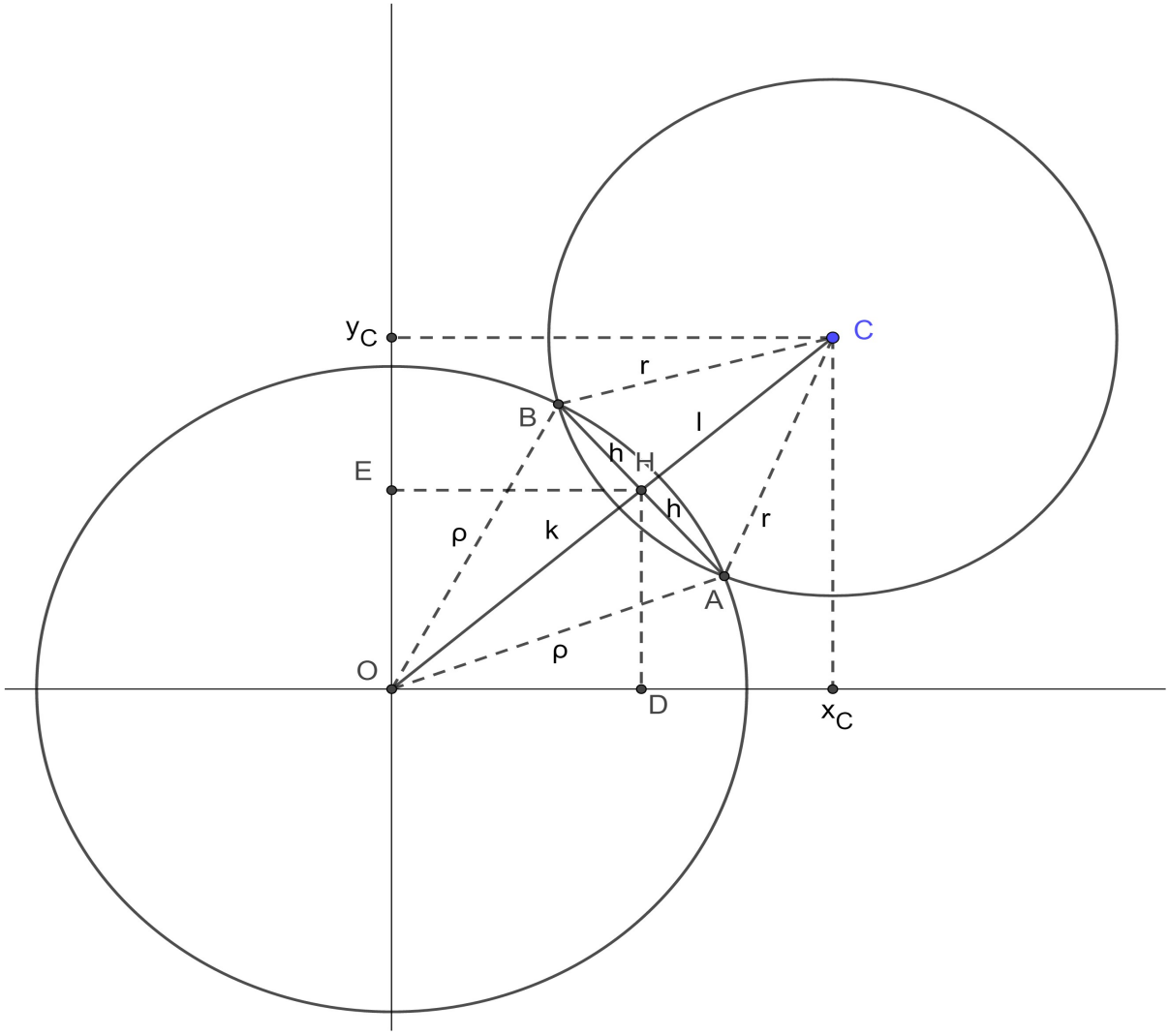
Il en résulte que l'angle $y_2=\widehat{HCA}=\widehat{OCA}-\widehat{OCH}=(\pi-b-\frac{a}{2})-\frac{\pi-b}{2}=\frac{\pi-a-b}{2}$

Or en notant $c=\widehat{ACB}$ on a $\pi=a+b+c$ d'où $y_2=\frac{c}{2}$.

Il en résulte que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$. H est donc le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

5 Intersection de 2 cercles

Soit à calculer les coordonnées cartésiennes des points d''intersection de deux cercles. J'associe ce problème à la formule de Héron, car il utilise des relations qui interviennent dans la démonstration de la formule de Héron.



Considérons un cercle de centre O origine des coordonnées, et de rayon ρ et un deuxième cercle de centre C de coordonnées x_C, y_C et de rayon r . Ces deux cercles ont pour intersection les points AB.

5.1 Résolution géométrique

Notons H le point de concours des segments orthogonaux OC et AB.

Les formules (7), (7) et (7) s'écrivent ici :

$$k=\frac{d^2+\rho^2-r^2}{2d}$$
$$l=\frac{r^2+d^2-\rho^2}{2d} \quad = \quad d-k$$
$$h=\sqrt{\rho^2-k^2}=\sqrt{(r^2-l^2)}$$

Les solutions n'existent que si $h^2\geq 0$ ce qui suppose $d<\rho+r$, $r\leq\rho+d$ et $\rho<r+d$.

Notons $\vec{u}$ le vecteur unitaire de cosinus directeurs $(\frac{x_C}{d},\frac{y_C}{d})$ et $\vec{v}$ le vecteur unitaire orthogonal à (tourné de dans le sens trigonométrique) de cosinus directeurs $(\frac{-y_C}{d},\frac{x_c}{d})$. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont donnés par :

$$\overrightarrow{OA}=k\vec{u}-h\vec{v}$$
$$\overrightarrow{OB}=k\vec{u}+h\vec{v}$$

Il en résulte que :

$$x_A=k\frac{x_C}{d}+h\frac{y_c}{d}$$
$$y_A=k\frac{y_C}{d}-h\frac{x_c}{d}$$

et :

$$x_B=k\frac{x_C}{d}-h\frac{y_C}{d}$$
$$y_B=k\frac{y_C}{d}+h\frac{x_C}{d}$$

5.2 Résolution analytique

Soient (x,y) les coordonnées d'un des 2 points d'intersection.
Il vient :

$$x^2+y^2=\rho^2$$
$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$$

En soustrayant ces deux équations on obtient :

$$2x\,x_C \;+\; 2y\,y_C=\rho^2-r^2+d^2 \quad \text{avec} \quad d^2=\|\mathrm{O}\Omega\|^2=x_C^2+y_C^2 \quad .$$

On porte :

$$y=\frac{\rho^2+d^2-r^2-2x_C\,x}{2y_C}$$

dans la première équation. On obtient :

$$x^2+\left(\frac{\rho^2+d^2-r^2-2x_C x}{2y_C}\right)^2=\rho^2$$

c'est-à-dire l'équation du deuxième degré $Ax^2+Bx+C=0$ avec :

$$A=1+\frac{x_C^2}{y_C^2} = \frac{d^2}{y_C^2}$$
$$B=-\frac{x_C(\rho^2+d^2-r^2)}{y_C^2}$$
$$C=\frac{(\rho^2+d^2-r^2)^2}{4y_C^2}-\rho^2$$

Les solutions sont données par : $x=\frac{-B}{2A}\pm\Delta$ avec

$$\frac{-B}{2A}=\frac{x_c(\rho^2+d^2-r^2)}{2d^2}$$
$$\Delta=\frac{y_C}{2d^2}\sqrt{((\rho+r)^2-d^2)(d^2-(\rho-r)^2)}=\frac{y_C}{2d^2}\sqrt{(\rho+r+d)(\rho+r-d)(d+\rho-r)(d-\rho+r)}$$

(remarquer la formule de Héron) d'où en utilisant les valeurs de k et h définies en (Erreur : source de la référence non trouvée) et (Erreur : source de la référence non trouvée) :

$$x_{A,B}=k\frac{x_c}{d}\pm h\frac{y_c}{d}$$

Si au lieu d'éliminer *y*, on avait éliminé *x*, on aurait obtenu la même équation du deuxième degré en substituant *x* et *y*.

$$y_{A,B}=k\frac{y_c}{d}\mp h\frac{x_c}{d}$$

L'inversion des signes devant *h* provient de l'examen de la solution géométrique. Pour lever le doute dans cette solution analytique, il faut vérifier que le point généré vérifie bien $x^2+y^2=\rho^2$.