# Mémo sur la parabolisation d'un miroir de télescope

MLL - QFASTRO - SAP

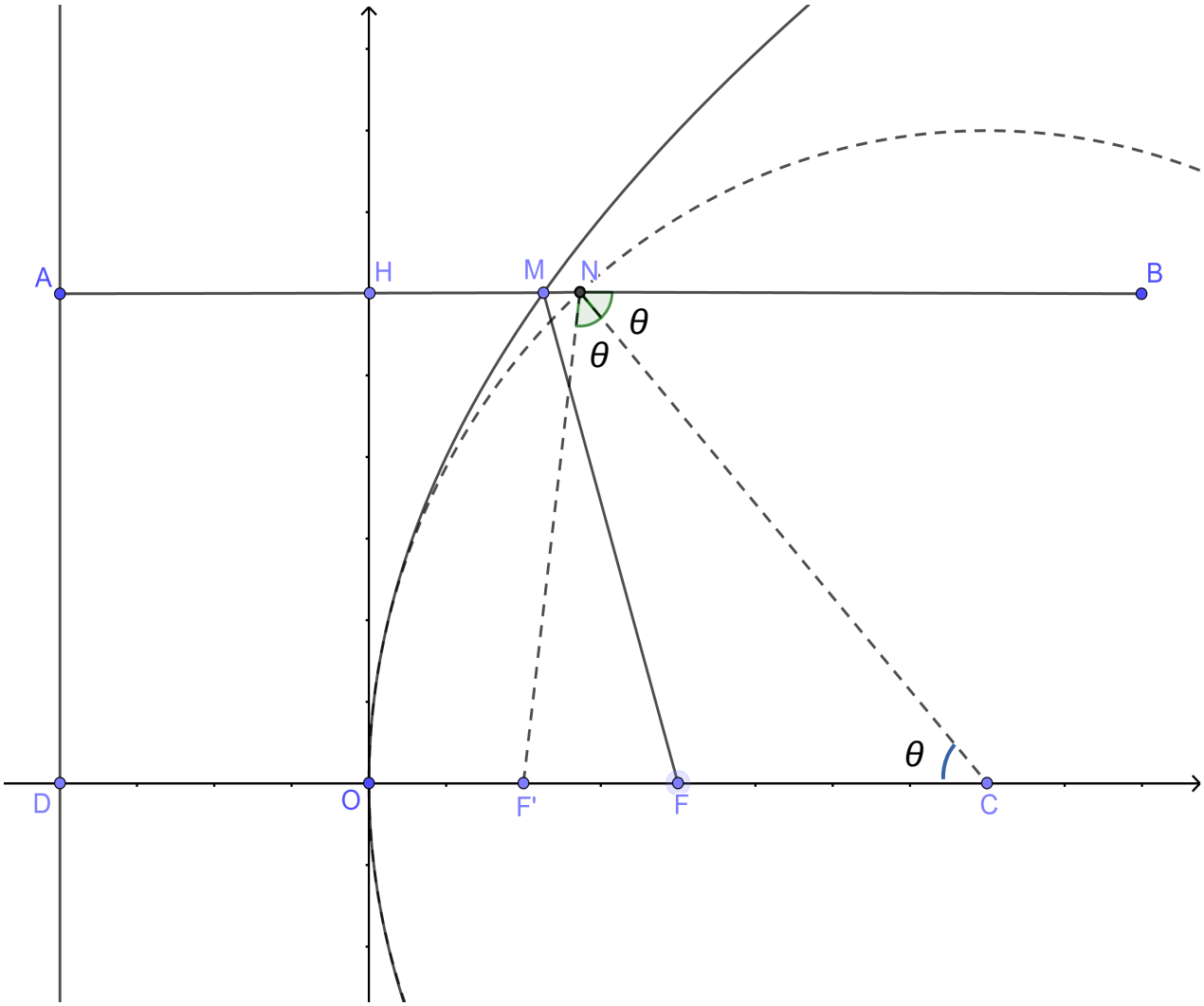
## Table des matières

1 Introduction....2
2 Courbure de la parabole....2
3 Aberration sphérique....3
4 Écart entre cercle et parabole à une ordonnée donnée....4
5 Image d'un point située au centre axial de courbure de la parabole....5
5.1 Modélisation....5
5.2 Exploitation....7
5.3 Analyse de Texereau....9
5.4 Mesures attendues....10
5.5 Masque de Texereau page 72 du livre....11
5.6 Décalage axial de la source....11

# 1 Introduction

La lecture du chapitre 2 du livre de Texereau sur la construction des télescopes m'a incité a écrire ce petit mémo qui contient les démonstrations des formules qui y sont utilisées. En fait seules les formules du chapitre 5 de ce mémo sont utiles, mais je ne m'en suis rendu compte qu'après coup. Je laisse donc les chapitres 2, 3 et 4 qui présentent des formules qui décrivent les formes comparées de la parabole et de cercle (qui sont les section planes longitudinales des optiques en forme de portion de paraboloïde ou de sphère, deux noms que je ne mentionnerais plus dans ce qui suit, me limitant à ce qui se passe dans un plan).

# 2 Courbure de la parabole




La parabole d'équation $y^2=2rx$ passe par l'origine O et a pour directrice la droite verticale au point D d'abscisse -r/2 et de foyer F situé à l'abscisse $f=\frac{r}{2}$ . Les 2 écritures pratiques de l'équation sont :

$$\boxed{y^2=2rx} \quad \text{ou} \quad \boxed{y^2=4fx}$$

Un point M de la parabole est équidistant de la directrice et du foyer :

AM = MF

Calculons le rayon de courbure de la parabole en un point quelconque M de coordonnées $(x, y)$ .

Par définition le rayon de courbure R est donné par $ds = R\,d\alpha$ où $ds$ est la variation de longueur définie par $ds^2 = dx^2 + dy^2$ et $d\alpha$ est la variation de l'angle de la pente de la tangente à la courbe.

En différenciant l'équation, on obtient $2\,y\,dy = 2r\,dx$ d'où $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{y} = \tan\alpha$ où $\alpha$ est l'angle de la pente de la tangente au point M. Différencions cette relation. Il vient :

$$d(\tan\alpha) = (1 + \tan^2\alpha)\,d\alpha = d\left(\frac{r}{y}\right) = -\frac{r}{y^2}\,dy$$

Soit :

$$\left(1 + \frac{r^2}{y^2}\right) d\alpha = -\frac{r}{y^2}\,dy$$

d'où :

$$d\alpha = -r\frac{dy}{r^2 + y^2} = -\frac{1}{r}\frac{dy}{\left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)}$$

Par ailleurs :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right) dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)}\,dy$$

D'où la relation qui donne le rayon de courbure de la parabole (en omettant son signe) :

$$\boxed{R = \frac{ds}{d\alpha} = r\left(1 + \frac{y^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

Pour y = 0, on trouve bien que le rayon de courbure vaut *r*.

Si on fait un développement limité de ce rayon de courbure au voisinage de *y* = 0, on obtient :

$$\boxed{R = r\left(1 + \frac{3}{2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{3}{8}\frac{y^4}{r^4} + \ldots\right)} \qquad (2)$$

# 3 Aberration sphérique

Examinons maintenant les images d'un point lumineux situé à l'infini dans la direction de l'axe des x, données par le miroir sphérique osculateur à la parabole en O.

Le cercle de centre C sur l'axe des *x* et de rayon *r*, osculateur à la parabole en *y*=0 à pour équation :

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

Les rayons incidents parallèles à Ox qui atteignent le miroir sphérique au voisinage du point au O convergent en F, d'abscisse $r/2$, foyer de la parabole. Mais si on s'éloigne du voisinage de O, le point de convergence se fait de plus en plus près de la sphère, c'est l'aberration sphérique.

Considérons un rayon BA parallèle à l'axe des $x$, venant de l'infini. Il est réfléchi par le miroir en N, selon la direction NF', telle que car CN est orthogonal au miroir en N.

Notons $\theta = \widehat{OCN}$ . L'ordonnée de N vaut $y = r \sin\theta$ .

Comme (les 2 premiers sont alternes-internes et les 2 derniers sont réfléchi-incident), le triangle NCF' est isocèle d'où .

Par ailleurs, l'abscisse de N vaut $x = r(1-\cos\theta)$ .

D'où : $OF' = r(1-\cos\theta) + NF' \cos 2\theta$ (dans le cas de la figure $2\theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2\theta < 0$ )

Or dans le triangle isocèle NCF', on a $NF' \cos\theta = r/2$ d'où

$$OF' = r(1-\cos\theta) + r\frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta} = r\left(1-\frac{1}{2\cos\theta}\right)$$

Soit :

$$\boxed{OF' = r\left(1-\frac{1}{2\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{r^2}\right)}}\right)} \tag{3}$$

Quand $y = 0$, on retrouve bien OF' = $r/2$ .

En faisant un développement limité au voisinage de $y = 0$, on trouve :

$$\boxed{OF' \simeq \frac{r}{2}\left(1-\frac{y^2}{2r^2}-\frac{3}{8}\frac{y^4}{r^4}+\ldots\right)} \tag{4}$$

# 4 Écart entre cercle et parabole à une ordonnée donnée

A l'ordonnée $y$, on a :

$$x_c = r - \sqrt{(r^2-y^2)}$$
$$x_p = \frac{y^2}{2r}$$
$$\Delta x = x_c - x_p = r - \sqrt{(r^2-y^2)} - \frac{y^2}{2r}$$

Un développement limité autour de $y = 0$ fournit :

$$\boxed{\Delta x \simeq \frac{y^4}{8r^3} = \frac{y^4}{64 f^3}}$$

Si on considère un miroir de diamètre $d = 2\,y$, l'écart au bord vaut : $\Delta x = \frac{d^4}{4f^3}$

Supposons que $f$ ne soit pas égal à $r/2$. Le calcul devient :

$$x_c = r - \sqrt{(r^2 - y^2)}$$
$$x_p = \frac{y^2}{4f}$$
$$\Delta x = x_c - x_p = r - \sqrt{(r^2 - y^2)} - \frac{y^2}{4f}$$

Posons $\boxed{r = 2f + \varepsilon}$ . Effectuons un développement limité. Il vient :

$$\Delta x \simeq r - r\left(1 - \frac{y^2}{2r^2} - \frac{y^4}{8r^4}\right) - \frac{y^2}{2(r-\varepsilon)} \simeq \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^2}{2r^2}\varepsilon - \frac{y^2}{2r^3}\varepsilon^2$$

que l'on minimisera en annulant les 2 premiers termes avec :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{y^2}{4r} \simeq \frac{y^2}{8f}}$$

Avec $y = d/2$ , une bonne approximation du miroir parabolique de diamètre $d$ sera obtenu par le miroir sphérique de rayon :

$$\rho = 2f + \frac{d^2}{32f}$$

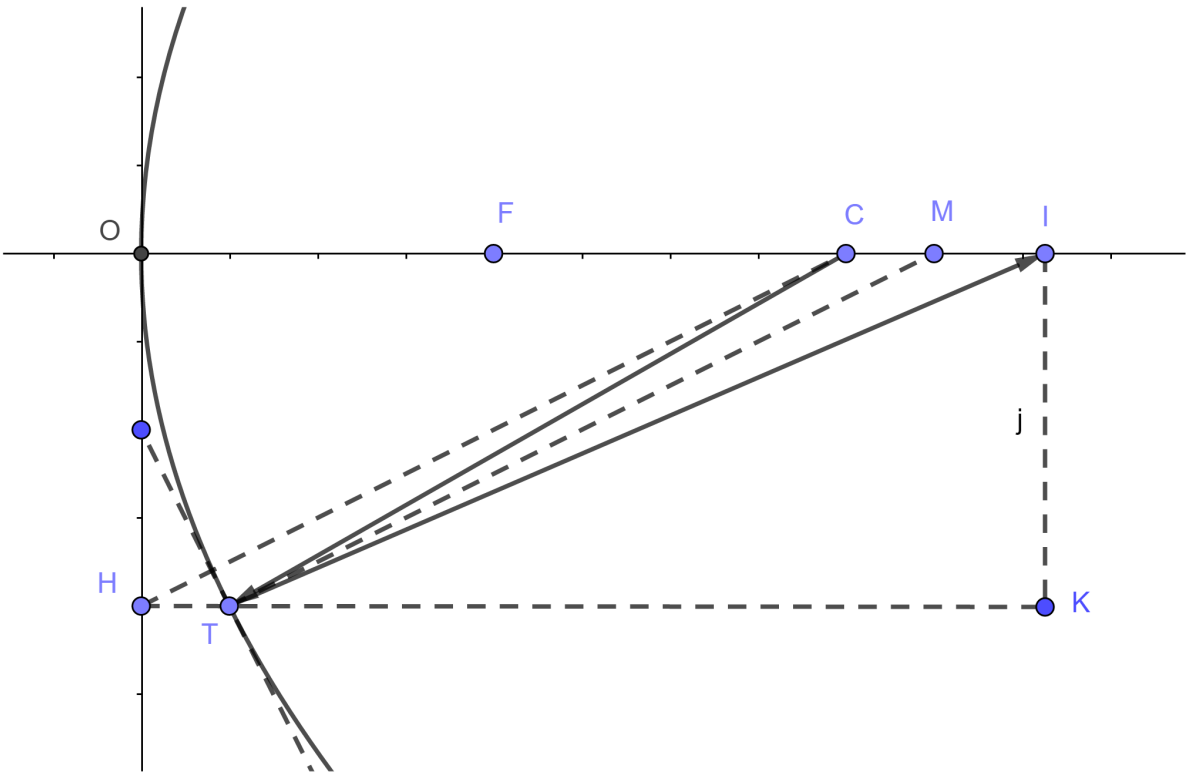
Mais la focale dans l'axe sera supérieure à $f$ de la quantité $\frac{d^2}{64f}$ mais ensuite elle diminue en $y^2/4r$ c'est-à-dire en $y^2/8f$, ce qui fait que la focale du miroir sphérique va encadrer celle du miroir parabolique.

# 5 Image d'un point située au centre axial de courbure de la parabole

La procédure de parabolisation décrite dans le chapitre 2 du livre de Texereau est basée sur la mesure de la position de cette image.

## 5.1 Modélisation

Dans le cas du cercle, l'image est le centre du cercle lui-même, Dans le cas de la parabole, si la source est au centre de courbure du cercle osculateur en O, l'abscisse de la convergence des rayons dépend (dans le cas de notre coupe) de l'ordonnée y.




Le rayon incident CT est réfléchi selon TI, symétrique de TM qui est orthogonal à la tangente en T à la parabole.

Soit $\left(x=\frac{y^2}{2}r,-y\right)$ les coordonnées du point T.

Notons H le point des l'axe des ordonnées, d'ordonnée -y.

Comme , la tangente est orthogonale à la direction en ce point. Elle coupe donc l'axe des *x* au point M d'abscisse *x*+*r*, c'est-à-dire $x_M=r+\frac{y^2}{2r}$ .

Le rayon réfléchi TI, à sa direction symétrique de la direction TC par rapport à la direction TI.

Nous cherchons la distance $\mathrm{OI}=\mathrm{HK}=\mathrm{HT}+\mathrm{TK}=x+\mathrm{TK}=\frac{y^2}{2r}+\mathrm{IK}/\tan\gamma=\frac{y^2}{2r}+\frac{y}{\tan\gamma}$ avec $\gamma=\widehat{ITK}$ .

Notons $\theta=\widehat{CTK}$ . On a $\tan\theta=\frac{y}{r-x}=\frac{2ry}{2r^2-y^2}$ .

Notons $\alpha=\widehat{MTK}$ . On a $\tan\alpha=\frac{y}{r}$

Notons $\beta=\widehat{CTM}=\theta-\alpha$ .

L'angle recherché s'écrit :

$$\gamma=\widehat{ITK}=\widehat{MTK}-\widehat{MTI}=\widehat{MTK}-\widehat{CTM}=\alpha-\beta=2\alpha-\theta \quad ,$$

D'où :

$$\tan\gamma \;=\; \tan(2\alpha-\theta) \;=\; \frac{\tan 2\alpha-\tan\theta}{1+\tan 2\alpha\tan\theta}$$

avec $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{\frac{2y}{r}}{1-\frac{y^2}{r^2}} = \dfrac{2ry}{r^2-y^2}$

et $\tan\theta = \dfrac{2ry}{2r^2-y^2}$

D'où :

$$\tan\gamma = \frac{\frac{2ry}{r^2-y^2} - \frac{2ry}{2r^2-y^2}}{1+\frac{2ry}{r^2-y^2}\frac{2ry}{2r^2-y^2}} = \frac{2r^3y}{2r^4+r^2y^2+y^4}$$

Il vient :

$$\mathrm{OI} = \frac{y^2}{2r} + \frac{y}{\tan\gamma} = \frac{y^2}{2r} + \frac{(2r^4+r^2y^2+y^4)}{2r^3} = r + \frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3}$$

Finalement :

$$\mathrm{OI} = r + \frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3}$$

Remarque : A partir de $\mathrm{OM} = r + \dfrac{y^2}{2r} = r + x$ il vient :

$$\mathrm{OI} = \mathrm{OM} + \frac{y^2}{2r} + \frac{y^4}{2r^3} = \mathrm{OM} + x\left(\frac{r^2+y^2}{r^2}\right)$$

La simplicité de cette relation laisse entrevoir une interprétation géométrique que je n'ai pas trouvée.

Ainsi, l'image I de la source placée au centre C du cercle osculateur en O à la parabole s'écarte du centre C de la quantité $\dfrac{y^2}{r} + \dfrac{y^4}{2r^3} = \dfrac{y^2}{r}\left(1+0.5\dfrac{y^2}{r^2}\right)$ .

Généralement on peut négliger le terme . En effet pour un télescope Newton, de diamètre D et d'ouverture F/D = 6, on a $y/r \leqslant \dfrac{D/2}{2F} = 1/24 \Rightarrow \dfrac{y^2}{2r^2} < 1/1152 \ll 1$ , d'où :

$$\boxed{OI \simeq r + \frac{y^2}{r}}$$

## 5.2 Exploitation

C'est l'exploitation de cette formule que fait la méthode décrite par Texereau.
Une source lumineuse ponctuelle est placée sur l'axe des x, et on cherche pour les différentes couronnes d'ordonnée *y* le point I où se fait la convergence des rayons issus de cette couronne, ce qui permet de relever la courbe des abscisses des points I et de la comparer à cette valeur théorique.

Dans le cas d'un miroir de diamètre D = 200 mm et de rayon de courbure r = 2800 mm OI varie entre 2800 mm et mm.

Pour effectuer *n* (4 par exemple) mesures par rayon, celui-ci est divisé en *n* couples d'intervalles de largeurs inégales (plus étroits vers l'extérieur), et les mesures sont faites aux milieux de ces *n* couples d'intervalles. Les carrés des rayons des bornes des intervalles sont choisis en progression arithmétique. Soit $\rho$ cette raison. L'intervalle central est juxtaposé à son symétrique. Sa largeur totale est égale à $\rho$. Son bord atteint donc $\rho/2$. S'il y a $n-1$ autres couples d'intervalles, le carré du rayon externe est divisé par $n-1+\frac{1}{2}=n-\frac{1}{2}$ Ainsi avec D = 100 mm, la raison vaut :

$$\rho=\frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}=\frac{100^2}{3.5}=2857$$

Le premier intervalle est à $h_1=\sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)}=37.8$

Le deuxième est à $h_2=\sqrt{(1.5\rho)}=65.5$

Le troisième est à $h_3=\sqrt{(2.5\rho)}=84.5$

La borne du dernier intervalle est bien sûr à D/2 = 100.

Le rayon attribué à chaque intervalle est la moyenne de ses bornes, en prenant 0 pour borne du 1er intervalle. On obtient ainsi les rayons suivants :

$$\begin{aligned} y_1&=h_1/2=18.9\\ y_2&=(h_1+h_2)/2=51.6\\ y_3&=(h2+h3)/2=75\\ y_4&=(h3+h4)/2=92.3 \end{aligned}$$

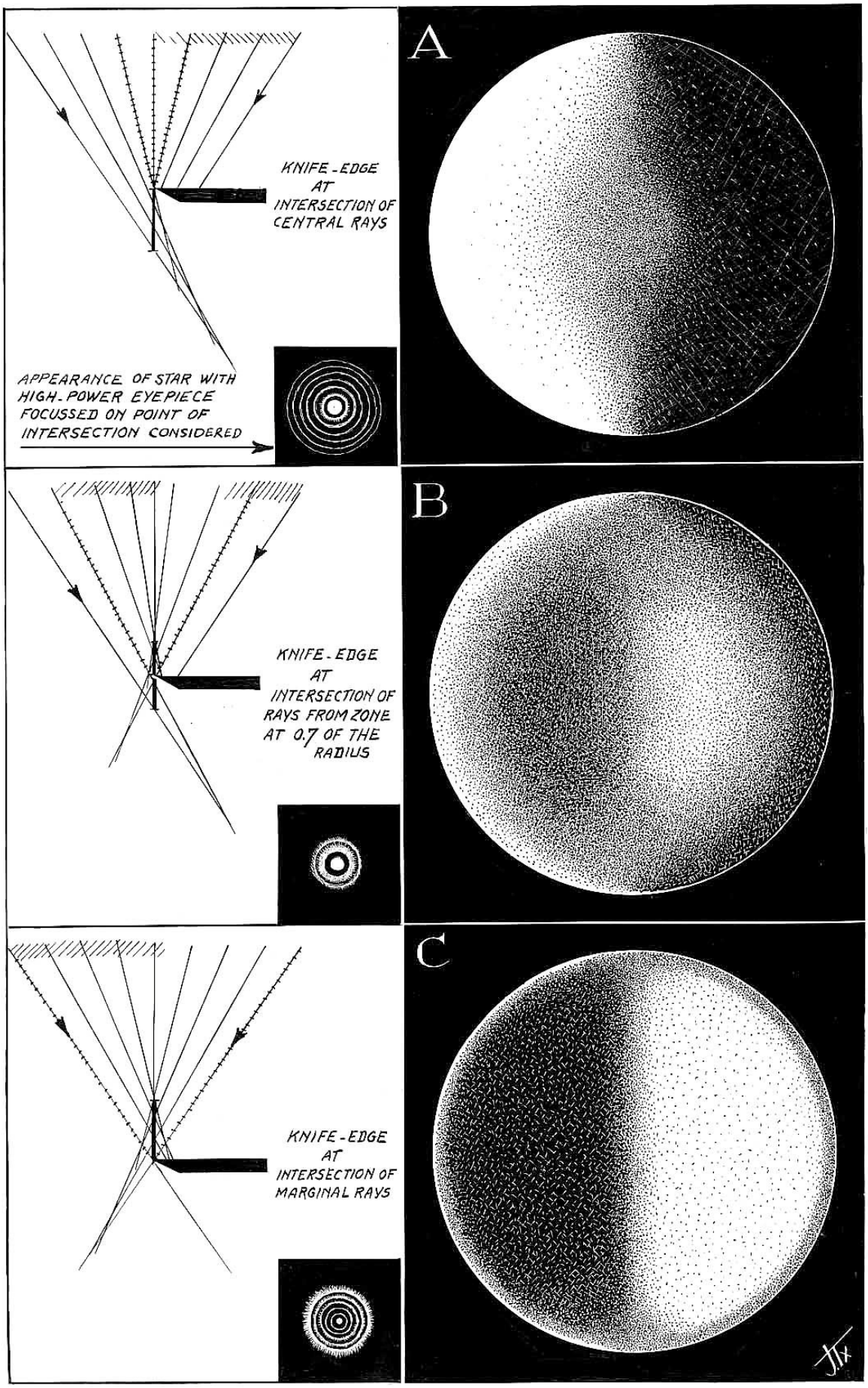
Mais A. Couder suggère de prendre la racine carrée de la moyenne des carrés :

$$\begin{aligned} y_1&=\sqrt{(h_1^2/2)}=26.7\\ y_2&=(h_1+h_2)/2=53.4\\ y_3&=(h2+h3)/2=75.6\\ y_4&=(h3+h4)/2=92.6 \end{aligned}$$

ce qui revient à faire :

$$\begin{aligned} y_1&=\sqrt{(\rho/4)}=26.7\\ y_2&=\sqrt{(\rho)}=53.4\\ y_3&=\sqrt{(2\rho)}=75.6\\ y_4&=\sqrt{(3\rho)}=92.6 \end{aligned}$$

## 5.3 Analyse de Texereau



On examine l'image d'une source placée derrière une fente à la distance $r$ du miroir, presque dans l'axe du miroir, mais pas exactement de manière qu'on puisse accéder en vision oculaire au rayon réfléchi par le centre du miroir.

On place un couteau au niveau de ce rayon réfléchi par le centre, en tâtonnant. On doit couper la moitié des rayons réfléchis. Quand on est pas assez enfoncé (latéralement) on laisse passer trop de lumière, et quand on est trop enfoncé, on n'en laisse pas passer assez.

Puis en avançant et reculant le couteau, on cherche la position du point de convergence I des rayons, en fonction du rayon $y$ de la couronne étudiée.

Considérons le centre ($y$ nul ou faible) . On cherche, en avançant et reculant le support du couteau, le point I de convergence des rayons centraux. Les rayons non centraux qui arrivent du coté du couteau sont coupés, puisqu'ils convergent derrière. La partie coté couteau est donc obscure, et l'autre est brillante.

En reculant à peine à partir de cette position on va attendre une position $x_1$ où la paire de zones centrales de rayons $y_1$ reçoit la même quantité de lumière que le centre et présente un même niveau de gris, car la partie coté couteau reçoit un peu de lumière provenant du coté opposé qui auparavant atteignait le coté opposé au couteau.

En reculant encore, le coté couteau reçoit encore plus de lumière en provenance du coté opposé (qui en reçoit moins dans sa partie centrale qui commence à s'obscurcir. Ainsi, la partie centrale est plus éclairée coté couteau et légèrement plus sombre coté opposé. Lorsqu'au niveau de la couronne suivante de rayon $y_2$ l'intensité lumineuse s'équilibre, on a atteint la position $x_2$.

Et on continue à reculer en position $x_3$ pour équilibrer les intensités des zones de rayon $y_3$, puis la dernière position $x_4$ pour équilibre l'intensité des zones de rayon $y_4$.

## 5.4 Mesures attendues

Donnons les valeurs attendues pour des positions $x_i$ pour les rayons $y_i$ . A la constante r près, elle vaut $\frac{y_i^2}{r}$ d'où les tableaux :

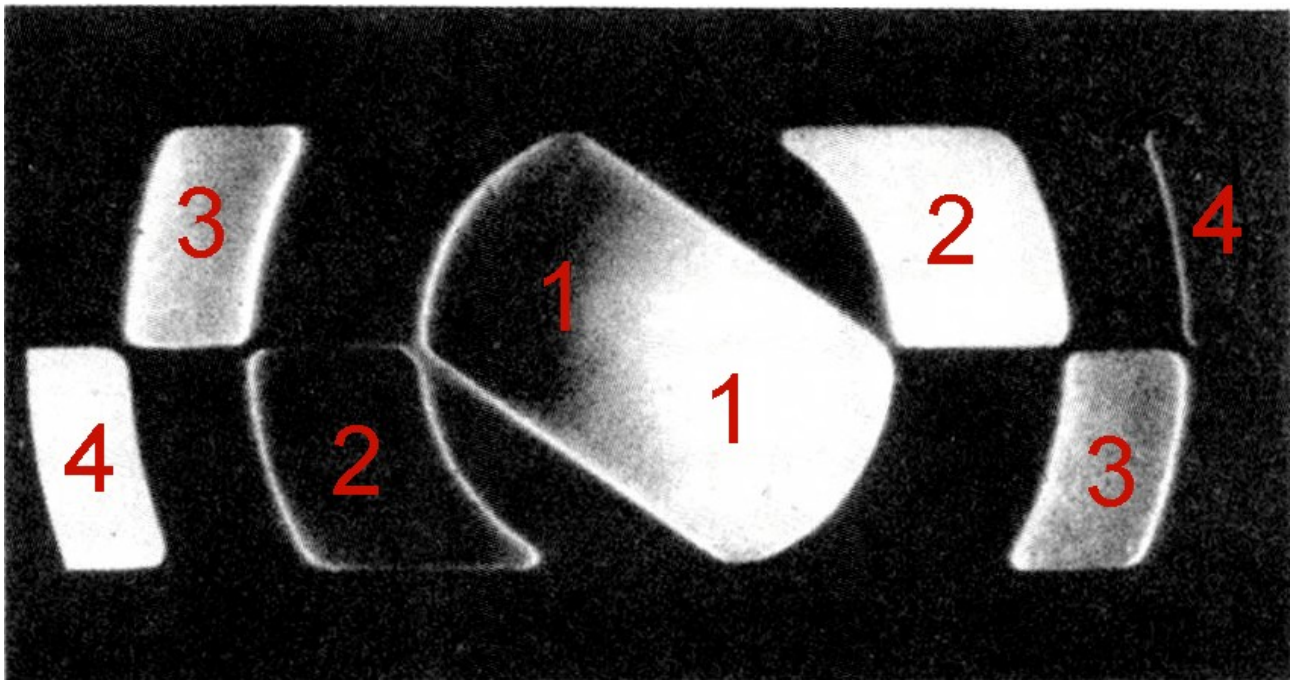
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 18.9 | 51.6 | 75 | 92.3 |
| $x_i$ | 0.13 | 0.95 | 2.0 | 3.04 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 26.7 | 53.4 | 75.6 | 92.6 |
| $x_i$ | 0.25 | 1.02 | 2.04 | 3.06 |

On voit que pour un même masque, suivant que l'on considère les valeurs moyennes de Texereau ou de Couder, on a pour les mesures centrales des valeurs attendues relativement différentes. Ma préférence irait plutôt aux valeurs de Couder, car elles correspondent à l'inversion de la formule du calcul du $x_i$.
De plus pour bien préciser la correspondance entre $y_1$ et $x_1$ on pourrait faire une vrai paire centrale en séparant sa fenêtre en deux.

## 5.5 Masque de Texereau page 72 du livre

Foucaultgramme d'un miroir standard.




Sur cette figure la zone centrale est la zone 1. Les deux demi-zones 1 sont juxtaposées et forment une seule zone, très éclairée à droite et peu éclairés à gauche. En supposant que le couteau cache la partie droite du faisceau, il est donc très en arrière centre du cercle osculateur axial à proximité duquel se trouve l'image des rayons issus de cette zone.

Ceci est également vrai pour les zones 2. Le couteau est donc en arrière de l'image des rayons émis par la deuxième couronne.

Les zones 3 ont approximativement le même éclairement moyen Les rayons issus de cette 3ème couronne convergent donc au voisinage du couteau.

Les zones 4 sont éclairées à gauche et sombre à droite. Le couteau est donc en avant du point de convergence des rayons issus de cette zone.

Finalement, le couteau est à la distance $x_3$ du miroir.

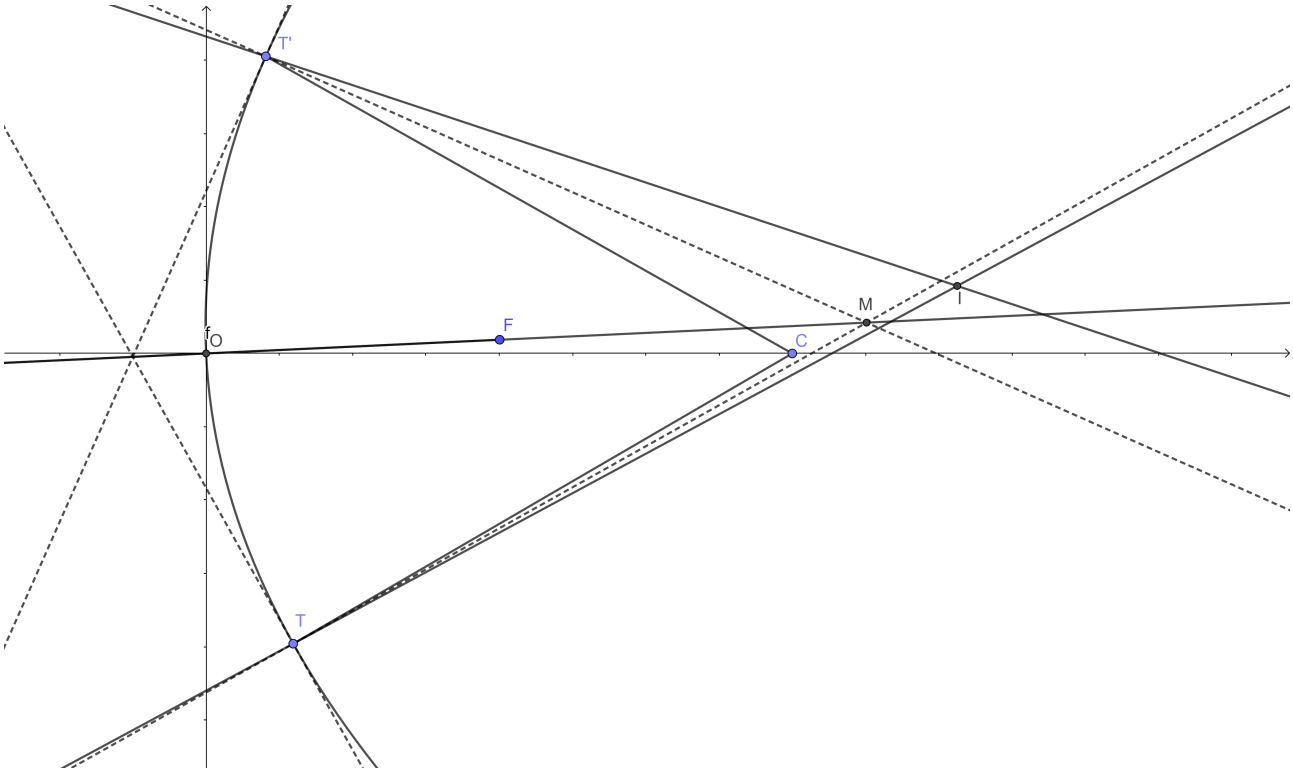
## 5.6 Décalage axial de la source

Si l'axe de la parabole ne passe pas exactement sur la source, son image va être décalée de l'autre coté de l'axe, avec approximativement le même écart latéral que celui de la source par rapport à l'axe.

Ainsi, considérons deux points de réflexions T et T' symétriques sur la parabole, illuminés de puis le point C qui n'est plus exactement sur l'axe OF. Les normales se coupent en M qui est sur OF, et les rayons réfléchis se coupent en I qui n'est pas sur OF, mais qui est approximativement symétrique de C par rapport à M.

Si on note σ l'angle de rotation de OF, les variations des abscisses des points T et T' sont du premier ordre, approximativement égales à -σ OT et +σ OT, et celles des ordonnées sont du deuxième ordre.

Les directions des tangentes TM et T'M tournent de l'angle σ . Leurs positions ne dépendant qu'au second ordre des abscisses des points T et T' et il en résulte que globalement, au premier ordre elle ne subissent que la rotation d'angle σ , et que OM conserve sa longueur et tourne du même angle.




Par rapport au cas où C est sur l'axe de la parabole, le point M ne se déplace, au premier ordre, qu'en ordonnée de la quantité , σ OM et a priori, I ne se déplace, également au premier ordre, qu'en ordonnée de la quantité σ OI.

On peut donc écarter l'axe de la parabole de la source pour pouvoir examiner plus facilement le point de convergence I, qui est moins accessible lorsqu'il est juste derrière la source.

Une démonstration rigoureuse pourrait être effectuée en s'inspirant de celle faite au paragraphe 5.1, en évaluant en fonction de σ et y, les variations des coordonnées des points T et T', puis en calculant les équations des tangentes en T et T', puis celles des normales, puis celles des symétriques des droites CT et CT' par rapport à ces normales, puis l'intersection I de ces symétriques, avec des développements limités au deuxième ordre en σ , mais je laisse cela aux jeunes courageux.