Vortex et Coriolis

Soit un objet ponctuel M animé d'une vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$ dans un référentiel local lié à la croute terrestre. Notons $\overrightarrow{\Omega}$ la vitesse de rotation de la Terre par rapport à un référentiel pseudo inertiel d'origine le centre O de la Terre, $\overrightarrow{\gamma_{abs}}$ l'accélération de l'objet par rapport à ce repère pseudo inertiel et $\overrightarrow{\gamma_r}$ son accélération dans le référentiel local. Ces différentes quantités sont reliées par la relation :

$$\overrightarrow{\gamma_{abs}} = \overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

où $\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ est l'accélération centripète (dirigée vers le centre) et où $\overrightarrow{A_c} = 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$ est l'accélération de Coriolis.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à cet objet ponctuel soumis à l'attraction de la Terre $\overrightarrow{F}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\gamma_{abs}} = m\left(\overrightarrow{\gamma_r} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right) + 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}\right)$$

Pour simplifier cette expression, on pose :

$$m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

où $-m\overrightarrow{\Omega} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$ est maintenant une force centrifuge (dirigée vers l'extérieur) qui tend à diminuer la force d'attraction. La résultante est la gravité $\overrightarrow{g}$ qui définit la verticale.

Finalement, dans le référentiel local, l'accélération de Coriolis doit être retranché à la gravité :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \overrightarrow{g} - 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

Pour examiner l'effet de l'accélération de Coriolis, notons $\begin{pmatrix} v_x, & v_y, & v_z \end{pmatrix}$ les composantes de $\overrightarrow{V_r}$ dans un repère situé en un lieu de latitude l, avec l'axe z situé vers le haut (le zénith du lieu), l'axe x vers le Sud et l'axe y vers l'Est. Dans ce repère $\overrightarrow{\Omega}$ a pour composantes$\begin{pmatrix} -\omega\cos l, & 0, & \omega\sin l \end{pmatrix}$. Il en résulte que les trois composantes de $\overrightarrow{A_c}$ sont $a_x = -2\omega v_y \sin l$, $a_y = 2\omega v_x \sin l + 2\omega v_z \cos l$ et $a_z = -2\omega v_y \cos l$.

Les accélérations induites dans le repère local sont les opposées de ces valeurs : $\gamma_x = 2\omega v_y \sin l$, $\gamma_y = -2\omega v_x \sin l - 2\omega v_z \cos l$ et $\gamma_z = g + 2\omega v_y \cos l$

Si on examine *ce qui se passe dans un plan horizontal*, on constate que les composantes v_x et v_y de la vitesse induisent des accélérations perpendiculaires dans le plan horizontal, qui font dévier vers la droite dans le Nord et vers la gauche dans l'hémisphère Sud : $v_x$induit $\gamma_y = -2\omega v_x \sin l$ (perpendiculaire et vers la droite si $l > 0$) et v_y induit $\gamma_x = 2\omega v_y \sin l$ (également perpendiculaire et vers la droite si $l > 0$).

La composante v_y induit également une accélération verticale $\gamma_z = 2\omega v_y \cos l$ qui diminue le poids de l'objet s'il se déplace vers l'Est et l'alourdit s'il se déplace vers l'Ouest, ce qui est sans conséquence notable sur les trajectoires.

La composante v_z induit une accélération vers l'Ouest si elle est ascendante et vers l'Est si elle est descendante, dans l'hémisphère Nord et inversement dans l'hémisphère sud.

Ainsi, dans l'hémisphère Nord, si on lâche une objet, la pesanteur lui communique une accélération qui va rendre v_z négative. Cette composante va induire une accélération $\gamma_y = -2\omega v_z \cos l$ dirigée vers l'Est qui va produire une vitesse v_y très faible. Cette vitesse va induire une faible accélération $\gamma_x = 2\omega v_y \sin l$ qui produira à son tour une vitesse v_x extrêmement faible dirigée vers le Sud. Ainsi, une chute devrait produire un mouvement vertical en spirale dans le sens négatif dans l'hémisphère Nord et en spirale dans le sens positif dans l'hémisphère Sud.

Mais pour les vents, qui ont une vitesse verticale faible devant la vitesse horizontale $\overrightarrow{V_r}$, c'est directement l'accélération $-2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$ qui modifie la direction de $\overrightarrow{V_r}$ vers sa droite dans l'hémisphère nord.

Poussée latérale sur les rails :

Considérons un train très rapide (360 km/h soit 100 m/s) roulant à la latitude de 45°. Avec :

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi/86400 = 73\,10^{-6} \\ \sin l &= 0.707 \end{aligned}$$

on obtient $a_{xy} \simeq 0.01$. Si la masse est de 18 T par essieu, les rails subissent au niveau de l'essieu une poussée latérale de 180 Kg ($\times 9.81$ pour l'exprimer en newtons).

Le vortex dans les lavabos :

Certains voient dans cet effet l'origine du vortex qui se crée lors de l'écoulement des eaux d'un lavabo et qui tournerait dans le sens (trigonométrique) positif dans l'hémisphère Nord et négatif dans l'hémisphère Sud.

Ici, à l'intérieur du lavabo, les vitesse verticales sont très faibles, et pour expliquer l'origine du Vortex, certains considèrent les vitesses radiales $\overrightarrow{V_r}$ dirigées vers la bonde. L'accélération $-2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$ dirigée vers la droite en regardant le centre produirait une rotation positive dans l'hémisphère Nord. Je pense comme beaucoup que cet effet est négligeable devant les effets produits par les irrégularités des états de surface des récipients et qu'il est beaucoup trop faible pour avoir le temps de s'installer avant que le lavabo soit totalement vide. Si une simulation fine en éléments finis pouvait donner un résultat, il serait déjà connu.

Chute d'une goutte d'eau :

En première approximation, l'accélération relative d'une goutte d'eau isolée de diamètre d en chute libre est donnée par :

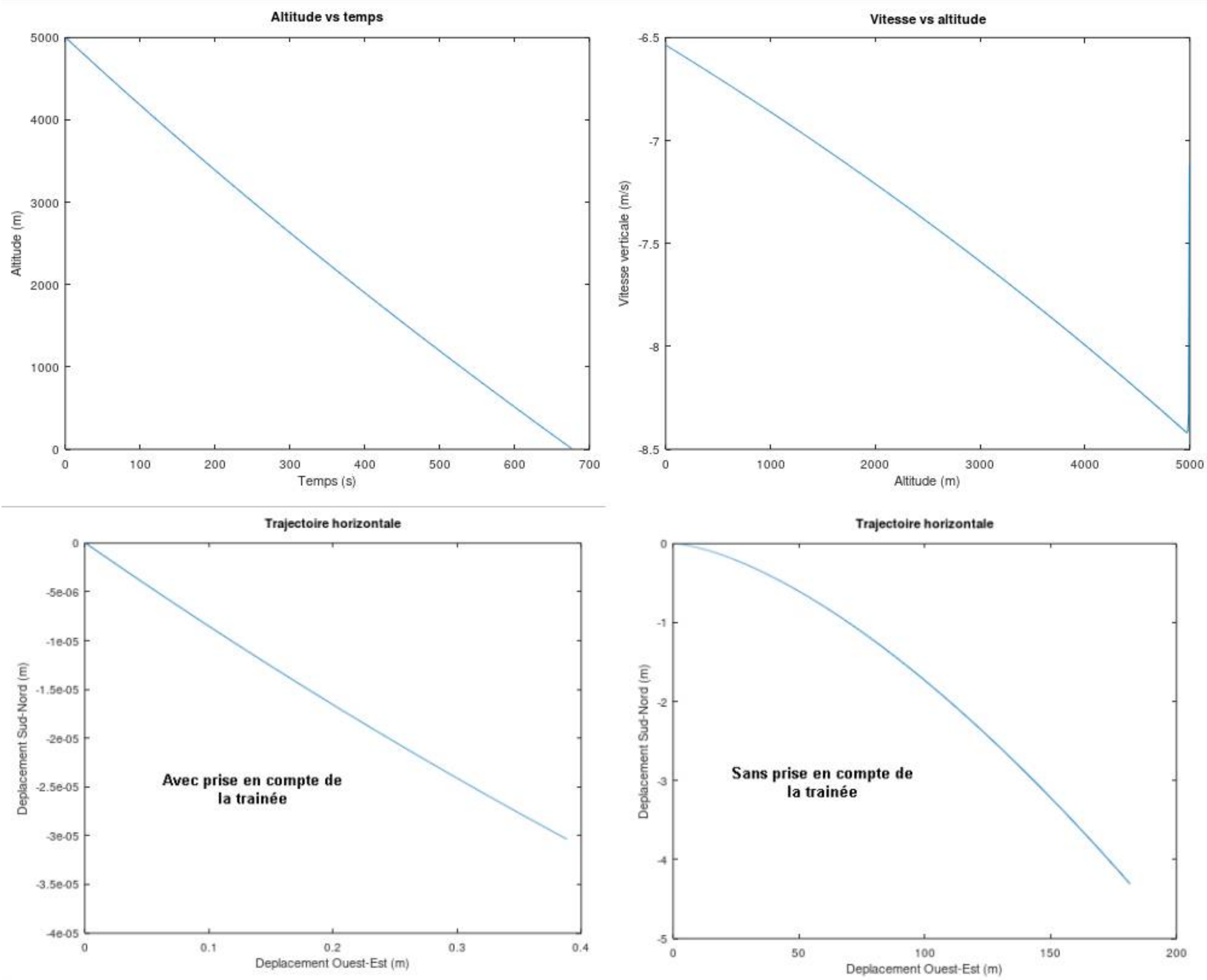
$$\overrightarrow{\gamma_r} = \overrightarrow{g} - 2\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} - \frac{3\rho_{air}\,|V|}{4\rho_{eau} d}\overrightarrow{V_r}$$

Le listing Octave (apparenté Matlab) suivant simule la chute d'une goutte d'eau de 4 mm de diamètre qui chute de 5000 m d'altitude, à la latitude de 45° :

```
% Chute libre d'une goutte d'eau
diam = 0.004 % diamètre goutte
ratio = 3*1.225/(4*1000*diam); % (3*rho_air)/(4*rho_eau*diam)
ome = 2*pi/(24*3600); % vit. rot. Terre
L = 45*pi/180;        % Latitude
sinL = sin(L); cosL = cos(L);
dT = 0.1;             % pas d'intégration temporel
% Conditions initiales
t = 0; x = 0; y = 0; z = 5000; vX = 0; vY = 0; vZ = 0;
i = 0; k = 0
tabT = tabV = tabX = tabY = tabZ = [];
do
  vario = (1-z/44300)**4.255;         % variation rho_air avec z
  Vmod = sqrt(vX*vX + vY*vY + vZ*vZ); % module vitesse goutte
  coef = ratio*vario*Vmod;            % coef trainée
  % Accélération goutte
  aX = 2*ome*vY*sinL - coef*vX;
  aY = -2*(ome*vX*sinL + ome*vZ*cosL) - coef*vY;
  aZ = -9.81 + 2*ome*vY*cosL - coef*vZ;
  % intégration position euler 2ème ordre
  x = x + vX*dT + 0.5*aX*dT*dT;
  y = y + vY*dT + 0.5*aY*dT*dT;
  z = z + vZ*dT + 0.5*aZ*dT*dT;
  % intégration vitesse
  vX = vX + aX*dT;
  vY = vY + aY*dT;
  vZ = vZ + aZ*dT;
  t = t + dT;
  i = i + 1;
  if mod(i,10) == 0
    k = k+1
    tabT(k) = t; tabV(k) = vZ; tabZ(k) = z;
    % Pour avoir l'Est à droite et le Nord en haut dans les figures
    tabX(k) = y; tabY(k) = -x;
  endif
until (z <= 0)
# Altitude en fonction du temps
figure(1); plot(tabT, tabZ);
xlabel("Temps (s)"); ylabel("Altitude (m)");
title("Altitude vs temps")
# Vitesse de chute en fonction de l'altitude
figure(2); plot(tabZ,tabV)
```

```
xlabel("Altitude (m)"); ylabel("Vitesse verticale (m/s)");
title("Vitesse vs altitude")
# Trajectoire horizontale
figure(3); plot(tabX, tabY)
xlabel("Deplacement Ouest-Est (m)"); ylabel("Deplacement Sud-Nord (m)");
title("Trajectoire horizontale")
```

La figure ci-après montre les résultats obtenus :



La chute dure un peu plus de 10 minutes. La vitesse verticale se stabilise presque immédiatement à 8,5 m/s à 5000m pour décroitre lentement jusqu'à 6,5 m/s à l'arrivée au sol.

Le déplacement latéral est complètement étouffé par la trainée. Au bout de 5000 m de chute, il est inférieur à 0,5 m vers l'est et se compte en dizaine de microns vers le sud. La goutte suis donc totalement le vent. S'il n'y avait pas de trainée latérale, panneau bas-droit, le déplacement latéral atteindrait dans les 180 m vers l'est et 4 m vers le sud.