

FACULTE des SCIENCES

THESE

PRESENTEE

A L'ECOLE DES GRADUES

DE L'UNIVERSITE LAVAL

COMME EXIGENCE PARTIELLE

POUR L'OBTENTION

DU GRADE DE MAITRE ES SCIENCES

PAR

MICHEL LLIBRE

INGENIEUR E.N.S.A.

ETUDE D'UNE CLASSE PARTICULIERE

DE SYSTEME A COMMANDE ADAPTATIVE

- 2 -

AOUT 1970

## Remerciements

Nous désirons exprimer notre profonde reconnaissance au Docteur J.F. Lemaître pour la compétence avec laquelle il nous a conseillés et guidés au cours de nos recherches ainsi qu'au Docteur J.G. Paquet qui a bien voulu superviser ce travail.

Nous remercions également le Gouvernement de la Province du Québec et le Conseil National de Recherches du Canada qui nous ont permis, par leur soutien matériel, de mener cette recherche à son terme.

Enfin, nous remercions Mademoiselle C. Nadeau pour l'excellence de son travail dans la transcription du manuscrit.

TABLE des MATIERES

	Page
<b>SOMMAIRE</b> . . . . .	1
<b>CHAPITRE I GAIN EQUIVALENT D'UN RELAIS EN PRESENCE D'UN CYCLE LIMITE</b>	3
1.1 Généralités . . . . .	3
1.2 Entrée sinusoïdale à valeur moyenne non nulle . . . . .	4
1.2.1 Cas général . . . . .	4
1.2.2 Cas du relais idéal . . . . .	6
1.2.3 Influence du seuil . . . . .	8
1.2.4 Influence de l'hystérésis . . . . .	9
1.2.5 Conclusion . . . . .	10
1.3 Gain équivalent d'un relais en présence de deux entrées sinusoïdales superposées. . . . .	11
1.3.1 Généralités . . . . .	11
1.3.2 Cas du relais idéal . . . . .	11
1.3.3 Conclusion . . . . .	13
<b>CHAPITRE II MODELE LINEAIRE EQUIVALENT D'UN SYSTEME NON LINEAIRE EN OSCILLATION LIBRE.</b>	15
2.1 Généralités . . . . .	15
2.2 Conditions d'équivalence . . . . .	16
2.2.1 Réponse à une entrée sinusoïdale . . . . .	16
2.2.2 Réponse à une entrée exponentielle . . . . .	17
2.3 Régionalisation du plan du lieu des racines . . . . .	18
2.4 Stabilité du système linéaire équivalent . . . . .	21

	Page
CHAPITRE III PROBLEME DE L'ADAPTATION PARAMETRIQUE ET DE L'IDENTIFICATION	23
3.1 Propriétés de la boucle interne du système équivalent	23
3.2 Problème de l'insensibilisation paramétrique . . . . .	26
3.2.1 Position du problème . . . . .	26
3.2.2 Mécanisme de l'insensibilisation . . . . .	27
3.3 Compensation automatique avec identification . . . . .	27
3.3.1 Schéma de la compensation . . . . .	28
3.3.2 Système à gain variable . . . . .	29
3.3.3 Système à constante de temps variable . . . . .	30
3.3.4 Système dont la fonction de transfert possède un zéro variable . . . . .	32
3.3.5 Système à gain et constante de temps variables	33
3.4 Remarque sur l'identification . . . . .	34
3.5 Conclusion sur l'adaptativité . . . . .	36
 CHAPITRE IV EXEMPLE D'APPLICATION: STABILISATION AUTOMATIQUE D'UN MIS-	
SILE EN ROULIS . . . . .	38
4.1 Présentation de l'exemple . . . . .	38
4.1.1 Fonction de transfert du missile . . . . .	38
4.1.2 Diagramme de la boucle de commande . . . . .	42
4.2 Etude de la boucle interne . . . . .	43
4.2.1 Diagramme de la boucle interne . . . . .	43
4.2.2 Choix du réseau correcteur . . . . .	44
4.2.3 Etude de l'insensibilité de la fonction de transfert obtenue . . . . .	47
4.3 Etude de la boucle externe . . . . .	51
4.3.1 Diagramme équivalent de la boucle externe . . . . .	51

	Page
4.3.2 Choix du filtre $H_o(p)$ . . . . .	51
4.3.3 Remarque sur l'insensibilité de la boucle externe	53
4.4 Régulation des paramètres de l'oscillation libre . .	54
4.4.1 Objectifs de la régulation . . . . .	54
4.4.2 Régulation de la fréquence . . . . .	54
4.4.3 Régulation de l'amplitude . . . . .	55
4.5 Conclusion sur l'étude théorique de l'exemple . . .	56
<b>CHAPITRE V ETUDE EXPERIMENTALE</b>	58
5.1 Efficacité du processus de compensation . . . . .	58
5.1.1 Régulation de la pulsation de l'oscillation libre	58
5.1.2 Régulation de l'amplitude de l'oscillation libre	60
5.2 Performances de l'asservissement . . . . .	62
5.2.1 Réponse du système à un échelon . . . . .	62
5.2.2 Vérification des hypothèses sur l'oscillation libre	63
<b>CONCLUSION</b> . . . . .	76
<b>ANNEXE</b> . . . . .	78
<b>REFERENCES</b> . . . . .	88

## SOMMAIRE

Les systèmes de commande actuels sont appelés à fonctionner sous un éventail de conditions extérieures de plus en plus large. En particulier, l'aéronautique développe des systèmes qui évoluent dans des domaines de température et de pression toujours plus étendus et dont certaines caractéristiques internes, telles que la masse et l'inertie, varient dans des proportions considérables. Compte tenu de ces variations, il s'est avéré nécessaire de contrôler la dynamique du système à asservir pour obtenir une commande insensible à l'environnement.

L'étude des systèmes à commande adaptative a été effectuée pour donner une solution à ce problème. Mishkin [ 1 ] donne la définition suivante de la commande adaptative: "Commande dans laquelle une mesure automatique et continue du processus à commander est utilisée pour une construction continue et automatique du système de commande".

La méthode d'adaptation analysée dans ce travail se rapproche de l'étude des "Adaptative Control Systems" [ 1 ] par les deux points suivants:

- 1) il y a correction automatique pour des variations de la dynamique du système à asservir;
- 2) les caractéristiques de la partie commande doivent changer automatiquement afin que le système global possède une dynamique constante et satisfaisante.

Cependant, les moyens utilisés pour la mise en oeuvre du processus d'adaptation font l'originalité de cette thèse. Une oscillation libre est créée dans le système par le battement d'un relais, ce qui motivera l'étude du gain équivalent d'un organe non linéaire en présence d'une oscillation au premier chapitre. Dans le but de simplifier l'analyse des caractéristiques du système en oscillation, nous montrerons qu'on peut ramener son étude à celle d'un système linéaire équivalent qui sera défini au deuxième chapitre. L'information contenue dans le cycle limite sera exploitée pour faire apparaître successivement:

- 1) un processus d'adaptation paramétrique,
- 2) un processus de compensation automatique,
- 3) un processus d'identification,

tous trois étroitement liés à la régulation de l'oscillation libre qui fera l'objet du troisième chapitre. Quant à la mise en oeuvre, elle consistera en une étude théorique de stabilisation automatique d'un missile en roulis traité au quatrième chapitre, son étude expérimentale étant effectuée au dernier.

## C h a p i t r e I

### GAIN EQUIVALENT D'UN RELAIS EN PRESENCE D'UN CYCLE LIMITE

#### 1.1 GENERALITES

Pour faire apparaître le processus d'adaptation paramétrique dont l'étude fera l'objet des chapitres suivants, la boucle interne du système analysé doit être le siège d'une oscillation libre entretenue en permanence (fig. 1.1). Nous noterons  $x_b$  son amplitude à l'entrée de l'organe non linéaire et  $\omega_b = 2\pi/T_b$  sa pulsation. A cette oscillation s'ajoute le signal de commande  $e(t)$  dont la résultante à l'entrée du relais sera notée  $x_e(t)$ . Dans tout ce qui suit, N désignera l'élément non linéaire.

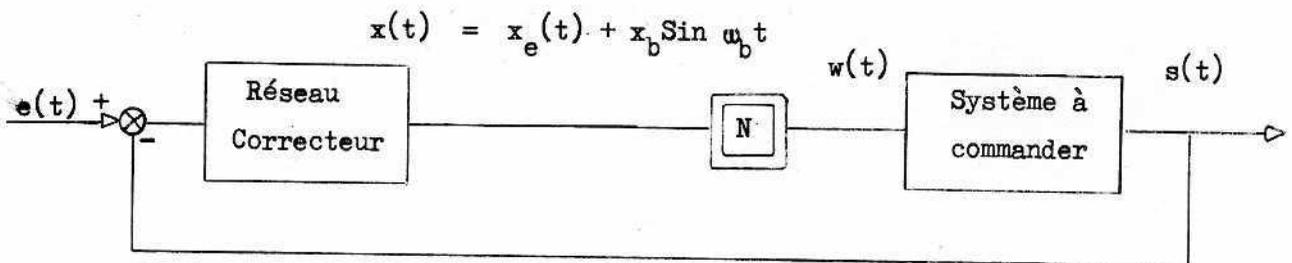


Figure 1.1 Système non linéaire en oscillation libre.

Nous définirons dans ce chapitre deux gains équivalents pour le relais; l'un par rapport à l'amplitude  $x_b$  de l'oscillation, l'autre par rapport au signal  $x_e(t)$ . Ils seront respectivement notés  $N_b(x_b, x_e)$  et  $N_e(x_b, x_e)$ . Nous montrerons ensuite que ces deux quantités sont liées par une relation qui sera le point de départ du processus d'adaptation.

Le signal  $x_e(t)$  étant dans le cas le plus général une sinusoïde amortie exponentiellement, nous séparerons l'étude suivante en deux parties:

1)  $x_e(t)$  est un signal variant lentement, c'est-à-dire une exponentielle de constante de temps très supérieure à  $T_b$ , que nous assimilerons à une constante s'ajoutant au cycle limite;

2)  $x_e(t)$  est un signal sinusoïdal dont la pulsation est nettement inférieure à  $\omega_b$ .

## 1.2 ENTREE SINUSOÏDALE A VALEUR MOYENNE NON NULLE

### 1.2.1 Cas général

En l'absence de signal de commande  $e(t)$ , l'entrée du relais est réduite à l'oscillation libre. Sa sortie  $w(t)$  est formée de rectangles périodiques de valeur moyenne nulle. Si une commande  $e(t)$  est appliquée, l'entrée du relais se trouve modifiée en:

$$x(t) = x_e(t) + x_b \sin \omega_b t$$

Considérons le cas où  $x_e(t)$  est un signal variant lentement tel que:

$$|x_e(t)| < x_b \tag{1.1}$$

$$T_b \left| \frac{de(t)}{dt} \right| < x_b \tag{1.2}$$

$x_e(t)$  est alors assimilable à une constante pendant la durée d'une période de l'oscillation libre (fig. 1.2).

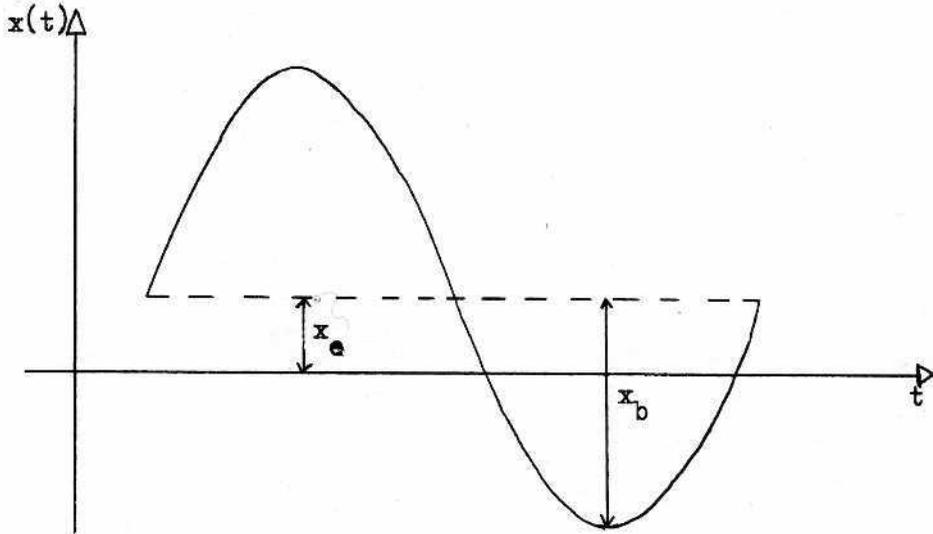


Figure 1.2 Entrée du relais.

Le développement en série de Fourier de la sortie  $w(t)$  de l'élément non linéaire est donné par:

$$w(t) = w_e + w_b \sin(\omega_b t + \psi) + \dots$$

Le gain équivalent de  $N$  par rapport à  $x_e$  est défini [Ref. 2; p. 20] comme étant:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{w_e}{x_e},$$

et par rapport à l'oscillation libre comme étant:

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{w_b}{x_b} e^{j\psi}.$$

$N_e(x_b, x_e)$  caractérise la transmission par la non-linéarité des signaux variant lentement en présence d'une oscillation libre d'amplitude  $x_b$ . On pourra définir en général une non-linéarité équivalente qui permettra de séparer l'étude de la transmission du signal de commande de celle du cycle limite, sous certaines conditions imposées à  $x_b$ .

### 1.2.2 Cas du relais idéal

L'élément non linéaire a la caractéristique représentée à la figure 1.3.

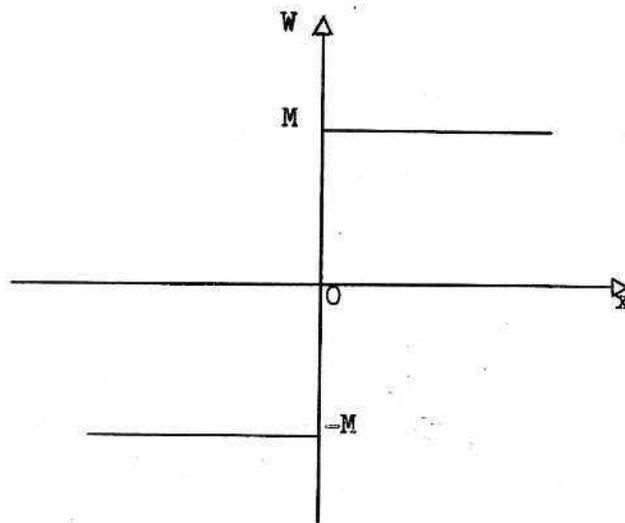


Figure 1.3 Relais idéal.

On obtient facilement pour les gains équivalents [Ref. 3; pp 2-10]:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{2M}{\pi x_e} \text{Arc Sin } \frac{x_e}{x_b}, \quad (1.3)$$

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{4M}{\pi x_b} \sqrt{1 - \left(\frac{x_e}{x_b}\right)^2}. \quad (1.4)$$

L'hypothèse faite en (1.1) permet d'obtenir les développements en série:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{2M}{\pi x_b} \left[ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{x_e}{x_b}\right)^2 + \frac{3}{40} \left(\frac{x_e}{x_b}\right)^4 + \dots \right], \quad (1.5)$$

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{4M}{\pi x_b} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_e}{x_b} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{x_e}{x_b} \right)^4 + \dots \right]. \quad (1.6)$$

Le gain équivalent  $N_e(x_b, x_e)$  correspondant à l'équation (1.3) est tracé à la figure 1.4.

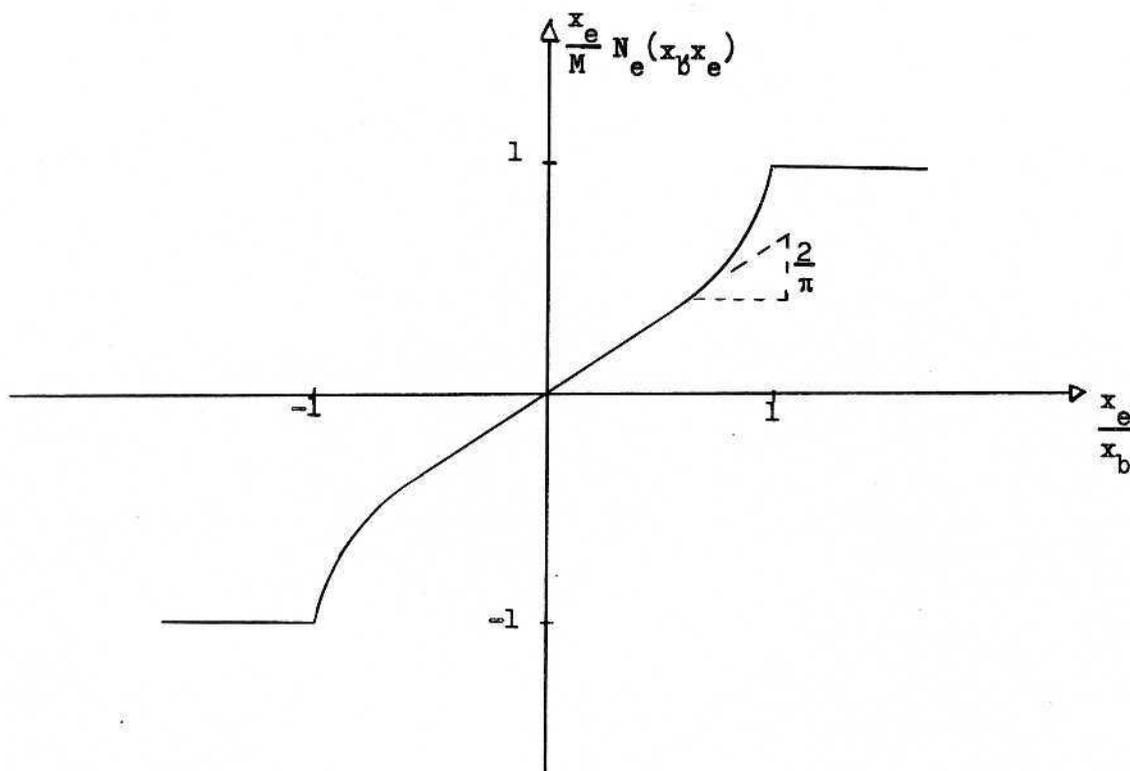


Figure 1.4 Gain équivalent du relais idéal par rapport à un signal en présence du cycle limite.

On voit que si les conditions (1.2) et (1.3) sont vérifiées et que  $x_b$  est constant, on peut séparer l'étude de la transmission du signal de commande de celle de l'oscillation libre. De plus, tant que la quantité  $x_e/x_b$  est maintenue à un faible niveau, la non-linéarité représentée à la figure 1.4 peut à son tour être remplacée par un élément linéaire donné par sa pente à l'origine  $2M/\pi x_b$  sous la condition approximative  $|x_e/x_b| < 1/3$ .

### 1.2.3 Influence du seuil

Considérons maintenant la caractéristique non linéaire représentée à la figure 1.5.

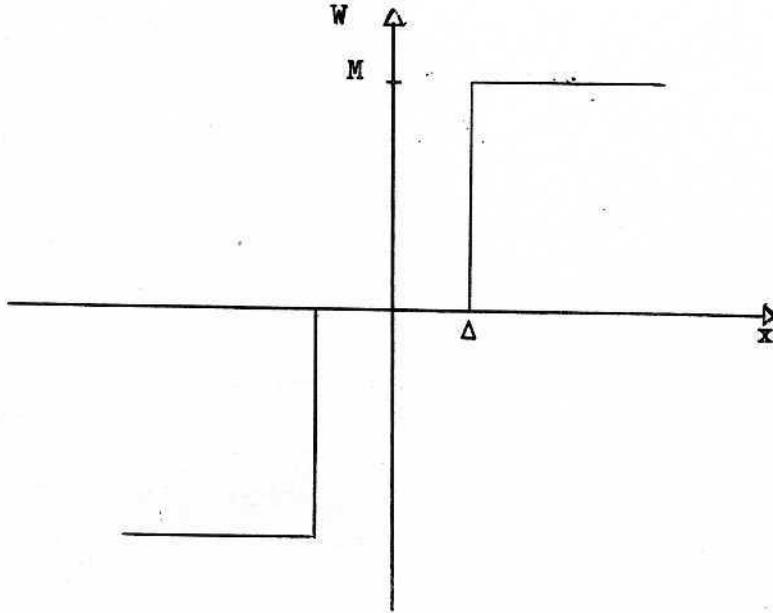


Figure 1.5 Relais avec seuil.

On obtient pour le gain équivalent  $N_e(x_b, x_e)$  [Ref. 6; p. 540]:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{M}{\pi x_e} \left[ \text{Arc Sin} \frac{x_e - \Delta}{x_b} + \text{Arc Sin} \frac{x_e + \Delta}{x_b} \right],$$

avec  $|x_e \pm \Delta| < x_b$ ,

soit en développant jusqu'au deuxième ordre:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{2M}{\pi x_e} \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{x_e^2 + 3\Delta^2}{x_b^2} + \dots \right].$$

En comparant avec (1.5), on constate que l'existence du seuil se traduit par une légère augmentation du gain n'apparaissant qu'au deuxième ordre:

$$\frac{2M}{\pi x_b} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta}{x_b} \right)^2 + \dots \right].$$

Le gain équivalent  $N_b(x_b, x_e)$  peut s'écrire [Ref. 6; p. 540]:

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{2M}{\pi x_b} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{x_e + \Delta}{x_b}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x_e - \Delta}{x_b}\right)^2} \right],$$

avec  $|x_e \pm \Delta| < x_b$ ,

et son développement limité:

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{4M}{\pi x_b} \left[ 1 - \frac{x_e^2 + \Delta^2}{2x_b^2} + \dots \right].$$

En comparant avec (1.6), nous constaterons que le seuil entraîne une légère diminution du gain qui apparaît au deuxième ordre:  $-\frac{4M}{\pi x_b} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{x_b}\right)^2 + \dots \right]$ .

#### 1.2.4 Influence de l'hystérésis

La caractéristique de l'élément non linéaire est représentée à la figure 1.6.

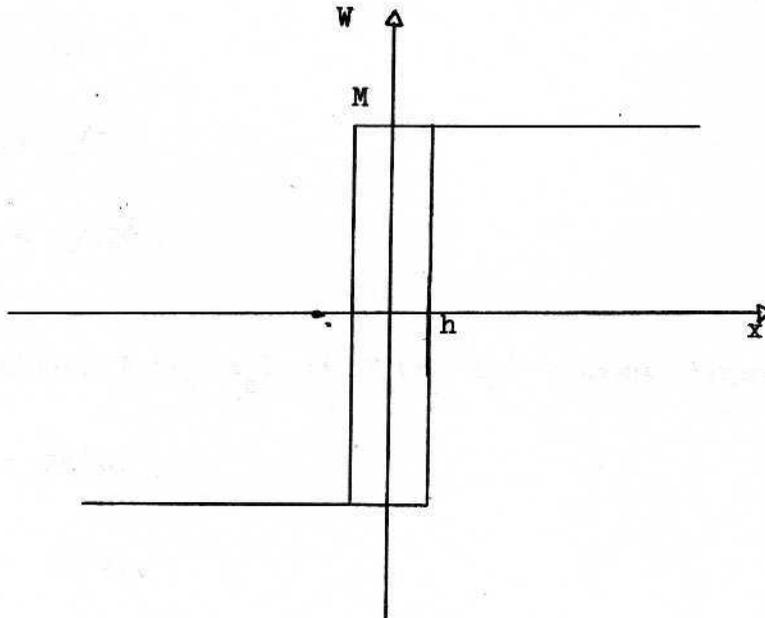


Figure 1.6 Relais avec hystérésis.

Son gain équivalent  $N_e(x_b, x_e)$  est donné par [Ref. 6; p. 549]:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{M}{\pi x_e} \left[ \text{Arc Sin} \frac{x_e + h}{x_b} + \text{Arc Sin} \frac{x_e - h}{x_b} \right],$$

avec  $h + |x_e| < x_b$  ;

l'expression de  $N_e(x_b, x_e)$  est rigoureusement similaire à celle obtenue dans le cas du seuil. L'hystérésis se traduit donc par une légère augmentation du gain  $N_e$  de  $\frac{2M}{\pi x_b} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{h}{x_b} \right)^2 + \dots \right]$ .

Quant au gain  $N_b(x_b, x_e)$ , l'hystérésis introduit un déphasage  $\Psi$ . En se limitant au deuxième ordre, on montre que:

$$|N_b(x_b, x_e)| = \frac{4M}{\pi x_b} \left[ 1 - \frac{x_e^2 + 2h^2}{2x_b^2} + \dots \right], \quad \angle N_b(x_b, x_e) = \text{Arc tg} \frac{h}{x_b} \left( 1 - \frac{h^2 + x_e^2}{2x_b^2} \right).$$

Le déphasage est inférieur à  $0.5^\circ$  pour  $h < x_b/120$ .

### 1.2.5 Conclusion

Lorsque la grandeur des signaux précédemment définis est limitée aux inégalités,  $|x_e \pm \Delta| < x_b/3$ ,

$$|x_e| + h < x_b/3, \quad (1.7)$$

$$h < x_b/120,$$

avec  $x_b = \text{cte.}$

les gains équivalents  $N_e(x_b, x_e)$  et  $N_b(x_b, x_e)$  peuvent s'approximer par:

$$N_e(x_b) = 2M/\pi x_b, \quad (1.8)$$

$$N_b(x_b) = 4M/\pi x_b.$$

Ces deux expressions ne dépendent plus de la résultante du signal d'entrée  $x_e$ , et sont liées entre elles par la relation:

$$N_b(x_b) = 2N_e(x_b). \quad (1.9)$$

### 1.3 GAIN EQUIVALENT D'UN RELAIS EN PRESENCE DE DEUX ENTREES SINUSOIDALES SUPERPOSEES

#### 1.3.1 Généralités

L'entrée de l'élément non linéaire  $N$  se présente maintenant sous la forme:

$$x(t) = x_b \sin \omega_b t + x_e \sin (\gamma \omega_b t + \theta),$$

où  $\gamma$  est un nombre supposé irrationnel.

En se limitant pour la sortie  $w(t)$  aux termes suivants de la décomposition en série de Fourier:

$$w(t) = W_b \sin (\omega_b t + \psi_b) + W_e \sin (\gamma \omega_b t + \theta + \psi_e),$$

on définit comme précédemment les gains équivalents:

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{W_e}{x_e} e^{j\psi_e}$$

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{W_b}{x_b} e^{j\psi_b}$$

#### 1.3.2 Cas du relais idéal

Dans ce cas  $\psi_e$  et  $\psi_b$  sont nuls. En posant:

$\theta_1 = \omega_b t$  et  $\theta_2 = \gamma \omega_b t + \theta$ , pour  $\gamma$  irrationnel  $W_e$  et  $W_b$  sont donnés par [Ref. 6; pp 255-259]:

$$W_b = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W(x_b \sin \theta_1 + x_e \sin \theta_2) \sin \theta_1 d\theta_1 d\theta_2,$$

$$W_e = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W(x_b \sin \theta_1 + x_e \sin \theta_2) \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2.$$

Dans ces conditions  $N_e(x_b, x_e)$  et  $N_b(x_e, x_b)$  sont réels et indépendants

de  $\gamma$  et  $\theta$ .

En posant  $k = x_e/x_b$ , on a:

$$W(x_b \sin \theta_1 \pm x_e \sin \theta_2) = \begin{cases} M & \text{pour } \sin \theta_1 \pm k \sin \theta_2 \geq 0 \\ -M & \text{pour } \sin \theta_1 \pm k \sin \theta_2 < 0 \end{cases}$$

Les gains équivalents s'écrivent alors:

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{8M}{\pi^2 x_b} E(k),$$

avec  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu} d\mu$  fonction elliptique complète de 2<sup>ième</sup> espèce

$$\text{et } N_e(x_b, x_e) = \frac{8M}{\pi^2 k^2 x_b} [E(k) - (1-k^2) K(k)],$$

avec  $K(k) = \int_0^{\pi/2} d\mu \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \mu}$  fonction elliptique complète de 1<sup>ère</sup> espèce.

On peut mettre  $E(k)$  et  $K(k)$  sous la forme [Ref. 5; pp 590-591]:

$$E(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1(-1/2, 1/2; 1 | k^2)$$

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1(1/2, 1/2; 1 | k^2)$$

où  ${}_2F_1(a, b; c | z)$  est la fonction hypergéométrique de Gauss. En utilisant la relation entre fonctions contigues [Ref. 5; p. 558]:

$$(1-z) {}_2F_1(a, b; c | z) = {}_2F_1(a-1, b; c | z) + \frac{b-c}{c} z {}_2F_1(a, b; c+1 | z),$$

nous obtenons:

$$E(k) - (1-k^2) K(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k^2}{2} \cdot {}_2F_1(1/2, 1/2; 2 | k^2),$$

$$\text{d'où } N_b(x_b, x_e) = \frac{4M}{\pi x_b} {}_2F_1(-1/2, 1/2; 1 | k^2),$$

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{2M}{\pi x_b} {}_2F_1(1/2, 1/2; 2 | k^2),$$

soit en explicitant sous la forme de séries:

$$N_b(x_b, x_e) = \frac{4M}{\pi x_b} \left[ 1 - \frac{k^2}{4} - \frac{3k^4}{64} \dots \right], \quad (1.10)$$

$$N_e(x_b, x_e) = \frac{2M}{\pi x_b} \left[ 1 + \frac{k^2}{8} + \frac{3k^4}{64} + \dots \right]. \quad (1.11)$$

Par conséquent, pour  $|x_e| < x_b/3$  nous retrouvons les relations (1.8) et (1.9) du paragraphe précédent concernant les développements limités de  $N_b(x_b)$  et  $N_e(x_b)$ . Toutefois, il est à noter que nous avons supposé  $\gamma$  irrationnel. Dans le cas où les deux sinusoides sont harmoniques l'une de l'autre, les gains équivalents deviennent complexes; le déphasage maximal est donné par  $N_e$  lorsque  $\gamma = 1/3$ ; il vaut alors  $\text{Arc tg}(k/4)$ . Cependant, il reste toujours inférieur à  $0.5^\circ$  pour  $\gamma \leq 1/5$  et  $|x_e|/x_b \leq 1/2$ .

### 1.3.3 Conclusion

L'influence du seuil et de l'hystérésis est extrêmement complexe à expliciter. On peut cependant considérer que si  $x_b$  vérifie les inégalités (1.7)

$$|x_e \pm \Delta| < x_b/3,$$

$$|x_e| + h < x_b/3, \quad (1.7)$$

$$h < x_b/120,$$

avec  $x_b = \text{cte}$  et que de plus

$$\gamma \leq 1/5 \quad (1.12)$$

les expressions

$$N_b(x_b) = 4M/\pi x_b,$$

$$N_e(x_b) = 2M/\pi x_b, \quad (1.8)$$

deviennent des approximations acceptables, le signal  $x_e$  représentant indifféremment la grandeur d'un signal exponentiel évoluant lentement, l'amplitude d'une sinusoides de fréquence au moins cinq fois inférieure à celle du cycle limite, ou la

combinaison des deux en une sinusoïde amortie exponentiellement.

Ces deux expressions sont d'autre part indépendantes de  $x_e$  et vérifient la relation:

$$N_b(x_b) = 2 N_e(x_b), \quad (1.9)$$

relation qui se traduira par une propriété d'auto adaptativité des systèmes en oscillation libre.

## Chapitre II

### MODELE LINEAIRE EQUIVALENT D'UN SYSTEME

#### NON LINEAIRE EN OSCILLATION LIBRE

##### 2.1 GENERALITES

Ce chapitre a pour objet de simplifier l'étude de la caractéristique "entrée-sortie" du système non linéaire. En utilisant les gains équivalents du relais en présence d'un cycle limite qui ont été définis au chapitre précédent, nous allons ramener l'étude de cette caractéristique à celle de la fonction de transfert d'un système linéaire équivalent.

Le système non linéaire en oscillation libre est représenté à la figure 2.1.

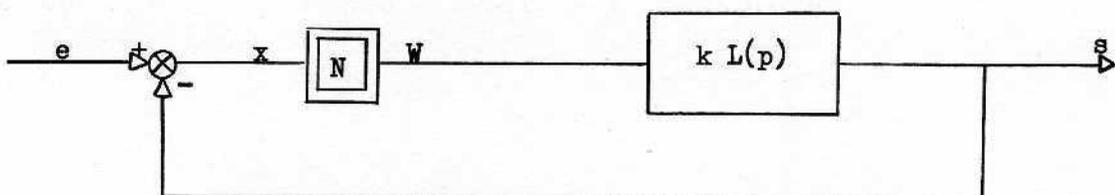


Figure 2.1 Système non linéaire en oscillation libre.

En l'absence d'entrée  $e$ , la sortie  $s$  n'est composée que de l'effet résiduel du cycle limite et vaut alors  $s = -x_b \sin \omega_b t$ .

Nous nous proposons d'étudier les conditions d'équivalence entre ce système et le système linéaire représenté à la figure 2.2.

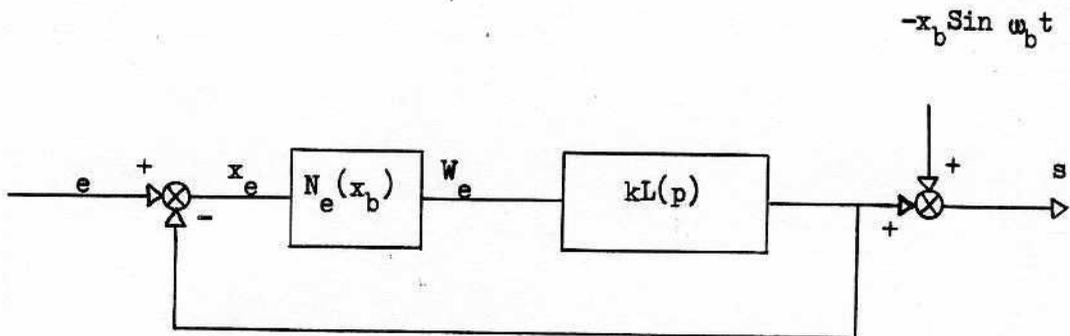


Figure 2.2 Système linéaire équivalent.

La non-linéarité  $N$  est remplacée par le gain pur  $N_e(x_b) = 2M/\pi x_b$ , et l'effet résiduel du cycle limite n'est ajouté qu'à la sortie.

## 2.2 CONDITIONS D'EQUIVALENCE

Les deux systèmes sont considérés comme équivalents si l'égalité des entrées entraîne celle des sorties.

Le signal  $x_e(t)$  se présente de façon générale sous la forme d'une sinusoïde amortie exponentiellement. Au chapitre précédent nous avons, pour l'étude du gain  $N_e$ , séparé l'analyse de la transmission des signaux exponentiels de celle des signaux sinusoïdaux. Cette distinction va être exploitée dans ce qui suit.

### 2.2.1 Réponse à une entrée sinusoïdale

Un signal sinusoïdal à l'entrée de la non-linéarité  $N$  va être transmis

avec un gain  $N_e(x_b, x_e) = \frac{8M}{\pi^2 k^2 x_b} [E(k) - (1 - k^2) K(k)]$  (voir § 1.3.2). Pour qu'il y ait équivalence entre les deux systèmes des figures 2.1 et 2.2, il faut:

- 1) que ce gain soit constant et indépendant de l'amplitude  $x_e$  du signal sinusoïdal,
- 2) que  $x_b$  soit constant, c'est-à-dire que l'amplitude du cycle limite soit elle-même indépendante du signal à l'entrée de  $N$ .

Nous avons vu que la condition d'amplitude:

$$|x_e|/x_b < 1/3, \quad (1.7)$$

et la condition de pulsation:

$$\omega_e/\omega_b < 1/5, \quad (1.12)$$

suffisaient pour satisfaire les deux exigences précédentes. A ce moment là,  $N_e(x_b, x_e)$  se réduit bien au gain pur  $N_e(x_b) = 2M/\pi x_b$  placé dans la branche directe du système linéaire.

### 2.2.2 Réponse à une entrée exponentielle

Considérons maintenant le gain de  $N$  par rapport à un signal exponentiel  $x_e(t)$  en présence du cycle limite. Pour que  $N_e(x_b, x_e)$  se réduise à la quantité  $2M/\pi x_b$  il faut, en plus de la condition d'amplitude, que  $x_e$  varie lentement de manière à ce qu'il puisse être considéré comme constant sur une période de l'oscillation. Si cette dernière supposition est infirmée,  $N_e(x_b, x_e)$  va dépendre du rapport entre la constante de temps  $\tau$  de l'exponentielle et la période  $T_b$  du cycle limite. En effet, si  $\tau > 10 T_b$ , il est bien évident que  $x_e$  sera assimilable à une constante pendant la durée d'une période. Par contre, si  $\tau \ll T_b$ , le gain de  $N$  va dépendre de l'instant où le signal apparaît sur l'oscillation:

- s'il s'ajoute au voisinage d'un maximum, il n'aura aucun effet sur la commutation du relais et sera affecté d'un gain nul.

- lors d'un passage par zéro, il va modifier l'instant de commutation et sera alors affecté d'un gain maximum.

Estimons une valeur minimale approximative de la constante de temps  $\tau$  de l'exponentielle pour laquelle le gain de  $N$  peut être considéré comme indépendant du signal d'entrée. Pour cela il suffit que l'exponentielle soit telle qu'elle agisse sur trois commutations du relais, ce qui donne l'égalité:  $3\tau = 3T_b/2$ , ou plus simplement  $\tau = T_b/2$ .

D'autre part, lorsque l'exponentielle débute juste après une commutation du relais, elle n'est transmise qu'à la commutation suivante, soit avec un retard maximal de  $T_b/2$ .

En définitive, pour des constantes de temps supérieures à  $T_b/2$ , on peut considérer:

- 1) que le retard de transmission est tolérable,
- 2) que le gain de  $N$  est constant et indépendant du signal d'entrée  $x_e$ .

Dans ces conditions, on peut remplacer la non-linéarité par le gain pur du système linéaire équivalent.

Les diverses conditions énumérées dans ce paragraphe vont être résumées par une étude du lieu des racines.

### 2.3 REGIONALISATION DU PLAN DU LIEU DES RACINES

Le lieu des racines du système linéaire représenté à la figure 2.2 passe par les points  $\pm j\omega_b$  pour une valeur du gain en boucle ouverte égal à  $k N_b(x_b)$

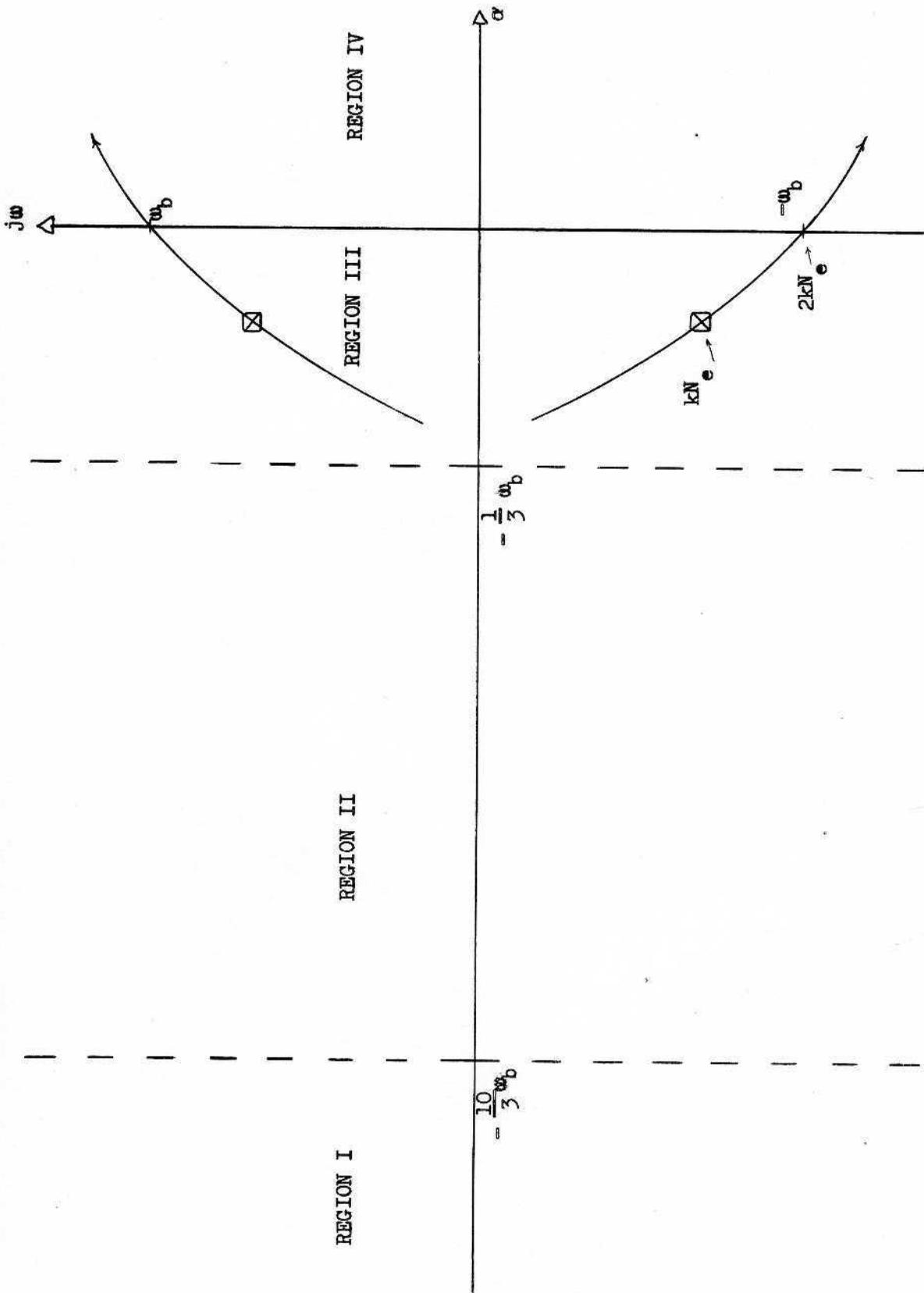


Figure 2.3 Régionalisation du lieu des racines.

[Ref. 6; p. 318-327]. Les pôles en boucle fermée correspondent à la valeur  $k N_e(x_b)$  de ce gain.

Pour que le système linéaire soit stable, il ne doit y avoir aucun pôle en boucle fermée à la droite de l'axe imaginaire que l'on appellera région IV (fig. 2.3). Dans la région II définie par  $-\frac{10}{3}\omega_b \leq \alpha < -\frac{1}{3}\omega_b$ , les pôles en boucle fermée donneront naissance à des signaux exponentiels ayant une constante de temps inférieure à  $T_b/2$  et dont la transmission par le système réel ne sera pas linéaire.

Dans la région I à gauche de  $-\frac{10}{3}\omega_b$ , les résidus des pôles en boucle fermée sont négligeables par rapport aux pôles dominants de la région III définie par  $-\frac{1}{3}\omega_b \leq \alpha < 0$ . Pour le système réel, ces pôles donnent naissance à des signaux exponentiels ayant une constante de temps inférieure à  $T_b/20$ . Ils sont donc transmis de façon non uniforme par le relais (cf paragraphe précédent). Ils modifieront l'instant de commutation du relais moins d'une fois sur cinq. Ils ne seront donc pas transmis en général. Dans le cas où leur transmission est effective, ils seront largement atténués par le système à la sortie du relais. On peut donc considérer que les pôles de la région I sont négligeables autant du point de vue du système non linéaire que de son système linéaire associé.

Quant aux pôles de la région III, ils correspondent à des modes dont la transmission par le relais s'effectue bien avec le gain équivalent linéaire  $N_e(x_b)$ .

Remarquons finalement que l'addition d'un zéro à la fonction de transfert en boucle ouverte n'affecte en rien la régionalisation établie. En effet, la dérivée d'une sinusoïde est une autre sinusoïde de même pulsation et celle d'une exponentielle est une autre exponentielle de même constante de temps. On pourra donc utiliser cette propriété pour compenser les pôles de la région II.

En conclusion, pour qu'il y ait équivalence entre les deux systèmes des

figures 2.1 et 2.2, les deux conditions d'amplitude et pulsation (1.7 et 1.12) doivent être vérifiées. Pour cela, il est nécessaire de compenser les pôles de la région II et de négliger dans la fonction de transfert équivalente obtenue les pôles de la région I.

#### 2.4 STABILITE DU SYSTEME LINEAIRE EQUIVALENT

Considérons  $N_e(x_b)$  (Fig. 2.2) comme un élément à gain variable, pur et sans déphasage, qui permet de construire le lieu des racines analysé précédemment.

Pour le système non linéaire en oscillation libre de la figure 2.1, une augmentation du gain  $k$  entraîne une augmentation proportionnelle de l'amplitude  $x_b$  du cycle limite et par conséquent, une diminution proportionnelle du gain équivalent  $N_e(x_b)$ . Le produit  $kN_e(x_b)$  reste donc constant. Par conséquent, si une instabilité se produit dans la fonction de transfert du système à commander, la dynamique globale du système linéaire n'en sera pas affectée, mais par contre l'amplitude de l'oscillation résiduelle ajoutée à la sortie variera.

Une graduation hypothétique du lieu des racines en  $N_e(x_b)$  fait apparaître une branche instable dans la région IV pour  $N_e(x_b) > N_b(x_b)$ , inégalité qui n'est jamais vérifiée pour les organes non linéaires couramment utilisés. Les modes instables ne peuvent donc apparaître que s'il existe des branches du lieu des racines dans la région IV pour des valeurs de  $N_e$  inférieures à  $N_b$ , de telles configurations seront donc à éviter [Ref. 6; p. 325].

#### Conclusion

Le système non linéaire en oscillation libre représenté à la figure 2.1 est un système stable pour les non-linéarités usuelles. Lorsque son lieu des racines ne possède pas de pôles dans la région II définie par  $-10 \omega_b/3 < \alpha < -\omega_b/3$ , (ou s'ils sont compensés) et que le cycle limite vérifie les conditions précédemment

énumérées [§ 2.3], on peut alors remplacer l'étude de la caractéristique "entrée-sortie" de ce système par l'étude de la fonction de transfert du système linéaire équivalent représenté à la figure 2.2.

## Chapitre III

### PROBLEME DE L'ADAPTATION PARAMETRIQUE

#### ET DE L'IDENTIFICATION

Le système analysé comporte, comme dans la majorité des systèmes adaptatifs, deux branches de retour; il possède donc une boucle externe ou globale et une boucle interne, siège de l'oscillation libre.

En utilisant le système linéaire équivalent, nous montrerons que la fonction de transfert en boucle ouverte, de la boucle interne, est soumise à une contrainte dans le plan de Black. L'introduction de la régulation des paramètres du cycle limite étendra cette contrainte jusqu'à une certaine insensibilisation de la fonction de transfert de cette boucle. Un choix judicieux de la pulsation  $\omega_f$  désirée complètera cette insensibilisation en permettant une compensation automatique des variations des paramètres perturbateurs. Une identification de ces mêmes paramètres se déduira immédiatement du processus de compensation.

#### 3.1 PROPRIETE DE LA BOUCLE INTERNE DU SYSTEME EQUIVALENT

Considérons la boucle de commande représentée à la figure 3.1, comprenant

dans la branche directe de la boucle interne un réseau correcteur  $H(p)$ , un relais  $N$ , un système à commander  $L(p)$  et dans le retour un réseau correcteur  $H_2(p)$ .

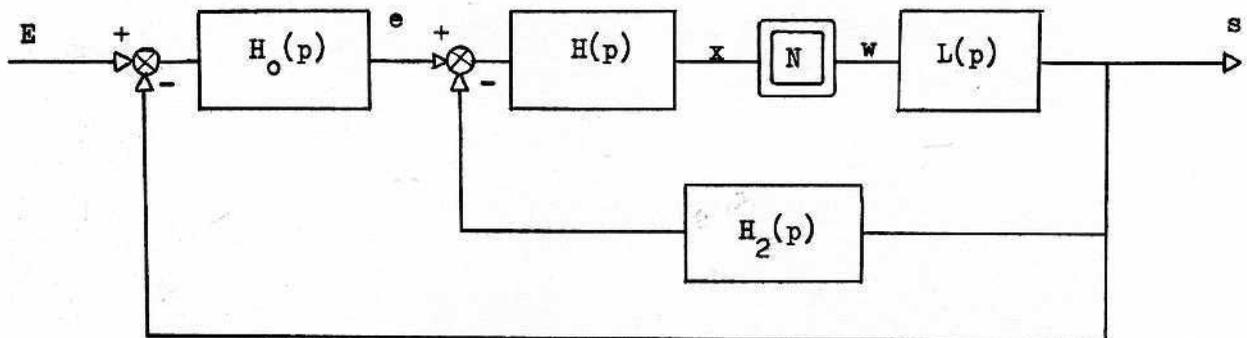


Figure 3.1 Boucle de commande.

La boucle externe possède un filtre  $H_0(p)$  dont le rôle sera précisé ultérieurement (tel que les conditions d'amplitude et de pulsation soient réalisées).

L'étude du comportement de la boucle interne va se faire en utilisant son modèle linéaire équivalent.

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit:

$$O(j\omega) = N_e(x_b) H(j\omega) H_2(j\omega) L(j\omega)$$

Traçons dans le plan de Black le lieu de cette fonction, où de même qu'au chapitre précédent nous considérons  $N_e(x_b)$  comme un gain (pur et sans déphasage) variable.  $N_e(x_b)$  produit une translation verticale du lieu  $O(j\omega)$  dans le plan de Black [Ref. 7]

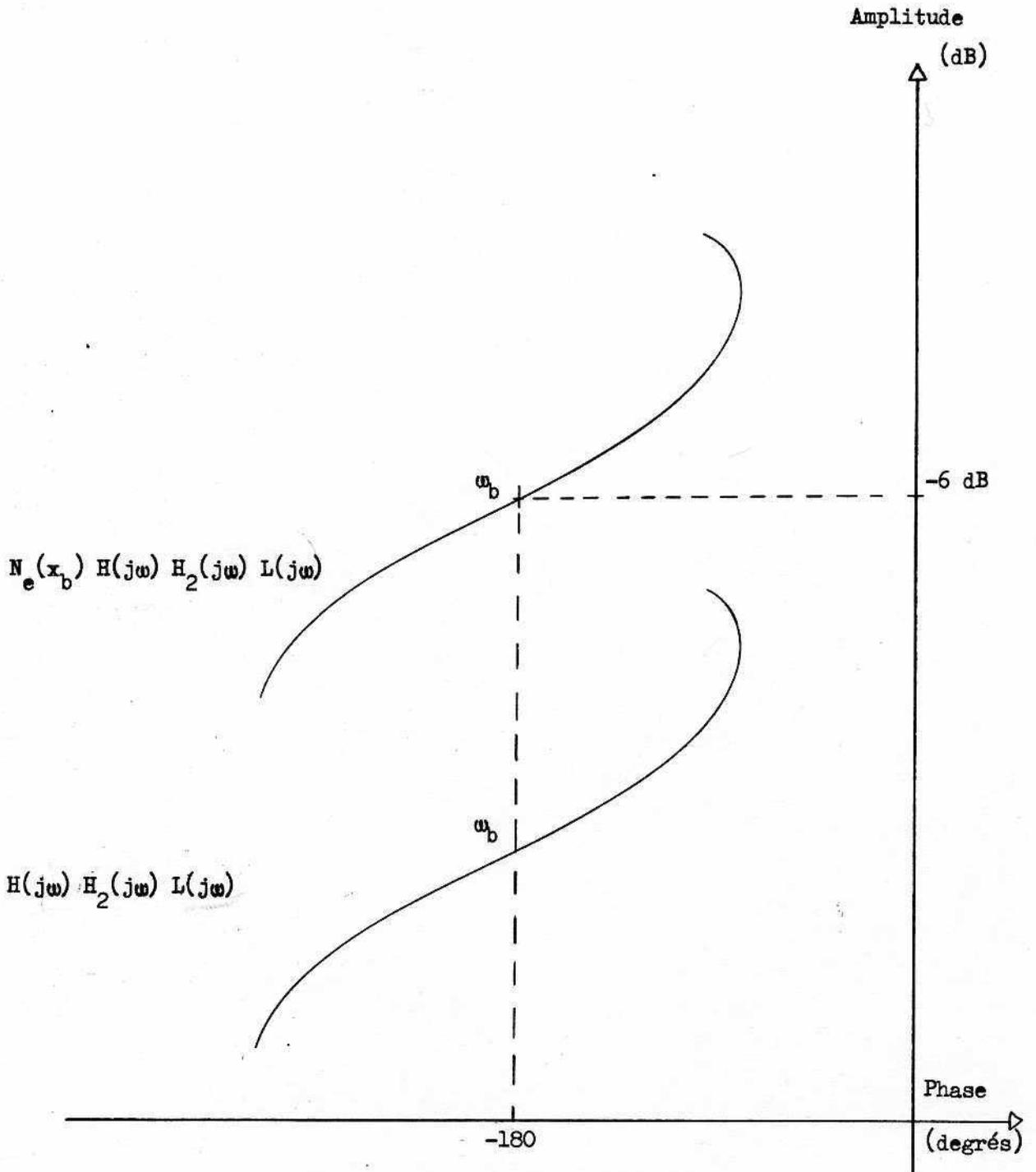


Figure 3.2 Lieu de Black associé au système linéaire équivalent.

Les paramètres  $x_b$  et  $\omega_b$  de l'oscillation libre sont donnés par l'équation:

$$N_b(x_b) H(j\omega_b) H_2(j\omega_b) L(j\omega_b) = -1. \quad (3.1)$$

Pour les non-linéarités considérées au chapitre I, la relation (1.9) est toujours vérifiée:  $N_b = 2N_e$ .

L'équation (3.1) devient alors:

$$O(j\omega_b) = N_e(x_b) H(j\omega_b) H_2(j\omega_b) L(j\omega_b) = -\frac{1}{2} ;$$

cette relation montre que dans le plan de Black (fig. 3.2), la fonction de transfert en boucle ouverte passe obligatoirement par le point  $(-6\text{dB} ; -180^\circ)$  pour  $\omega = \omega_b$ .

Cette contrainte va être le point de départ du phénomène d'adaptation que nous allons exploiter.

## 3.2 PROBLEME DE L'INSENSIBILISATION PARAMETRIQUE

### 3.2.1 Position du problème

Le système à commander dépend généralement d'un ou plusieurs paramètres variables  $\xi$ . Soit  $L(p, \xi)$  sa fonction de transfert. Les variations de  $\xi$  sont reliées à celles de grandeurs telles que la charge, la température, la pression statique ou dynamique, etc...

Le problème est de réussir à obtenir une commande insensible à cet environnement, aussi simple que celle que l'on pourrait établir pour un système linéaire.

Le critère pour atteindre ce but sera l'égalité:

$$\frac{\text{Entrée}}{\text{Sortie}}(p, \xi) = \frac{\text{Entrée}}{\text{Sortie}}(p), \quad (3.2)$$

où le deuxième membre représente la fonction de transfert invariable désirée.

### 3.2.2 Mécanisme de l'insensibilisation

L'oscillation libre qui existe dans la boucle est solution de l'équation caractéristique:

$$N_b(x_b) H(j\omega_b) L(j\omega_b, \xi) = -1, \quad (3.3)$$

où nous avons posé  $H(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega)$ .

Elle est donc fonction du paramètre  $\xi$  et s'écrit par conséquent à l'entrée du relais  $N$  :  $x_b(\xi) \sin \omega_b(\xi)t$ .

Si on maintient les grandeurs  $x_b(\xi)$  et  $\omega_b(\xi)$  égales à des références fixes  $x_f$  et  $\omega_f$  en modifiant le niveau  $M$  de la sortie du relais et les paramètres du réseau correcteur  $H(p)$ , le lieu de  $O(j\omega, \xi)$  sera assujéti à passer par le point  $(-6\text{dB} ; -180^\circ)$  pour la pulsation  $\omega = \omega_f$ . Les variations de  $O(j\omega, \xi)$  sont alors limitées, ce qui se traduit par une certaine insensibilisation de la commande aux variations des paramètres perturbateurs.

Le processus d'identification nécessaire à toute adaptation est ici remplacé par la régulation permanente de  $\omega_b(\xi)$  et de  $x_b(\xi)$ . Il n'y a donc qu'une pseudo-identification. Si on se limite à cette pseudo-identification, le critère (3.2) ne sera alors qu'approché. Toutefois, nous verrons que dans la majorité des cas pratiques, la régulation des paramètres du cycle limite peut entraîner une identification complète des grandeurs inconnues.

### 3.3 COMPENSATION AUTOMATIQUE AVEC IDENTIFICATION

La contrainte précédente suffit à assurer une insensibilité totale au système lorsque le gain est le seul paramètre perturbateur [Ref. 6; pp 335-343]. Elle est cependant insuffisante dès qu'il existe une constante de temps variable. Un processus de compensation automatique peut être développé dans ce cas par un

choix judicieux de la pulsation désirée  $\omega_f$  pour l'oscillation.

### 3.3.1 Schéma de la compensation

Nous avons représenté en 3.1 le schéma de la régulation des paramètres de l'oscillation libre.

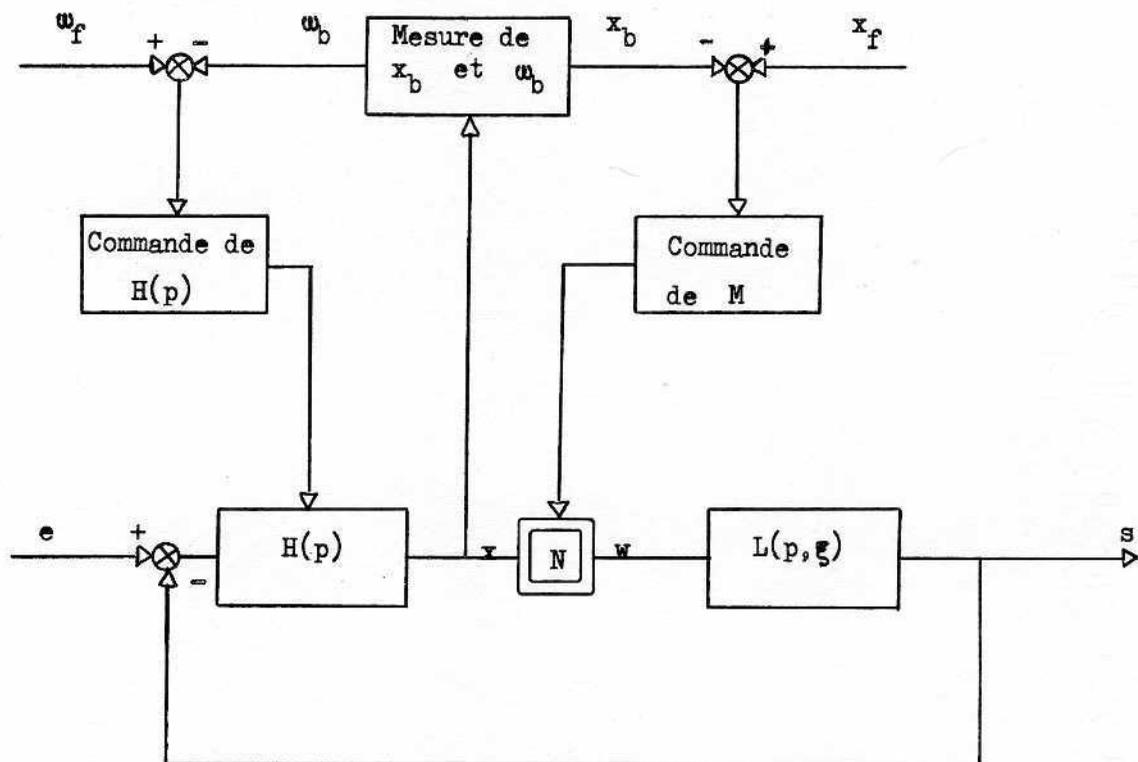


Schéma 3.1 Régulation des paramètres du cycle limite.

Différents cas de systèmes à asservir, qui vont être étudiés successivement, peuvent se présenter:

- à gain variable,

- à constante de temps variable,
- à zéro variable,
- ou une combinaison quelconque des cas précédents.

### 3.3.2 Système à gain variable

La fonction de transfert du système à asservir est alors de la forme

$$L(p, \xi) = \xi L_1(p) .$$

L'équation caractéristique (3.3) devient:

$$\xi \frac{4M}{\pi x_b} H(j\omega_b) L_1(j\omega_b) = -1 .$$

Elle se décompose en deux relations:

$$\angle H(j\omega_b) L_1(j\omega_b) = -180^\circ , \quad (3.4)$$

$$\text{et } \xi \frac{4M}{\pi x_b} | H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) | = 1 . \quad (3.5)$$

Tous les paramètres de  $L_1(p)$  sont fixes et supposés connus. Il suffit de déterminer un réseau correcteur approprié afin de fixer définitivement  $\omega_b$  à la valeur désirée  $\omega_f$ . Dans ce cas, il n'est donc pas nécessaire de réguler la pulsation du cycle limite.

$$\text{Posons } O(p) = H(p) L_1(p) .$$

La relation (3.5) devient alors:

$$\frac{4M}{\pi x_b} \xi = \frac{1}{|O(j\omega_f)|}$$

où  $M$  est le niveau de la sortie du relais. C'est cette grandeur que nous allons commander pour réguler l'amplitude du cycle limite  $x_b$  à la valeur désirée  $x_f$ .

En régime permanent nous aurons donc:

$$\frac{4M}{\pi x_f} \xi = \frac{1}{|O(j\omega_f)|} \quad (3.6)$$

L'interprétation de cette égalité est importante: nous pouvons remarquer que son deuxième membre est une quantité fixe et connue, et que son premier membre est le double du gain équivalent en boucle ouverte  $\xi N_e(x_b)$  qui est donc également une quantité fixe.

Nous obtenons la fonction de transfert suivante pour le système linéaire équivalent:

$$\frac{E}{S}(p, \xi) = \frac{O(p)}{O(p) + 2|O(j\omega_f)|},$$

fonction qui est indépendante du paramètre variable  $\xi$ .

Nous avons précédemment observé que l'obtention d'une telle identité n'était possible que s'il y avait un processus d'identification. En effet, l'équation (3.6) montre qu'en régime permanent  $\xi$  est identifié par la quantité  $\pi x_f / 4M |O(j\omega_f)|$ .

Le niveau  $M$  de la sortie du relais est donc une variable d'identification:

$$M = \frac{\alpha}{\xi},$$

avec un régime permanent

$$\alpha = \text{cte} = \frac{\pi x_f}{4|O(j\omega_f)|}.$$

### 3.3.3 Système à constante de temps variable

La fonction de transfert est de la forme:

$$L(p, \xi) = \frac{L_1(p)}{1 + \xi p}$$

$$\text{Posons } H(p) = (1 + \lambda p) H_1(p).$$

L'équation caractéristique devient alors:

$$\frac{4M}{\pi x_b} \cdot \frac{1 + j\lambda\omega_b}{1 + j\xi\omega_b} H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) = -1 ;$$

équation qui elle-même se décompose en deux relations:

$$\angle \frac{1 + j\lambda\omega_b}{1 + j\xi\omega_b} H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) = -180^\circ , \quad (3.7)$$

$$\text{et } \frac{4M}{\pi x_b} \left| \frac{1 + j\lambda\omega_b}{1 + j\xi\omega_b} H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) \right| = 1 . \quad (3.8)$$

Nous allons faire apparaître la possibilité d'identification par l'étude de la relation (3.7) qui s'écrit après transformation:

$$\text{arc tg } \frac{(\xi - \lambda)\omega_b}{1 + \lambda\xi\omega_b^2} = \pi + \angle H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) . \quad (3.9)$$

La pulsation  $\omega_b$  du cycle limite est solution de cette équation.  $L_1(p)$  est entièrement connu. Il est possible de réguler  $\omega_b$  en commandant le paramètre  $\lambda$  de  $H(p)$  de telle manière qu'on ait en régime permanent  $\omega_b = \omega_f$  pulsation de référence désirée. A ce moment-là  $\omega_f$  sera solution de l'équation (3.9). Si  $H_1(p)$  est choisi tel que le deuxième membre de cette équation s'annule pour  $\omega = \omega_f$  nous aurons alors en régime permanent:

$$\text{arc tg } \frac{(\xi - \lambda)\omega_f}{1 + \lambda\xi\omega_f^2} = 0 ,$$

c'est-à-dire  $\lambda = \xi$ .

Par conséquent, pour ce choix de  $H_1(p)$ , la commande du paramètre  $\lambda$  dans le but de réguler  $\omega_b$  à la valeur  $\omega_f$  procure en régime permanent l'identification de la constante de temps inconnue  $\xi$  par le paramètre  $\lambda$ .

D'autre part, du point de vue du système linéaire équivalent, le pôle inconnu et variable  $-1/\xi$  est compensé par le zéro  $-1/\lambda$ .

Considérons maintenant la relation d'amplitude (3.8). Elle s'écrit en régime permanent:

$$\frac{4M}{\pi x_f} = \frac{1}{|H_1(j\omega_f) L_1(j\omega_f)|}$$

Lorsque  $\omega_b$  est différent de  $\omega_f$ ,  $x_b$  est évidemment différent de  $x_f$ ; cependant, une régulation de  $x_b$  n'est pas nécessaire et comme le montre la relation précédente, la régulation de  $\omega_b$  à  $\omega_f$  suffit.

Posons comme précédemment:

$$O(p) = H_1(p) L_1(p),$$

fonction de transfert en boucle ouverte (pendant le régime permanent de régulation) dont tous les paramètres sont connus.

Le gain équivalent en boucle ouverte  $N_e(x_f)$  du système linéarisé vaut,

$$N_e(x_f) = \frac{1}{2|O(j\omega_f)|}$$

La fonction de transfert du système linéaire équivalent s'écrit alors:

$$\frac{E}{S}(p, \xi) = \frac{O(p)}{O(p) + 2|O(j\omega_f)|}; \text{ c'est-à-dire l'identité stricte (3.2).}$$

En conclusion, un choix judicieux du réseau correcteur  $H(p)$  dont un des zéros est commandé pour réguler la pulsation  $\omega_b$ , permet d'obtenir une adaptation paramétrique parfaite du système qui se traduit par une compensation et une identification simultanée du pôle variable  $-1/\xi$ .

### 3.3.4 Système dont la fonction de transfert possède un zéro variable

La fonction de transfert est de la forme  $L(p, \xi) = (1 + \xi p) L_1(p)$ .

On pose alors:

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + \lambda p} .$$

La méthode est ensuite strictement identique à la précédente et conduit à une conclusion similaire.

### 3.3.5 Système à gain et constante de temps variables

$L(p, \xi)$  est donné par:

$$L(p, \xi) = \frac{\xi_1}{1 + \xi_2 p} L_1(p) .$$

Les variations de  $\xi_1$  n'ont aucune répercussion sur la pulsation du cycle limite; la régulation de  $\omega_b$  est la même que celle décrite au paragraphe 3.3.3. On suppose ensuite que cet asservissement est suffisamment rapide par rapport à celui qui va être effectué sur  $x_b$ , de telle manière que l'on puisse considérer que ce dernier est indépendant de  $\xi_2$ . La régulation de  $x_b$  est dans ce cas identique à celle décrite au paragraphe 3.3.2.

La fonction de transfert  $\frac{E}{S}(p, \xi)$  est donc identique à celles précédemment trouvées:

$$\frac{E}{S}(p, \xi) = \frac{O(p)}{O(p) + 2|O(j\omega_f)|} ,$$

en posant:

$$H(p) = (1 + \lambda p) H_1(p) ,$$

et 
$$O(p) = H_1(p) L_1(p) .$$

Elle est indépendante de  $\xi_1$  et de  $\xi_2$ .

### 3.4 REMARQUE SUR L'IDENTIFICATION

L'analyse précédente n'est pas une méthode d'identification, mais une méthode de compensation automatique. Il se trouve qu'elle fait apparaître un processus d'identification et peut par conséquent être utilisée à cette fin. L'identification des grandeurs inconnues se fera donc par l'intermédiaire de la régulation des paramètres du cycle limite. Il n'est pas nécessaire, à ce moment-là, que cette régulation soit automatique; elle pourra être effectuée manuellement, par la commande d'un potentiomètre. Elle permet d'identifier, sans calcul postérieur, par simple lecture du paramètre noté  $\lambda$ , une constante de temps ou un zéro de la fonction de transfert du système à asservir, et par l'intermédiaire d'une simple règle de trois, son gain.

Cette méthode présente un net avantage de simplicité; il semblerait cependant qu'elle soit limitée à l'identification de fonction de transfert possédant un seul paramètre inconnu en plus du gain. Toutefois, nous allons montrer qu'au moyen d'essais successifs, elle peut permettre l'identification de fonction de transfert possédant plusieurs paramètres inconnus.

$$\text{Soit } L(p, \xi) = L_1(p)/(1 + \xi_1 p)(1 + \xi_2 p),$$

où  $\xi_1$  et  $\xi_2$  sont deux constantes de temps réelles ou complexes.

Deux réseaux correcteurs sont alors utilisés:

$$H(p) = (1 + \lambda p) H_1(p),$$

$$H'(p) = (1 + \lambda' p) H'_1(p).$$

L'équation caractéristique (3.3) devient successivement:

$$\text{arc tg } \frac{(\xi_1 + \xi_2)\omega_b}{1 - \xi_1 \xi_2 \omega_b^2} - \text{arc tg } \lambda \omega_b = \pi + \angle H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b), \quad (3.10)$$

$$\text{arc tg } \frac{(\xi_1 + \xi_2)\omega'_b}{1 - \xi_1 \xi_2 \omega'^2_b} - \text{arc tg } \lambda' \omega'_b = \pi + \angle H'_1(j\omega'_b), L_1(j\omega'_b), \quad (3.11)$$

suivant que l'on utilise le réseau correcteur  $H(p)$  ou  $-H'(p)$ .

$H_1(p)$  est choisi tel que le deuxième membre de (3.10) s'annule pour  $\omega_b = \omega_f$  et  $H'_1(p)$  tel que le deuxième membre de (3.11) s'annule pour  $\omega'_b = \omega'_f$ . Au premier essai nous asservirons  $\omega_b$  à la valeur  $\omega_f$  et au deuxième à la valeur  $\omega'_f$ .

Une méthode de procéder peut être de commander  $\lambda$  manuellement jusqu'à ce que  $\omega = \omega_f$ ;  $\omega_f$  et  $\omega'_f$  seront choisis de telle manière qu'il existe deux valeurs  $\lambda$  et  $\lambda'$  faciles à obtenir en pratique.

Après les essais, l'identification nécessite la résolution préliminaire du système à deux inconnues  $\xi_1 + \xi_2$  et  $\xi_1 \xi_2$ :

$$(\xi_1 + \xi_2) + \lambda \omega_f^2 (\xi_1 \xi_2) = \lambda,$$

$$(\xi_1 + \xi_2) + \lambda' \omega'^2_f (\xi_1 \xi_2) = \lambda',$$

qui admet une solution non banale pour  $\lambda \omega_f^2 \neq \lambda' \omega'^2_f$ .

Nous obtiendrons:

$$\xi_1 + \xi_2 = S = \lambda \lambda' \frac{\omega_f^2 - \omega'^2_f}{\lambda \omega_f^2 - \lambda' \omega'^2_f},$$

$$\xi_1 \xi_2 = P = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda \omega_f^2 - \lambda' \omega'^2_f}.$$

$\xi_1$  et  $\xi_2$  seront racines de l'équation du deuxième degré:

$$\xi^2 - S\xi + P = 0$$

Cette méthode peut s'étendre à l'identification de plus de deux pôles; toutefois, les calculs postérieurs aux essais de mesure augmentent en volume. Elle peut

s'adapter également à l'identification d'un pôle et d'un zéro, ou de toute autre combinaison.

### 3.5 CONCLUSION SUR L'ADAPTATION

Considérons le fonctionnement d'ensemble du système représenté à la figure 3.1 pour mettre en relief les contraintes qui nous sont imposées:

- La première nécessité est l'existence en tout temps du cycle limite procurée par le choix du réseau correcteur  $H(p)$ .
- L'organe non linéaire doit être tel qu'il entraîne la propriété d'insensibilité mise en évidence dans le plan de Black. Ce sera donc un relais dont le seuil et l'hystérésis seront limités par les inégalités (1.7). Il est à noter que ce relais peut ne pas être un organe de puissance.
- En vue d'obtenir un cycle limite indépendant de l'entrée, la solution de l'équation caractéristique doit être indépendante de  $x_e$ , ce qui est obtenu par la condition d'amplitude  $|x_e|/x_b < 1/3$ . D'autre part, cette condition procure également une bonne linéarisation du gain du relais. Pour que cette condition d'amplitude soit satisfaite, le niveau  $M$  de la sortie du relais doit être supérieur à une limite que nous allons évaluer: Supposons que la fonction de transfert du système à asservir possède un pôle d'ordre  $n$  à l'origine. La boucle interne est alors destinée à suivre des entrées de la forme  $at^n$ . Pour que la pseudo-erreur d'accélération soit finie, la sortie du relais en régime permanent  $W_e(t)$  doit être égale à  $a/k$  ( $k$ : gain statique du système à asservir); il faut donc que  $M \geq a/k$ ; or en régime permanent:

$$W_e = N_e \cdot x_e = \frac{2M}{\pi} \text{arc Sin } \frac{x_e}{x_b},$$

$$\text{d'où } \frac{x_e}{x_b} = \text{Sin } \frac{\pi a}{2Mk}$$

$$|x_e|/x_b < 1/3 \quad \text{si} \quad \text{Sin} \frac{\pi a}{2Mk} < 1/3$$

$$\text{soit} \quad M > \frac{5a}{k} . \quad (3.12)$$

Cette inégalité procurera une bonne insensibilité du cycle limite par rapport à l'entrée.

- Du point de vue des pôles en boucle fermée de la boucle interne, nous avons vu qu'on devait compenser ceux qui apparaîtraient dans la région II (fig. 2.2).

- Le filtre  $H_o(p)$  servira à modifier le système linéaire équivalent obtenu, en vue des performances désirées. Il agira également en filtre passe-bas, facilitant en permanence l'obtention de la condition (3.12) en atténuant les dérivées d'ordre élevé.

## C h a p i t r e   I V

### EXEMPLE D'APPLICATION: STABILISATION AUTOMATIQUE

#### D'UN MISSILE EN ROULIS

L'utilisation des résultats établis aux chapitres précédents permet l'élaboration d'une méthode pour la mise en oeuvre d'un système de commande adaptatif que nous allons développer dans ce chapitre sur l'étude d'un exemple pratique.

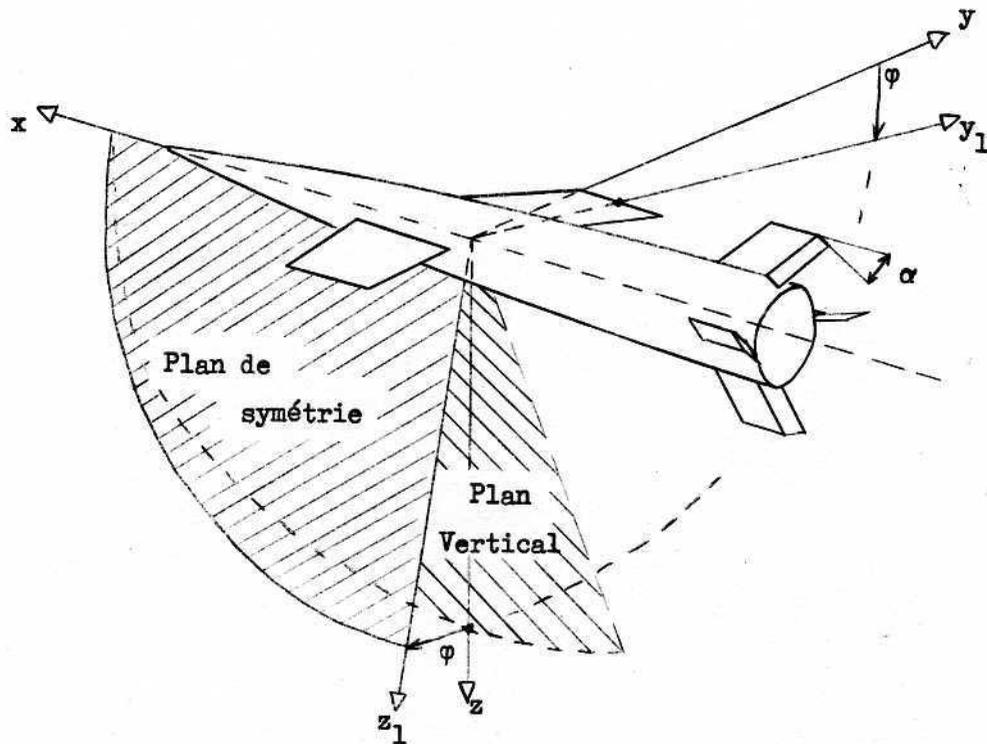
Dans une première partie, on précisera la fonction de transfert du système à asservir et ses paramètres variables, ainsi que le schéma global de la boucle de commande. L'étude de la boucle interne, de son oscillation et de son insensibilisation sera effectuée à la deuxième partie. La troisième sera consacrée à l'analyse de la boucle globale et de ses caractéristiques dynamiques. La régulation des paramètres de l'oscillation libre sera traitée séparément à la quatrième partie.

#### 4.1    PRESENTATION DE L'EXEMPLE

##### 4.1.1    Fonction de transfert du missile

Nous avons choisi comme exemple d'application la stabilisation en roulis

d'un missile auto-guidé, dont l'efficacité des ailerons et la constante de temps de mise en vitesse de roulis sont toutes deux fonctions de l'altitude et de la vitesse.



$Gxyz$ : Trièdre lié à la vitesse

$Gxy_1z_1$ : Trièdre lié au missile

Figure 4.1 Représentation schématique d'un missile en roulis.

L'équation qui régit l'équilibre dynamique en roulis est (fig. 4.1):

$$I_x \dot{q} + L_q \cdot q = L_\alpha \cdot \alpha$$

où:  $\varphi$  est l'angle de roulis,

$q$  est la vitesse de roulis:  $q = d\varphi/dt$  (la vitesse de roulis est habituellement notée "p"; nous l'avons désignée par "q" afin de réserver la lettre p à l'opérateur de Laplace).

$\alpha$  : angle de braquage des ailerons.

$L_\alpha = \partial L / \partial \alpha$  où  $L$  est le moment aérodynamique de roulis.

$L_q = \partial L / \partial q$ .

$I_x$  : Moment d'inertie longitudinal.

On obtient pour fonction de transfert du système à asservir:

$$\frac{\Phi}{\alpha} = \frac{K}{p(1 + T_r p)}$$

avec:

$T_r = \frac{I_x}{L_q}$  constante de temps de mise en vitesse de roulis,

$K = L_\alpha / L_q$  gain en vitesse de roulis.

Les variations de  $K$  et  $T_r$  pour trois missions typiques d'un missile air-air à voilure cruciforme évoluant à altitude constante sont respectivement représentées aux figures 4.2.a et 4.2.b [Ref. 8].

Le problème est donc de réaliser une commande automatique de roulis insensible à ces variations de telle manière que l'asservissement en présence de perturbations ait toujours les mêmes caractéristiques dynamiques.

Nous nous limiterons aux spécifications suivantes:

- oscillation résiduelle en roulis inférieure à  $10^0$ ,
- temps de réponse en roulis sur une entrée en échelon de l'ordre de 5 secondes.

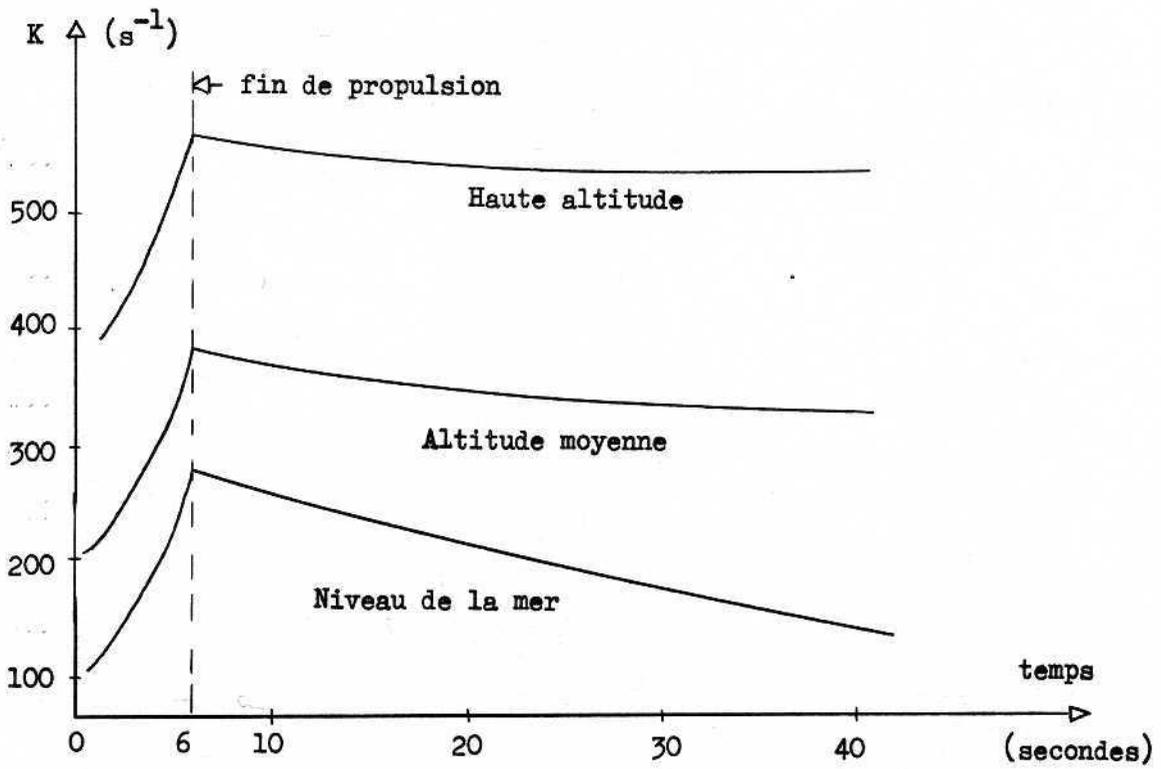


Figure 4.2.a Gain de vitesse de roulis.

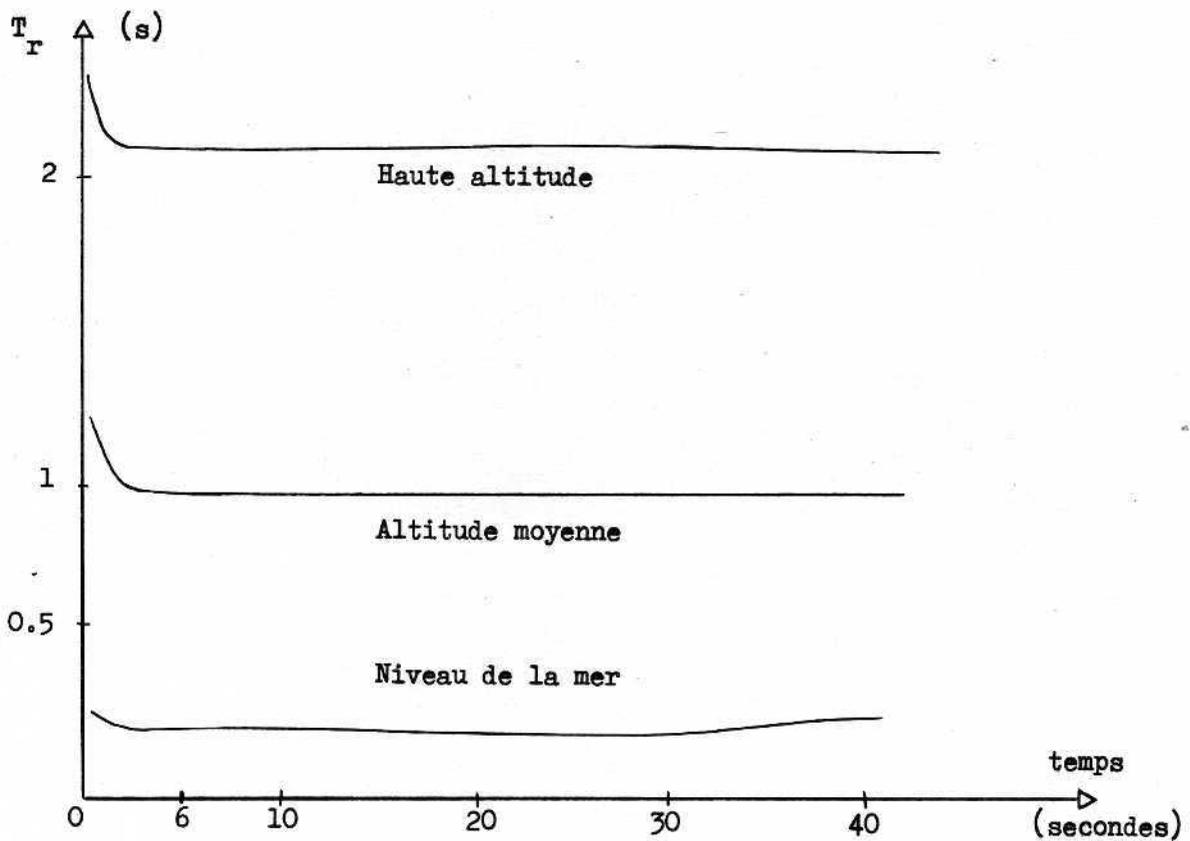


Figure 4.2.b Constante de temps de mise en vitesse de roulis.

La largeur de bande globalement nécessaire au fonctionnement du missile pour tous les types de mission sera donc de l'ordre de 2 radians/seconde.

#### 4.1.2 Diagramme de la boucle de commande

On a représenté à la figure 4.3 le diagramme de la boucle de commande.

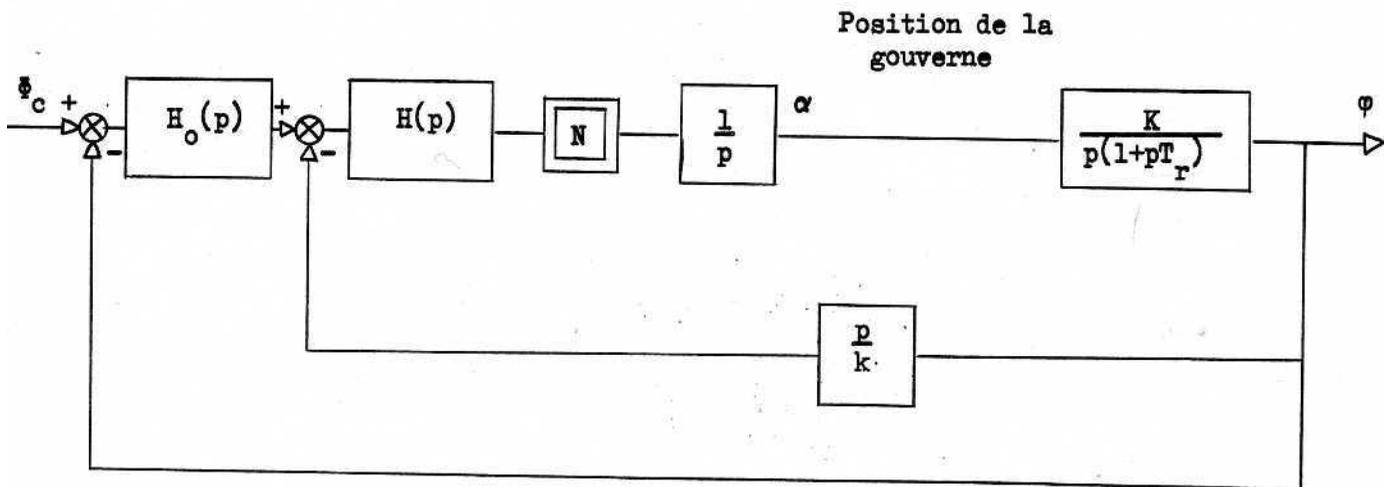


Figure 4.3 Diagramme de la boucle de commande.

- Un vérin hydraulique commande la position de la gouverne  $\alpha$  ; la dynamique du système à asservir fournit l'angle de roulis  $\varphi$  .

- Un gyromètre de gain  $1/k$  est l'organe de retour de la boucle interne, et le retour de la boucle externe s'effectue par l'intermédiaire d'un gyroscope.

Comme dans les chapitres précédents,  $H(p)$  sera le réseau correcteur contrôlant l'oscillant libre, et  $H_0(p)$  celui qui fournira les performances globales du système.

La fonction de transfert  $L(p, \xi)$  qui se présente ici sous la forme

$$L(p, \xi) = \frac{K}{p(1 + pT_r)}$$

possède donc deux grandeurs variables:

$K$  compris entre 100 et 600 ( $s^{-1}$ )

$T_r$  compris entre 0.2 et 2 (s)

## 4.2 ETUDE DE LA BOUCLE INTERNE

### 4.2.1 Diagramme de la boucle interne

En premier lieu, analysons la boucle interne: Le diagramme de la figure 4.3 se transforme facilement en celui représenté à la figure 4.4.

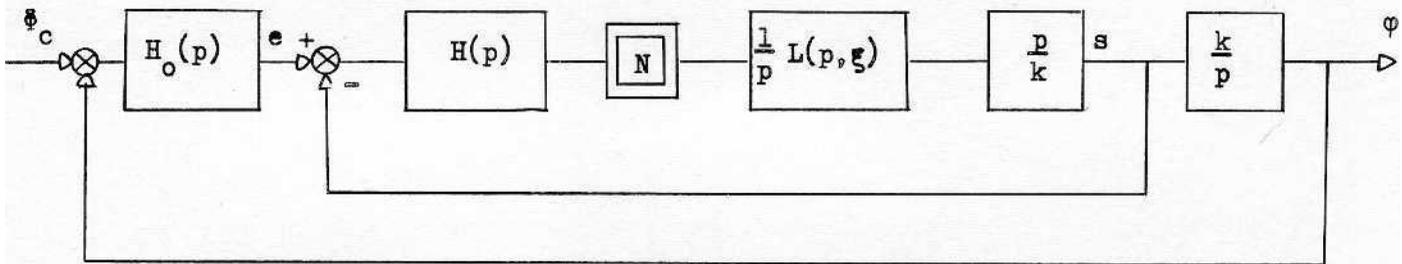


Figure 4.4 Boucle de commande avec retours unitaires.

La boucle interne se présente alors sous la forme simplifiée de la figure 4.5.

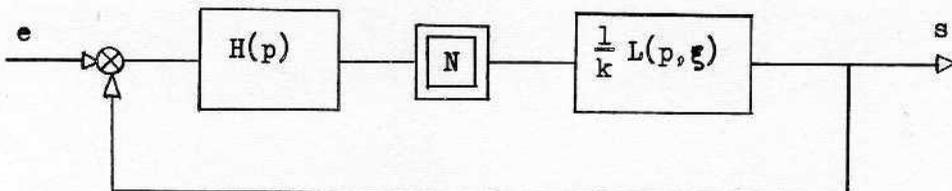


Figure 4.5 Boucle interne du missile.

Sa fonction de transfert sera notée  $G(p, g)$ . Notre objectif est d'arriver à obtenir l'identité approchée.

$$G(p, g) \simeq G(p)$$

Pour cela, nous allons appliquer les méthodes décrites aux chapitres précédents; à savoir: compenser les variations du gain  $K$  et de la constante de temps  $T_r$  par l'intermédiaire de la régulation des paramètres de l'oscillation libre.

#### 4.2.2 Choix du réseau correcteur

En conservant les notations du chapitre précédent, posons:

$$L(p, g) = \frac{K}{1 + T_r p} L_1(p)$$

Avec ici  $L_1(p) = \frac{1}{kp}$

Le réseau correcteur est alors mis sous la forme

$$H(p) = (1 + \lambda p) H_1(p)$$

L'équation caractéristique de la boucle interne nous fournit les deux équations:

$$\text{arc tg} \frac{(T_r - \lambda)\omega_b}{1 + \lambda T_r \omega_b^2} = \pi + \angle H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) \quad (4.1)$$

$$\frac{4MK}{\pi x_b} \left| \frac{1 + j\lambda\omega_b}{1 + jT_r\omega_b} H_1(j\omega_b) L_1(j\omega_b) \right| = 1 \quad (4.2)$$

Nous avons déjà noté que la pulsation  $\omega_f$  désirée doit être au moins 10 fois supérieure à la largeur de bande globalement nécessaire. Nous prendrons donc  $\omega_f = 20$  radians/seconde.

Il nous reste à choisir un réseau correcteur  $H_1(p)$  compatible avec toutes

les contraintes mises en évidence précédemment.

Il doit être tel que le deuxième membre de (4.1) s'annule pour  $\omega_b = \omega_f$  ; par conséquent  $\angle H_1(j\omega_f) = -\frac{\pi}{2}$ .

Nous prendrons pour  $H_1(p)$  un simple deuxième ordre :

$$H_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\eta}{\omega_f} p + \frac{p^2}{\omega_f^2}}$$

Il nous reste à choisir le paramètre  $\eta$ .

Posons comme précédemment  $O(p) = L_1(p) H_1(p)$ .

Nous avons vu au paragraphe (3.3.4) que lorsque la régulation des paramètres de l'oscillation libre est en régime permanent, la fonction de transfert du système linéaire équivalent était donnée par  $G(p) = O(p) / (O(p) + 2|O(j\omega_f)|)$  soit :

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{\eta\omega_f} \left(1 + \frac{2\eta}{\omega_f} p + \frac{p^2}{\omega_f^2}\right)}$$

L'abaque de la figure 4.6 représente les valeurs de  $p_1$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $\eta$  ;  $p_1$  étant le pôle réel de  $G(p)$  et  $p_{2,3} = -\alpha \pm j\beta$  la paire de pôles complexes.

Nous choisirons  $\eta$  tel que :

- $G(p)$  ne possède pas de pôle dans les régions II et IV de la figure 2.2.
- l'amplitude de l'oscillation résiduelle en roulis soit la plus faible possible pour une valeur de  $x_f$  donnée ; en régime permanent cette amplitude vaut

$\frac{2k}{\omega_f \sqrt{1 + \lambda^2 \omega_f^2}} \cdot \eta \cdot x_f$ . Nous avons donc intérêt à prendre un  $\eta$  assez faible.

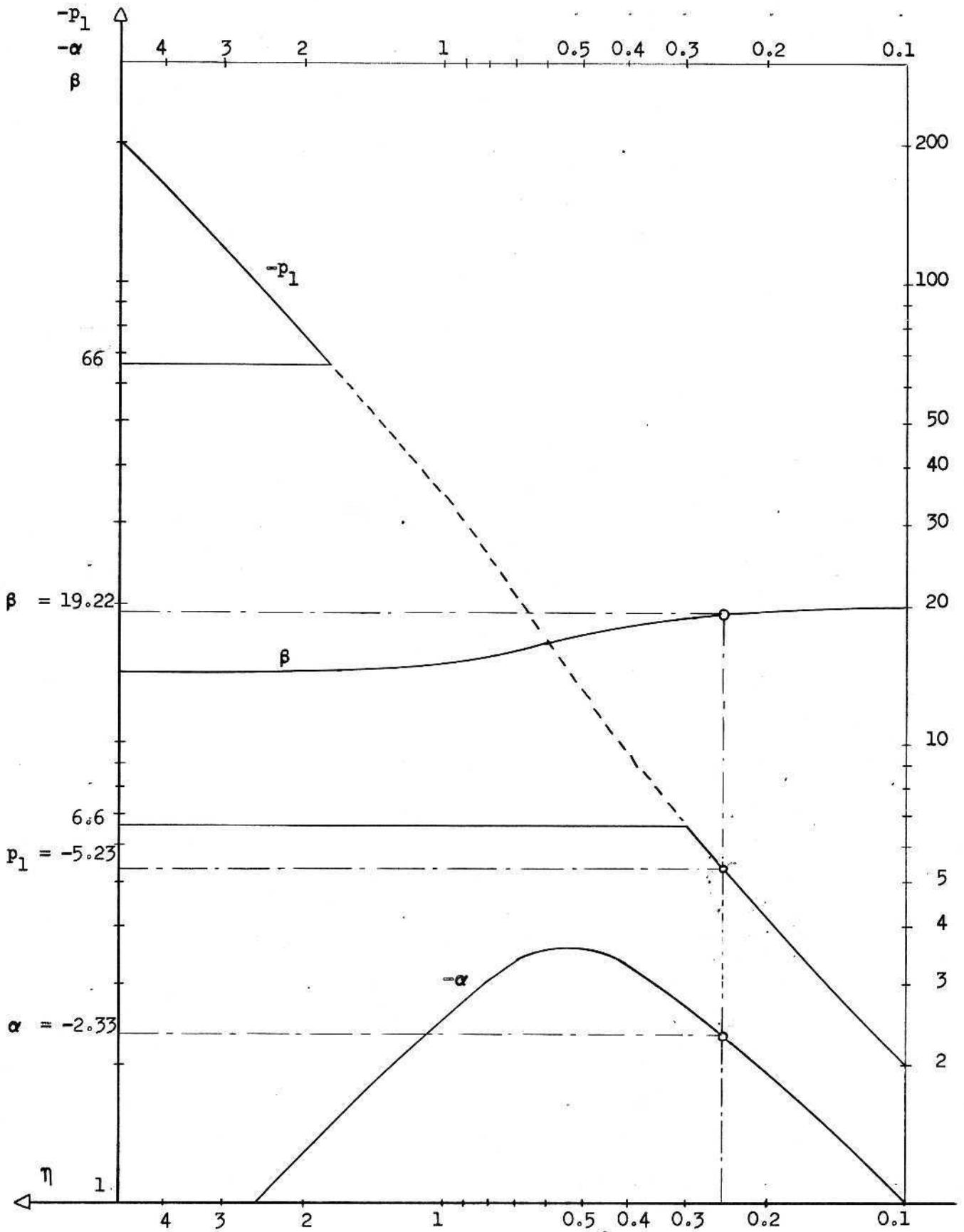


Figure 4.6 Racines de:  $1 + \frac{1}{\eta}(\frac{-p}{20}) + 2(\frac{-p}{20})^2 + \frac{1}{\eta}(\frac{-p}{20})^3$ .

Pour satisfaire ces deux conditions, nous devons prendre  $\eta < 0.3$ . Toutefois, ne pouvant pas prendre de valeurs de  $\eta$  extrêmement petites, qui entraîneraient une diminution rapide de  $\alpha$ , nous nous limiterons à  $\eta = 0.25$ .

#### 4.2.3 Etude de l'insensibilité de la fonction de transfert obtenue

La valeur de  $\eta$  choisie conduit aux pôles de  $G(p)$  suivant:

$$p_1 = -5.23$$

$$p_{2,3} = -2.33 \pm 19.22j$$

Nous obtenons alors pour  $G(p)$

$$G(p) = 1/(1 + 0.19p)(1 + 0.13p + 0.0026p^2) \quad (4.3)$$

Pour étudier le degré d'insensibilité de  $G(p)$ , on a tracé le lieu des racines dans les trois cas suivants:

1) Lorsque la régulation de la fréquence est en régime permanent avec  $\omega_b = \omega_f$  à ce moment-là  $\lambda = T_r$ ; le pôle en boucle fermée  $p_4$  compense exactement le zéro  $-1/\lambda$  (fig. 4.7);  $p_1$  et  $p_{2,3}$  sont respectivement à leur position nominale.

2) Lorsque la régulation en fréquence est imparfaite et que  $\omega_b$  est très peu différent de  $\omega_f$ , on a  $\lambda = T_r \pm \epsilon$  (fig. 4.8 et 4.9). Le pôle  $p_4$  ne compense pas très exactement le zéro  $-1/\lambda$ ; cependant, ce couple peut être négligé.

Pour un écart  $\frac{\lambda - T_r}{\lambda}$  de 10%, les pôles  $p_1$  et  $p_{2,3}$  sont à leur point nominal à moins de 1% près, ce qui corrobore bien la propriété d'insensibilité du système même lorsqu'il n'y a pas identification complète.

Lieu des racines  
cas où  $\lambda = T_I = 1$

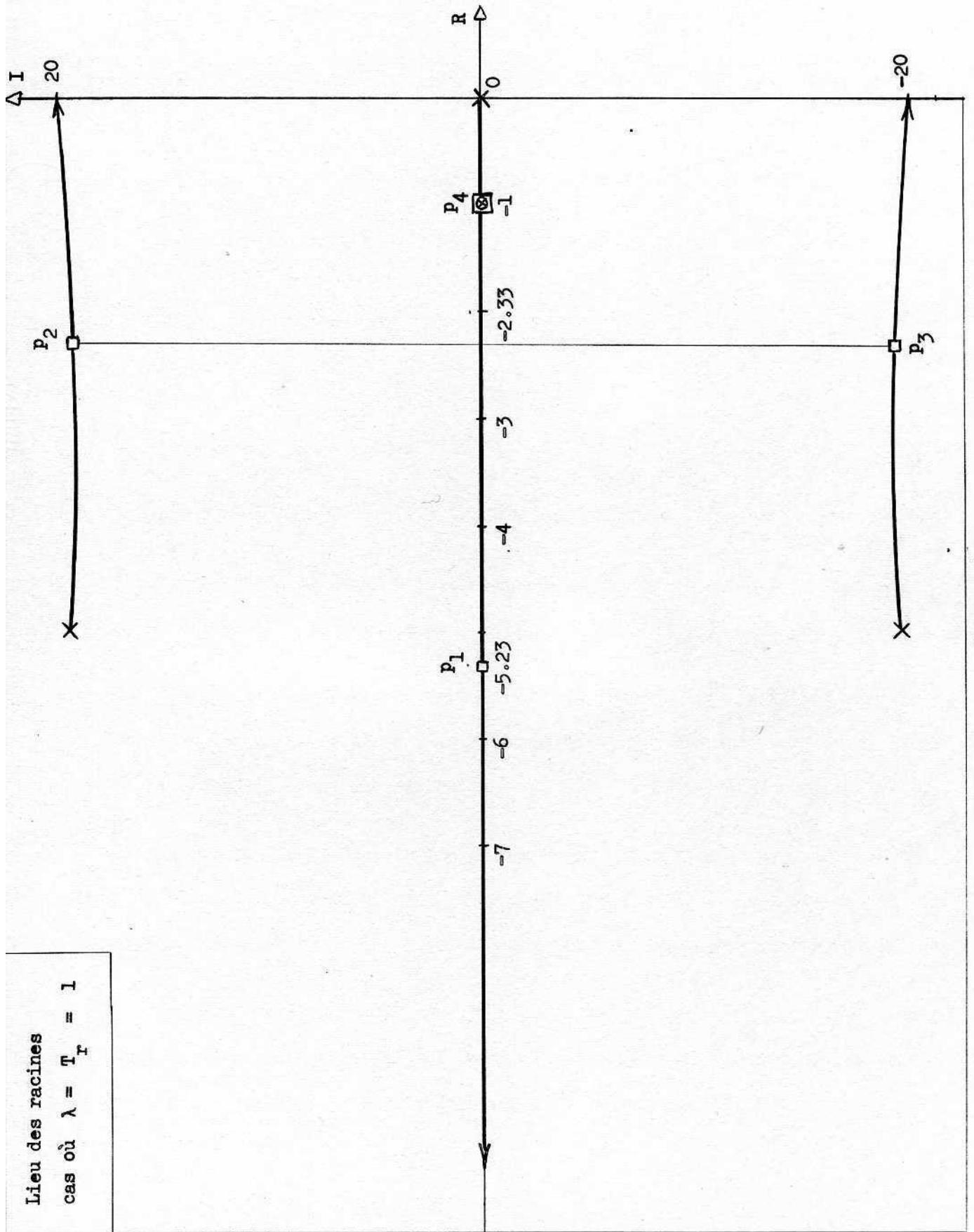


Figure 4.7

Lieu des racines  
cas où  $\lambda = 1 = T_r + \epsilon$

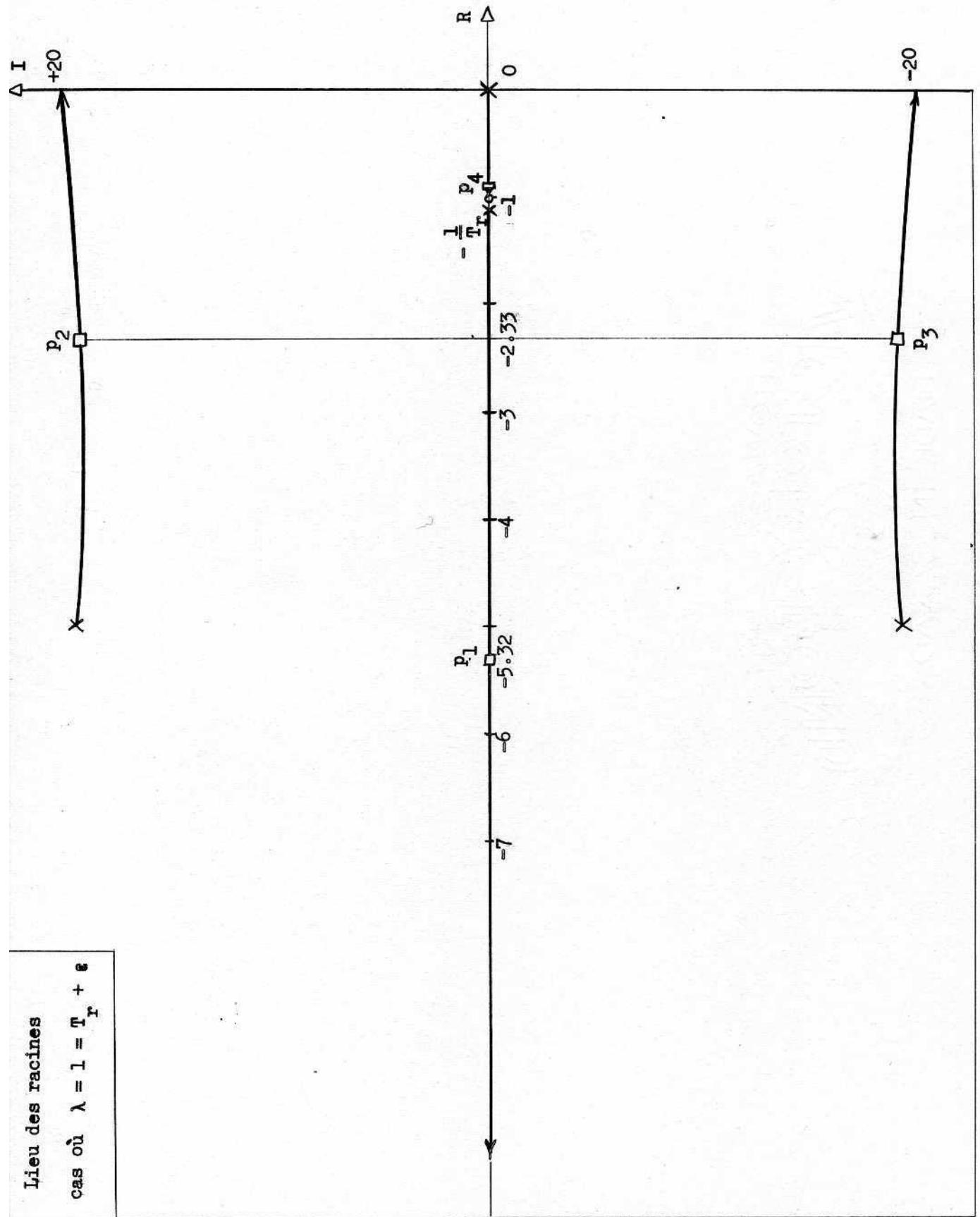


Figure 4.8

Lieu des racines  
cas où  $\lambda = 1 = T_r - \varepsilon$

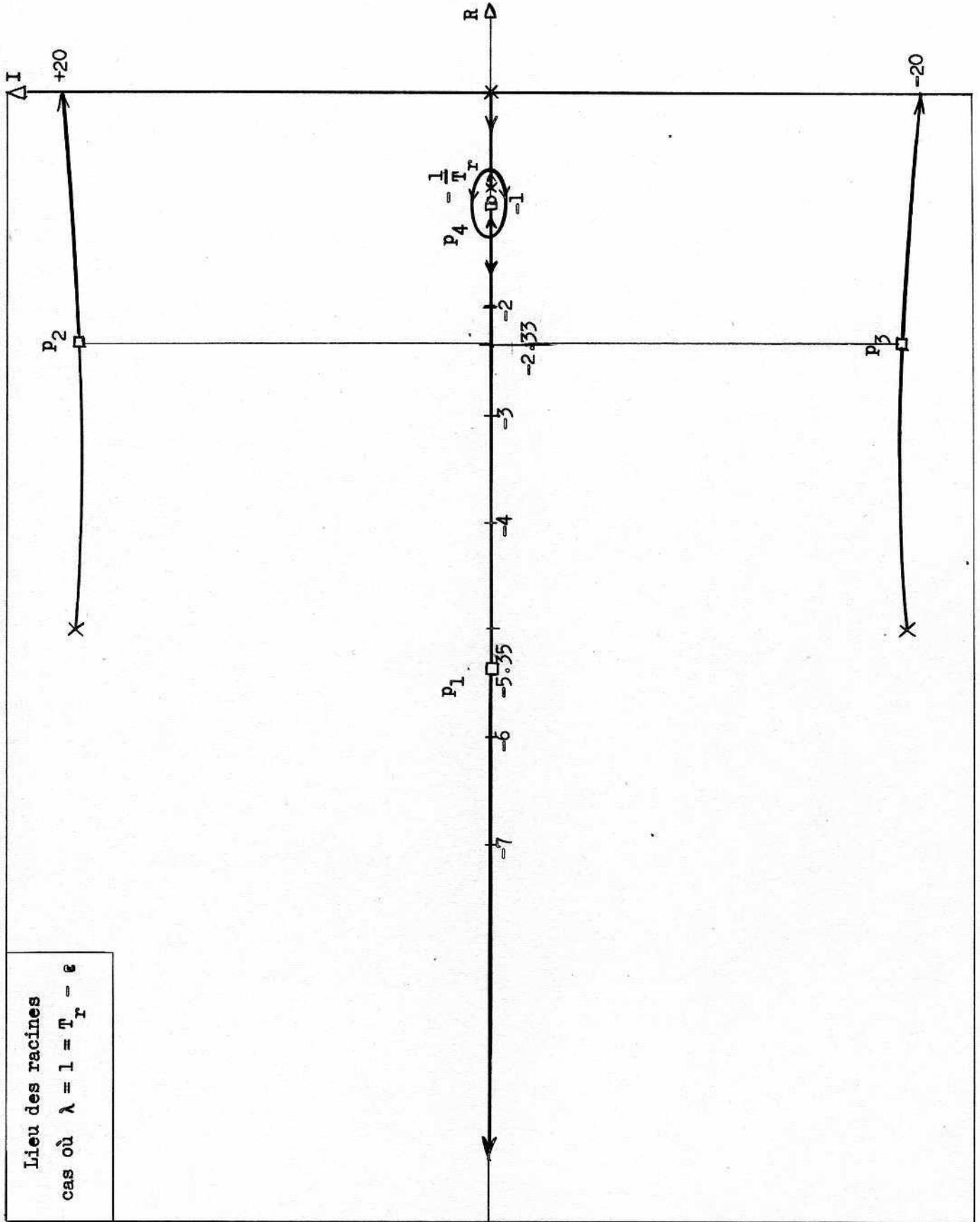


Figure 4.9

### 4.3 ETUDE DE LA BOUCLE EXTERNE

#### 4.3.1 Diagramme équivalent linéaire de la boucle externe

Nous pouvons remplacer dès à présent la boucle interne par la boîte linéaire de fonction de transfert  $G(p)$  définie par l'équation (4.3).

Le schéma de la boucle de commande se ramène alors au diagramme de la figure 4.10.

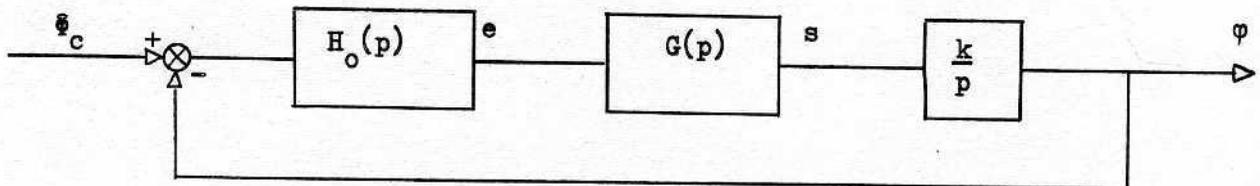


Figure 4.10 Diagramme équivalent linéaire de la boucle externe.

#### 4.3.2 Choix du filtre $H_0(p)$

Il nous reste à préciser la fonction de transfert de  $H_0(p)$  et le gain  $1/k$  du gyromètre pour que la boucle externe soit entièrement définie.

Afin d'obtenir une largeur de bande limitée à 2 radians/seconde, nous allons prendre tout simplement une fonction de transfert du 2<sup>ième</sup> ordre d'amortissement  $z = 0.7$  et de fréquence propre  $\omega_n = 2$  radians/seconde.

Au voisinage de l'origine, le lieu des racines de la boucle externe aura l'allure représentée à la figure 4.11. Nous pouvons voir que pour  $k \geq 2$ , il y a instabilité; pour que la paire de pôles en boucle fermée  $B, B'$  donnent un amortissement suffisant, nous sommes limités à  $k < 0.9$ ; pour que le pôle réel en boucle fermée  $A$  donne une constante de temps assez faible, nous sommes limités à  $k > 0.6$ .

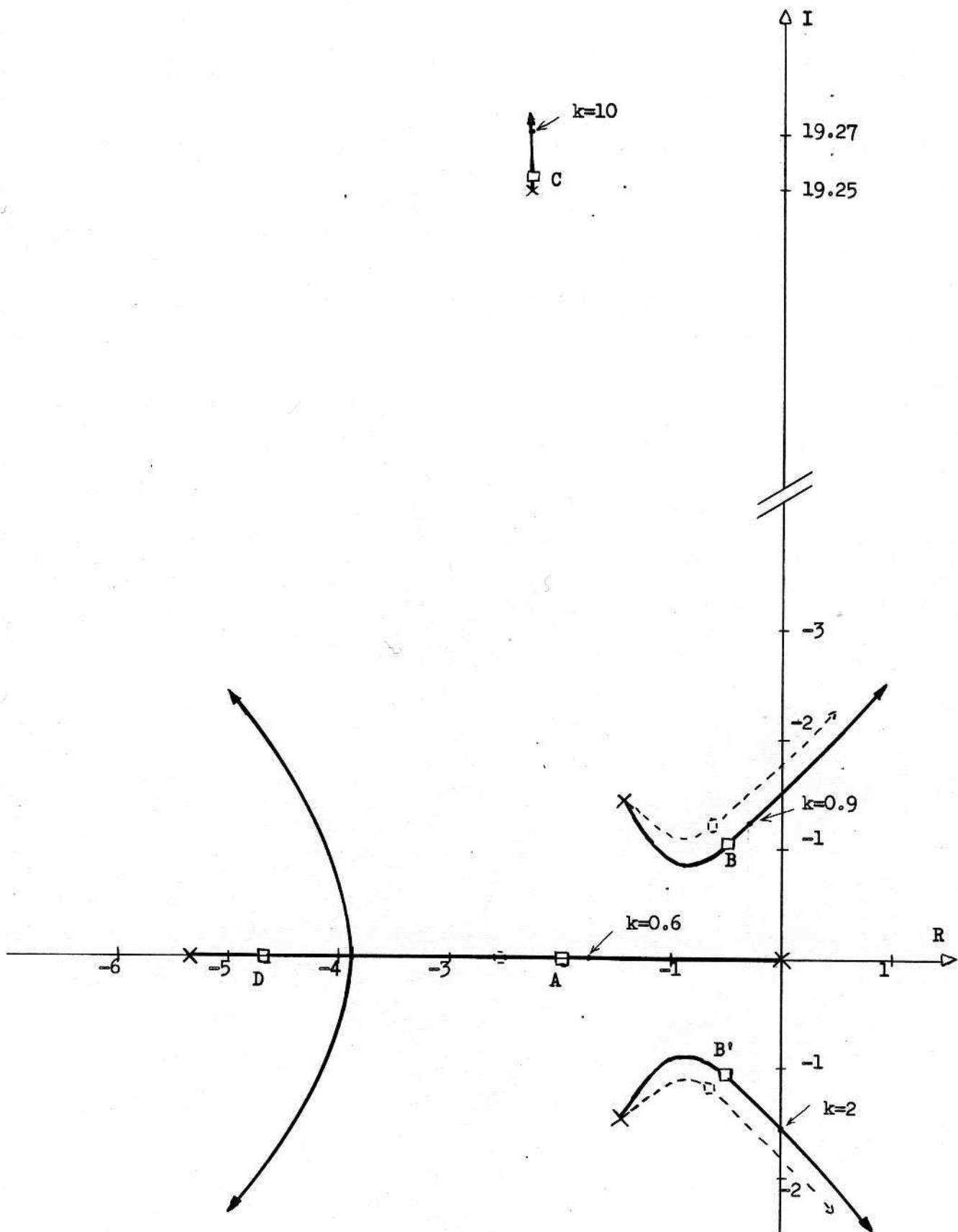


Figure 4.11 Lieu des racines de la boucle externe.

Nous choisirons  $k = 0.7$ .

#### 4.3.3 Remarque sur l'insensibilité de la boucle externe

Les pôles en boucle fermée pour  $k = 0.7$  sont représentés à la figure 4.11. Parmi ceux-ci, on peut distinguer:

- deux pôles dominants B et B'
- des pôles secondaires A, C, C', D.

Nous avons figuré en pointillé le lieu des racines correspondant à  $G(p) = 1$  (Il ne reste plus que trois pôles en boucle ouverte). Du point de vue des pôles dominants, il y a très peu de changement; les pôles C, C' et D n'existent plus, mais leur effet était négligeable.

La dynamique de la boucle externe ne dépend pratiquement plus de la boucle interne.

Pour expliquer cette propriété, nous devons reconsidérer les conséquences de la compensation effectuée.

La création d'une oscillation libre à haute fréquence dans la boucle interne a élevé sa fréquence de coupure, cette boucle se présentant alors comme un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est située bien au-delà de la largeur de bande des signaux qu'elle doit transmettre. Pour ces derniers,  $G(p)$  se présente pratiquement comme un gain statique unité et n'intervient donc plus dans la dynamique globale du système.

Cette remarque justifie donc à posteriori la majorité des approximations faites. Strictement du point de vue de l'insensibilisation, la précision de la régulation de la fréquence n'est pas nécessaire, de même que ne l'est pas celle de la compensation de la constante de temps, ni celle de son identification. La dynamique

de la boucle de commande dépendra en définitive, principalement du gain du gyromètre et du filtre  $H_0(p)$ .

#### 4.4 REGULATION DES PARAMETRES DE L'OSCILLATION LIBRE

##### 4.4.1 Objectifs de la régulation

Les missions typiques du missile ont lieu à altitude constante. Dans ces conditions le gain en vitesse de roulis présente des variations maximales atteignant 100% en 6 s. Quant à la constante de temps  $T_r$ , elle est approximativement constante pour une altitude donnée.

La perturbation à la régulation de l'amplitude se présente sous forme d'une rampe durant six secondes, celle à la régulation de la fréquence se présente sous forme d'un bref échelon de faible amplitude. La remarque précédente sur l'insensibilité de la boucle de commande nous permet de choisir des constantes de temps assez grandes pour les deux régulations envisagées.

L'étude de cette stabilisation en roulis n'étant faite qu'à titre d'exemple de la méthode d'insensibilisation, nous ne l'approfondirons pas jusqu'au stade de l'avant-projet. Nous avons cependant tenu à faire apparaître les propriétés essentielles et les ordres de grandeur importants dont on doit tenir compte dans une étude complète.

##### 4.4.2 Régulation de la fréquence

La mesure de la pulsation de l'oscillation libre se fera par un dispositif décrit en annexe à propos de la simulation. L'écart de fréquence  $\omega_f - \omega_b$  commandera un intégrateur de gain  $k_\omega$  qui fournira le paramètre multiplicatif  $\lambda$  (fig. 4.12).

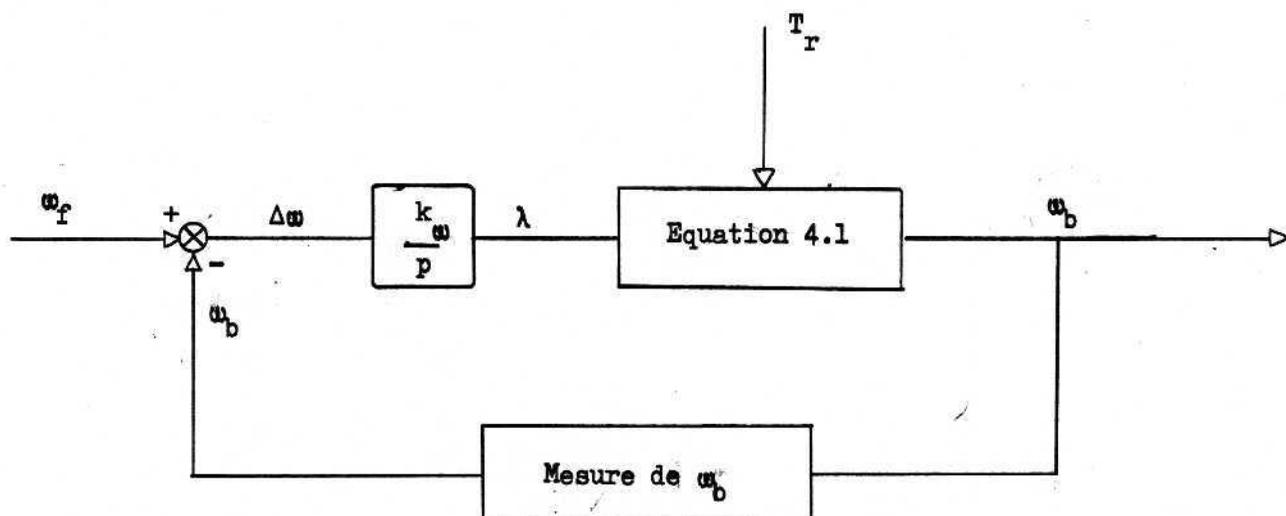


Figure 4.12 Régulation de la fréquence.

Il est évident que la dynamique de cette boucle dépend du paramètre extérieur  $T_r$ . En régime permanent, on obtient une identification de  $T_r$  par l'égalité  $\lambda = T_r$ .

Le gain  $k_\omega$  sera choisi lors de la simulation tel que cette boucle soit stable et que sa rapidité soit satisfaisante. Un temps de réponse de l'ordre de 10 secondes sera largement suffisant étant donné qu'une identification précise de  $T_r$  n'est pas nécessaire et qu'on peut se limiter à  $\omega_b = \omega_f \pm 10\%$  (cf les remarques des paragraphes 4.2.3 et 4.3.3).

#### 4.4.3 Régulation de l'amplitude

Celle-ci doit être plus précise et plus rapide que la précédente. La constance de  $x_b$  est en effet la condition primordiale de la linéarisation de l'organe non linéaire.

La mesure de  $x_b$  se fera par un dispositif décrit en annexe lors de la simulation; l'écart d'amplitude commandera un intégrateur de gain  $k_x$  qui fournira

à sa sortie le niveau  $M$  de sortie du relais (fig. 4.13).

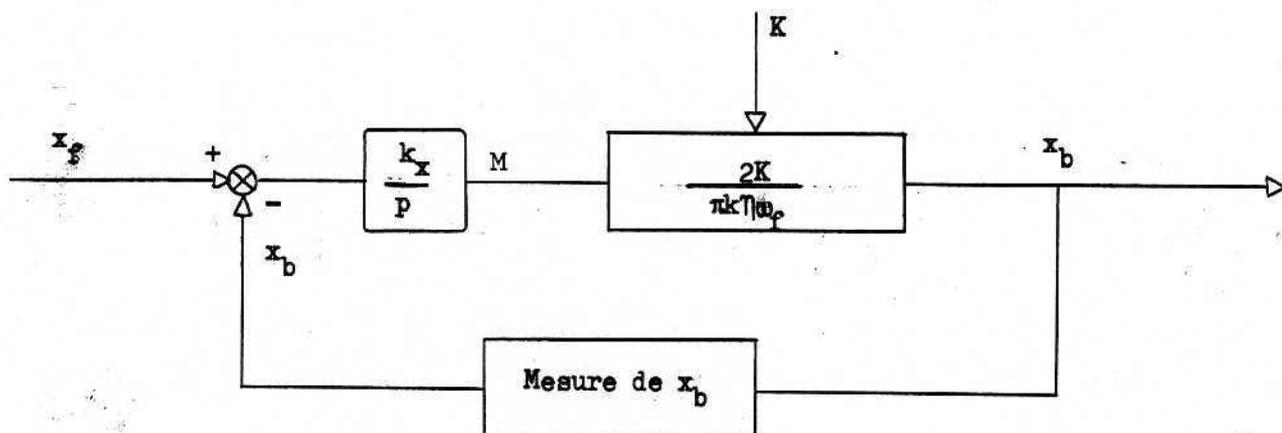


Figure 4.13 Régulation de l'amplitude.

Comme nous avons vu que pour une mission typique du missile la constante de temps  $T_r$  n'était que peu perturbée, la régulation en fréquence peut-être considérée comme étant en régime permanent; à ce moment l'équation 4.2 se réduit à:

$$\frac{x_b}{M} = \frac{2K}{\pi k \eta \omega_f}$$

Le gain  $k_x$  sera choisi lors de la simulation de telle manière que le temps de réponse à 10% de cet asservissement soit de l'ordre de 3 secondes. Nous obtenons ainsi une rapidité suffisante nécessaire à l'hypothèse  $x_b = \text{cte.}$

#### 4.5 CONCLUSION SUR L'ETUDE THEORIQUE DE L'EXEMPLE

La régulation des paramètres de l'oscillation libre permet d'obtenir pour la boucle interne du missile une fonction de transfert équivalente ne dépendant plus de l'environnement. En effet, cette régulation provoque une compensation automatique des variations du gain  $K$  et de la constante de temps  $T_r$ . Nous

n'avons pas insisté sur l'identification dans l'étude de cet exemple, car elle n'est qu'un aspect intermédiaire dont la connaissance des résultats n'est pas nécessaire au processus de compensation. Toutefois, le processus d'identification ayant en lui-même son importance, nous donnerons au chapitre suivant les résultats le concernant.

Rappelons en conclusion le haut degré d'insensibilité que possède la boucle globale du système, accentué par le fait que la boucle interne en oscillation libre à haute fréquence se présente approximativement comme un gain statique unité pour les signaux utiles à basse fréquence. Cette dernière propriété permet d'être moins exigeant quant aux performances de la régulation.

## C h a p i t r e V

### ETUDE EXPERIMENTALE

Ce chapitre a pour objet la vérification des résultats théoriques obtenus au chapitre précédent. Le système étudié ayant été simulé sur une calculatrice analogique EAI 680, nous avons relevé toutes les informations nécessaires à cette analyse critique. Dans la première partie, nous avons examiné l'efficacité de la compensation automatique résultant de la régulation de l'oscillation libre; dans la deuxième, nous avons étudié les caractéristiques et performances de l'asservissement en roulis du missile.

#### 5.1 EFFICACITE DU PROCESSUS DE COMPENSATION

##### 5.1.1 Régulation de la pulsation de l'oscillation libre

###### A) Commande de la pulsation en boucle ouverte

Ayant déconnecté l'asservissement en fréquence, on a relevé la caractéristique  $\lambda = f(\alpha_p)$ . La courbe obtenue est tracée pour  $T_r = 0.5$  s à la figure 5.1.

Dans le cas où  $\lambda$  est égal à  $T_r$ , l'approximation du premier harmonique donne  $\omega_b = 20$  radians/s pour une valeur mesurée de 20.14 radians/s. Cette différence de 0.5% n'est pas assez significative pour être attribuée soit à l'incertitude introduite par la simulation, soit à l'erreur systématique due à la méthode du premier harmonique.

La caractéristique a une pente croissante dont la valeur au point nominal  $\lambda = 0.5$  est de  $(\Delta\lambda/\Delta\omega_b) = 100$ . Les paramètres  $\lambda$  et  $T_r$  jouant un rôle parfaitement symétrique, nous obtenons:

$$\left(\frac{\Delta\omega_b}{\Delta T_r}\right)_{\lambda = 0.5} = 0.01$$

Cette valeur relativement faible est compatible avec la remarque faite au paragraphe 4.2.3. En effet, la variation de  $\omega_b$  due à une variation de  $T_r$  est peu importante, ce qui reflète une insensibilisation de la boucle interne par rapport à  $T_r$ , mais elle est cependant suffisante pour être détectée et commander le paramètre  $\lambda$ .

Dans le cas où la régulation en fréquence aurait pour but l'identification de la constante de temps  $T_r$  et non pas l'insensibilisation, on choisirait un réseau correcteur  $H_1(p)$  procurant une plus grande sensibilité de la pulsation aux variations de  $T_r$ , en prenant par exemple un amortissement  $\eta$  plus grand.

#### B) Identification de la constante de temps

L'asservissement en fréquence ayant été rebranché, nous avons choisi pour pulsation de référence  $\omega_p = 20.12$  radians/s et comme gain de la boucle de régulation  $k_\omega = 0.3$ .

Les résultats de l'analyse de l'identification sont reportés à la figure 5.2; pour cela nous avons fait varier  $T_r$  entre 0.2 et 2s. On mesure la valeur du para-

mètre  $\lambda$  lorsque le régime permanent de régulation est atteint.

Dans toute la plage de variation de  $T_r$ , l'identification par  $\lambda$  a été effectuée avec une erreur inférieure à 10%. Du point de vue précision de l'identification, notre objectif est donc atteint.

### C) Rapidité de la compensation

Dans la mesure suivante, la valeur du paramètre environnant  $T_r$  correspond à un tir du missile à basse altitude ( $T_r = 0.35$  s) alors que la valeur de  $\lambda$  est intentionnellement réglée pour un tir à altitude moyenne ( $\lambda = 1.2$ s).

La figure 5.3 représente la variation de  $\lambda$  en fonction du temps à partir de l'instant ( $t = 0$ ) où le missile est largué. Au bout de 8 s, le pôle  $-1/T_r$  est compensé par le zéro  $-1/\lambda$  à 10% près. Ce temps de réponse est inférieur à la limite fixée au chapitre précédent. Il est évident que dans une réalisation effective, on doit prévoir un dispositif préréglant la condition initiale  $\lambda$  en fonction de l'altitude de tir. Cette précaution permettra d'augmenter la rapidité de la compensation.

En résumé, les approximations faites dans l'approche de l'étude de la régulation de l'oscillation libre s'avèrent justifiées par la simulation.

#### 5.1.2 Régulation de l'amplitude de l'oscillation libre

L'inégalité (3.12) appliquée à notre problème donne:

$$\frac{K}{k} M \geq 5a$$

où  $a$  est la pente maximum que la sortie  $s$  de la boucle interne doit être capable de suivre avec une erreur finie. Etant donné la largeur de bande désirable de 2 radians/s, nous prendrons  $a = 3$  radians/s ce qui nous amène à  $KM \geq 10$ .

D'autre part, l'amplitude de l'oscillation résiduelle en roulis doit être inférieure à  $10^0$  ce qui nous conduit à l'inégalité;

$$\frac{2k\eta x_f}{\omega_f \sqrt{1 + \lambda^2 \omega_f^2}} < 0.175 \text{ radian}$$

soit  $x_f < 16$

Si nous fixons arbitrairement  $KM = 13.5$ , nous obtenons à partir de la relation (4.2)  $x_f = 2.45$ .

Après plusieurs essais, le gain  $k_x$  de l'asservissement en amplitude a été fixé à la valeur:  $k_x = 56.10^{-3}$ .

Dans la mesure suivante, la valeur du paramètre environnant  $K$  correspond à un tir à altitude moyenne ( $K = 250 \text{ s}^{-1}$ ). L'établissement de l'oscillation libre est représenté à la figure (5.6); elle prend naissance très rapidement, son amplitude atteignant le régime quasi-permanent au bout de 2 secondes avec  $x_b = x_f = 2.45$ . Il en est de même du niveau de sortie du relais qui atteint au bout de 2 secondes la valeur constante  $M = 0.054$ ; ce qui nous donne bien  $KM = 13.5$  à la précision de lecture près.

Pour étudier la rapidité de cette régulation, nous avons en outre effectué les deux essais suivants:

1) Le système étant en régime permanent avec  $K = 250 \text{ s}^{-1}$ , cette valeur a été instantanément amenée à  $K = 500 \text{ s}^{-1}$ . Les réponses de la régulation de l'amplitude à cette perturbation en échelon sont représentées à la figure 5.5;  $x_b$  est ramené à l'amplitude de référence  $x_f$  en 1.5 s; quant au niveau de sortie du relais, il décroît de sa valeur précédente  $M = 0.054$  jusqu'à la nouvelle valeur de régime permanent  $M = 0.027$  en approximativement 1 seconde.

2) Partant de cet état, on a donné au paramètre environnant  $K$  la valeur:  $K = 150 \text{ s}^{-1}$ . Après un court transitoire de 4 s,  $x_p$  est de nouveau égal à  $x_f$ , la sortie du relais étant stabilisée à sa nouvelle valeur  $M = 0.09$  en approximativement 3 secondes (fig. 5.6).

En conclusion, ces expériences permettent de vérifier que les variations de  $K$  sont parfaitement compensées par le niveau de la sortie du relais. En effet, on a toujours en régime permanent  $KM = 13.5$ .

D'autre part, la figure 4.13 mettait en évidence une relation entre la dynamique de la régulation en amplitude et la valeur de  $K$ , cette dépendance se traduit par les différents temps de réponse obtenus. L'objectif fixé est toutefois atteint, la compensation s'effectuant toujours en moins de 5 secondes.

## 5.2 PERFORMANCES DE L'ASSERVISSEMENT

Ayant vérifié par les essais précédents que les hypothèses faites sur la régulation de l'oscillation libre étaient justifiées, nous avons étudié la réponse de la boucle de commande à une entrée.

### 5.2.1 Réponse du système à un échelon

L'entrée est un échelon de position en roulis d'amplitude 5 radians, soit  $290^\circ$ ; nous demandons donc au missile d'effectuer plus d'un demi-tour sur lui-même.

Trois mesures ont été effectuées; la première à basse altitude ( $T_r = 0.2 \text{ s}$ ), la deuxième à altitude moyenne ( $T_r = 1 \text{ s}$ ) et la dernière à haute altitude ( $T_r = 2 \text{ s}$ ).

Les réponses du missile pour ces trois essais se trouvent respectivement représentées aux figures 5.7, 5.8 et 5.9.

Nous obtenons exactement le même type de réponse pour les trois cas (à l'oscillation résiduelle en roulis près). Il correspond bien à celui d'un système linéaire du 2<sup>ième</sup> ordre avec intégration, à retour unitaire;

- le dépassement est de 17%,
- le temps de réponse à 5% est de 7.5 s.

Il est à remarquer que, comme prévu, l'oscillation résiduelle en roulis diminue avec l'altitude et est toujours inférieure à 10°.

- 5° à basse altitude,
- 2° à altitude moyenne,
- négligeable à haute altitude.

### 5.2.2 Vérification des hypothèses sur l'oscillation libre

La figure 5.10 représente l'oscillation libre à l'entrée du relais pour les trois essais décrits précédemment. On peut y noter que l'amplitude et la fréquence de l'oscillation ne sont pas affectées par l'entrée; la mesure du rapport entre la composante basse fréquence  $x_e$  et l'amplitude  $x_b$  donne les valeurs suivantes:

$$\left| \frac{x_e}{x_b} \right|_{\max} = \frac{1}{6} \text{ à basse altitude}$$

$$\left| \frac{x_e}{x_b} \right|_{\max} = \frac{1}{10} \text{ à altitude moyenne}$$

$$\left| \frac{x_e}{x_b} \right|_{\max} = \frac{1}{15} \text{ à haute altitude}$$

Les battements de la gouverne sont représentés à la figure 5.11. Leur amplitude demeure toujours dans des limites raisonnables.

$\alpha_{\max} = 6^{\circ}$  à basse altitude,

$\alpha_{\max} = 3^{\circ}$  à altitude moyenne,

$\alpha_{\max} = 2^{\circ}$  à haute altitude.

En conclusion, ces essais nous ont permis de constater:

- que la condition d'amplitude  $\left| \frac{x_e}{x_b} \right|_{\max} \leq 1/3$  était vérifiée dans tout le domaine de vol.

- que l'oscillation libre n'était pas perturbée, ni en fréquence ni en amplitude lorsqu'on appliquait une entrée.

- que la dynamique de la boucle de commande était bien insensible à l'environnement extérieur et que les performances escomptées étaient réellement obtenues.

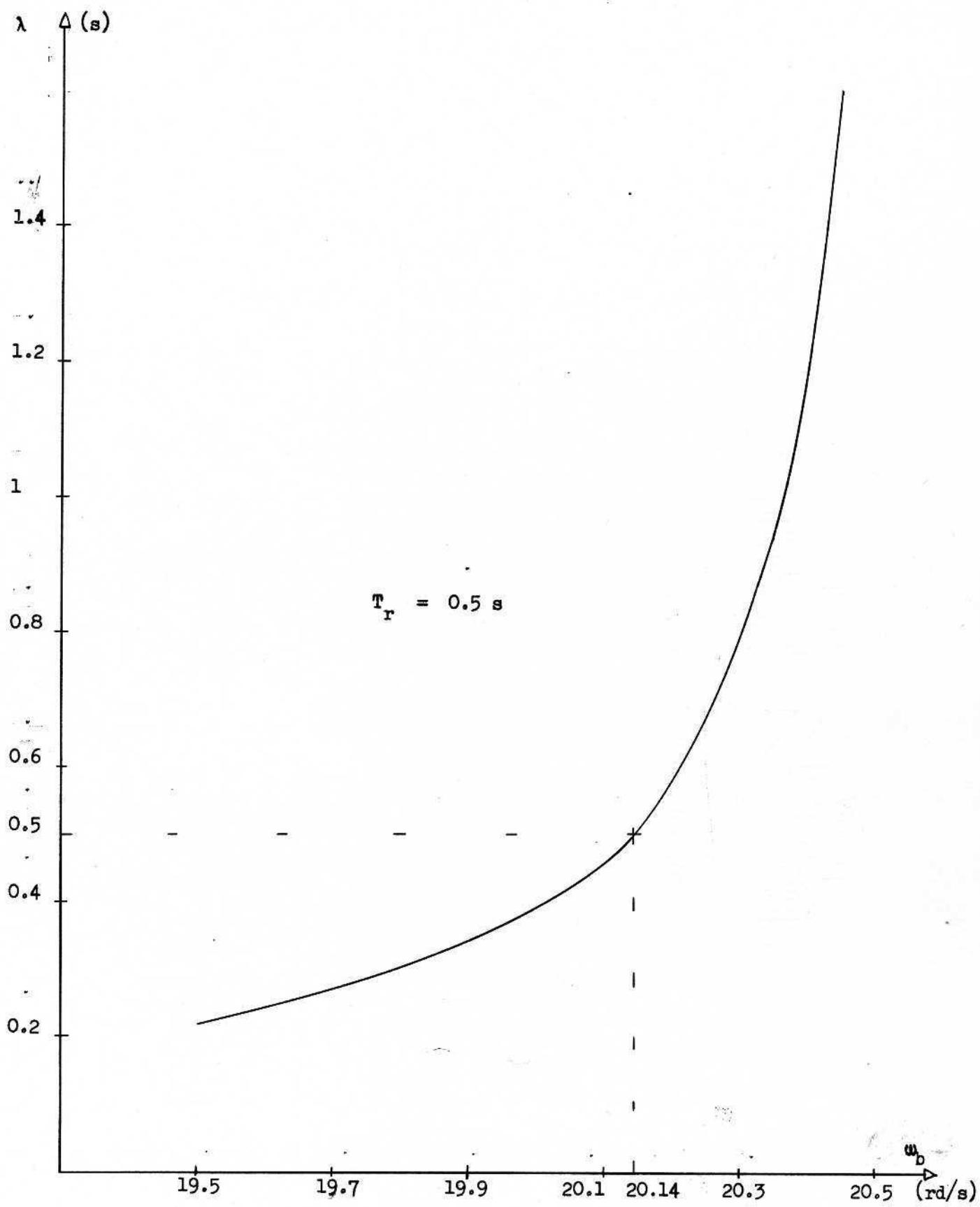


Figure 5.1 Courbe  $f(\lambda, \omega_b) = 0$  lorsque  $T_r = 0.5$  s.

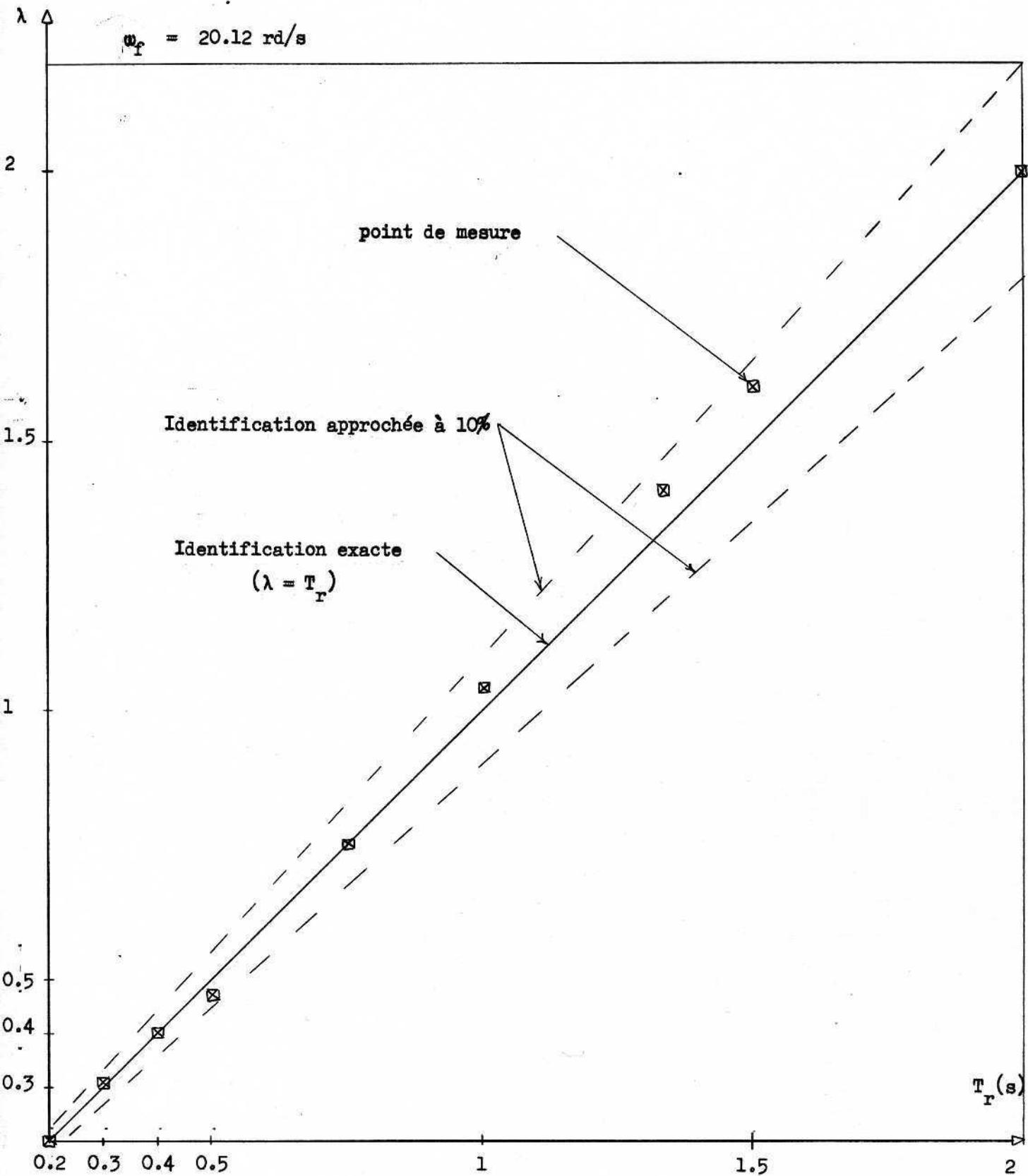


Figure 5.2 Identification de  $T_r$  par  $\lambda$ .

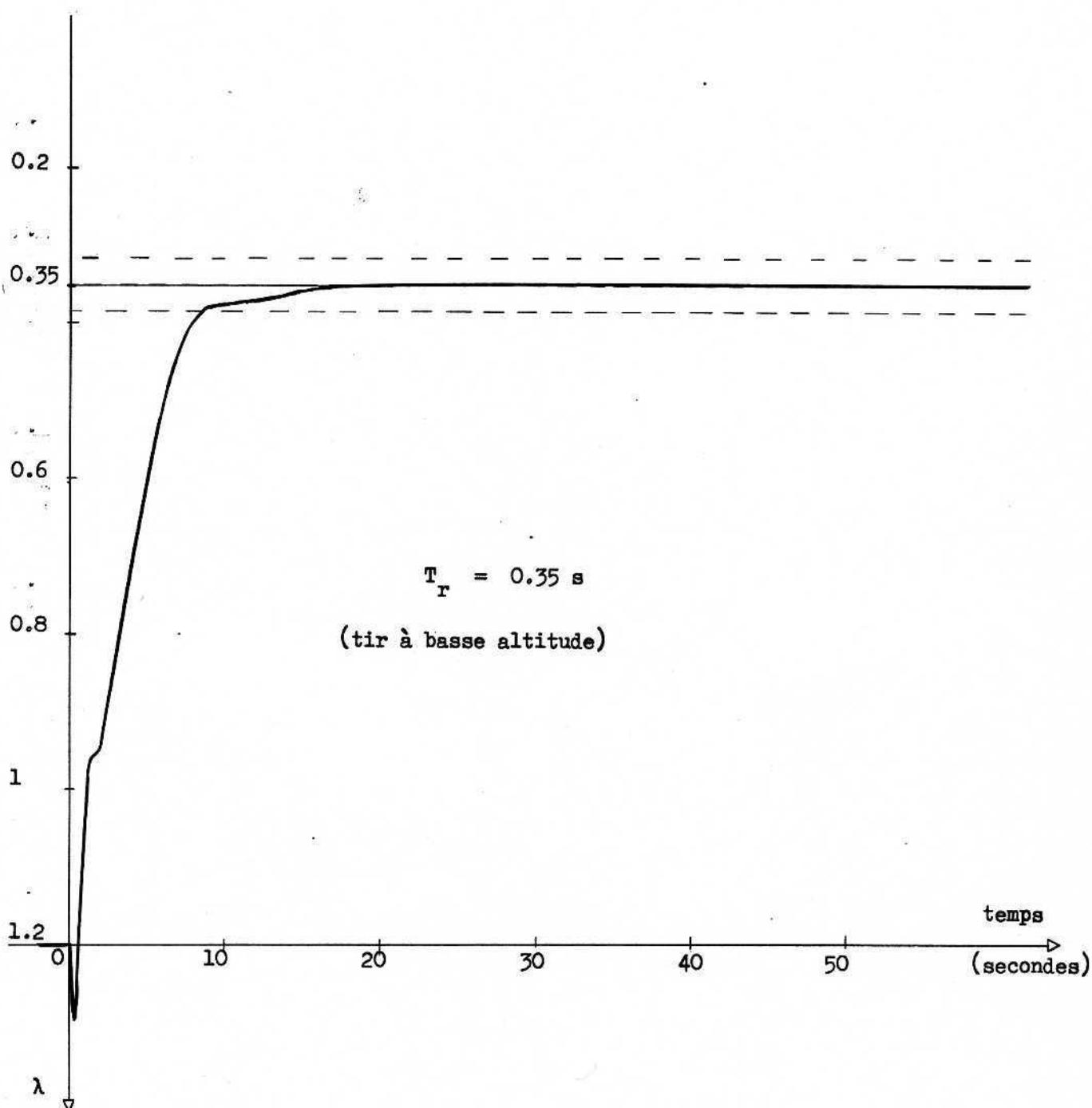
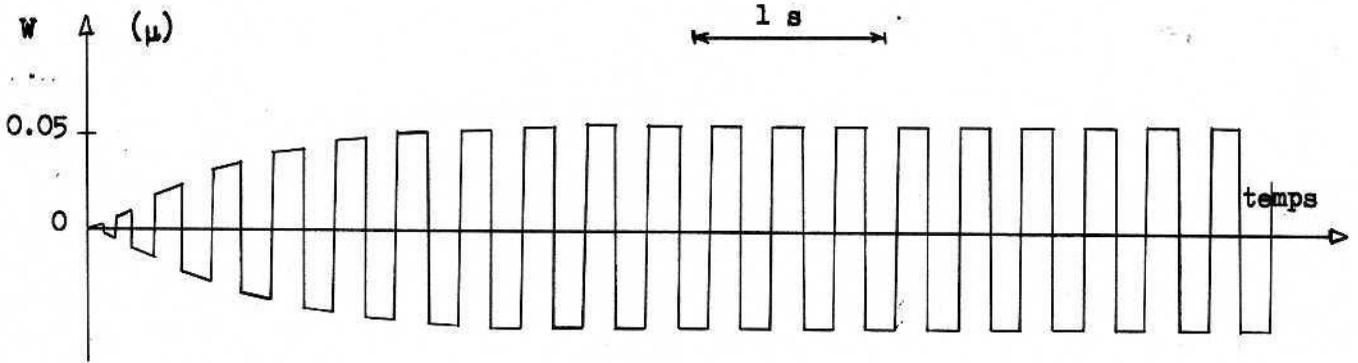
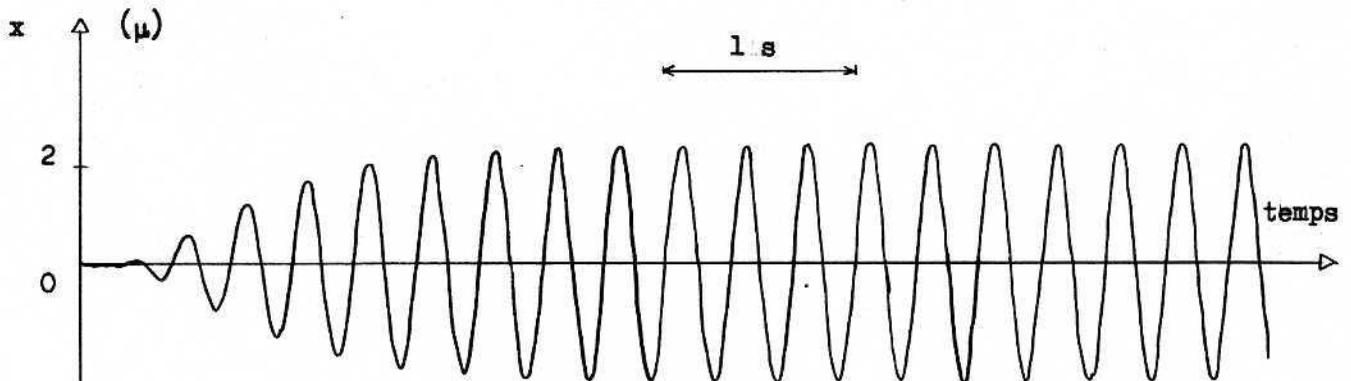


Figure 5.3 Réponse de l'asservissement en fréquence à une entrée en échelon.

( $\mu$  : unité machine: 10 volts =  $1\mu$ )

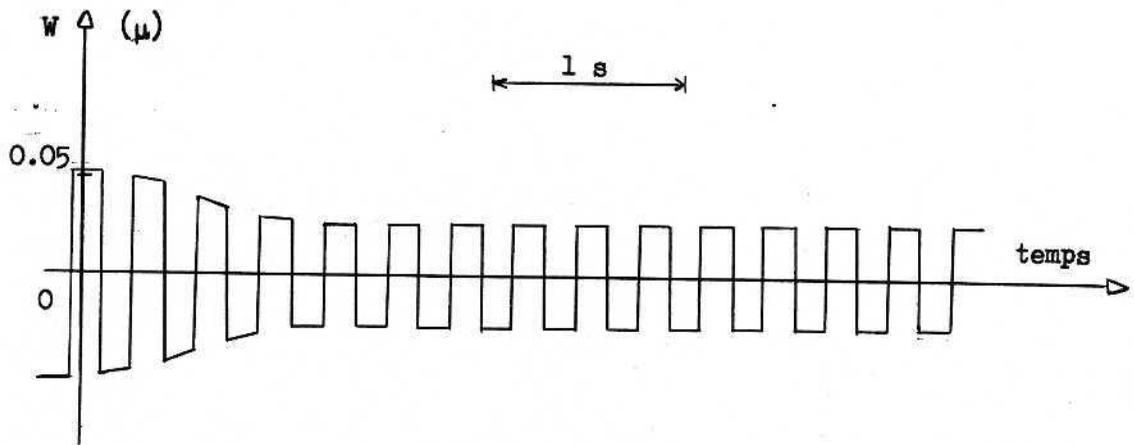


a) - Sortie du Relais

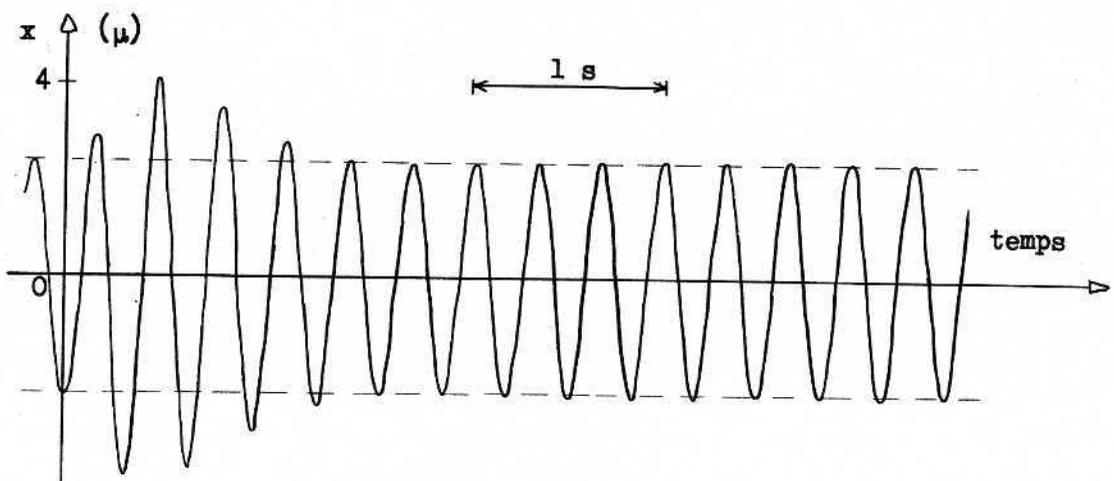


b) - Oscillation libre

Figure 5.4 Naissance de l'oscillation libre.  
(tir à altitude moyenne:  $T_r = 1s$ ;  $K = 250s^{-1}$ )

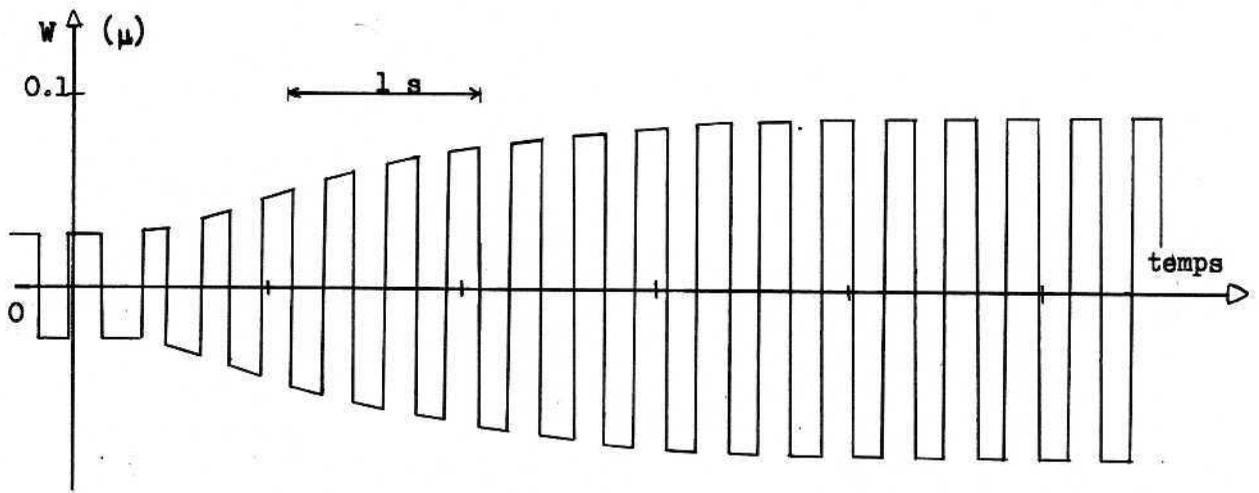


a) - Sortie du Relais

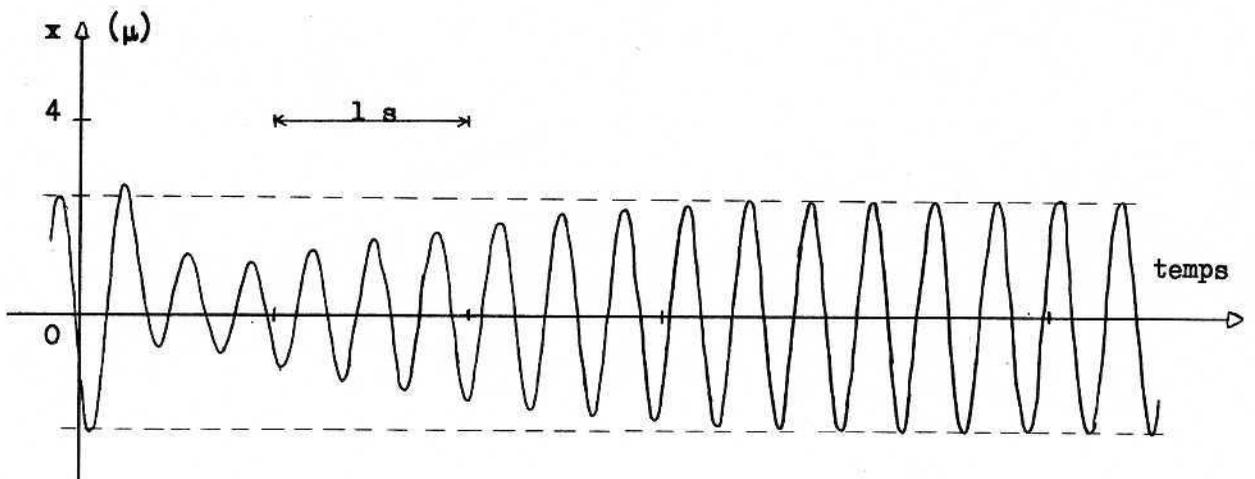


b) - Oscillation libre

Figure 5.5 Réponse de l'asservissement en amplitude à une perturbation en échelon.  
 ( $K$  passe de  $250s^{-1}$  à  $500s^{-1}$  à l'instant  $t = 0$ )



a) Sortie du relais



b) Oscillation libre

Figure 5.6 Réponse de l'asservissement en amplitude à une perturbation en échelon ( $K$  passe de  $500s^{-1}$  à  $150s^{-1}$  à l'instant  $t = 0$ .)

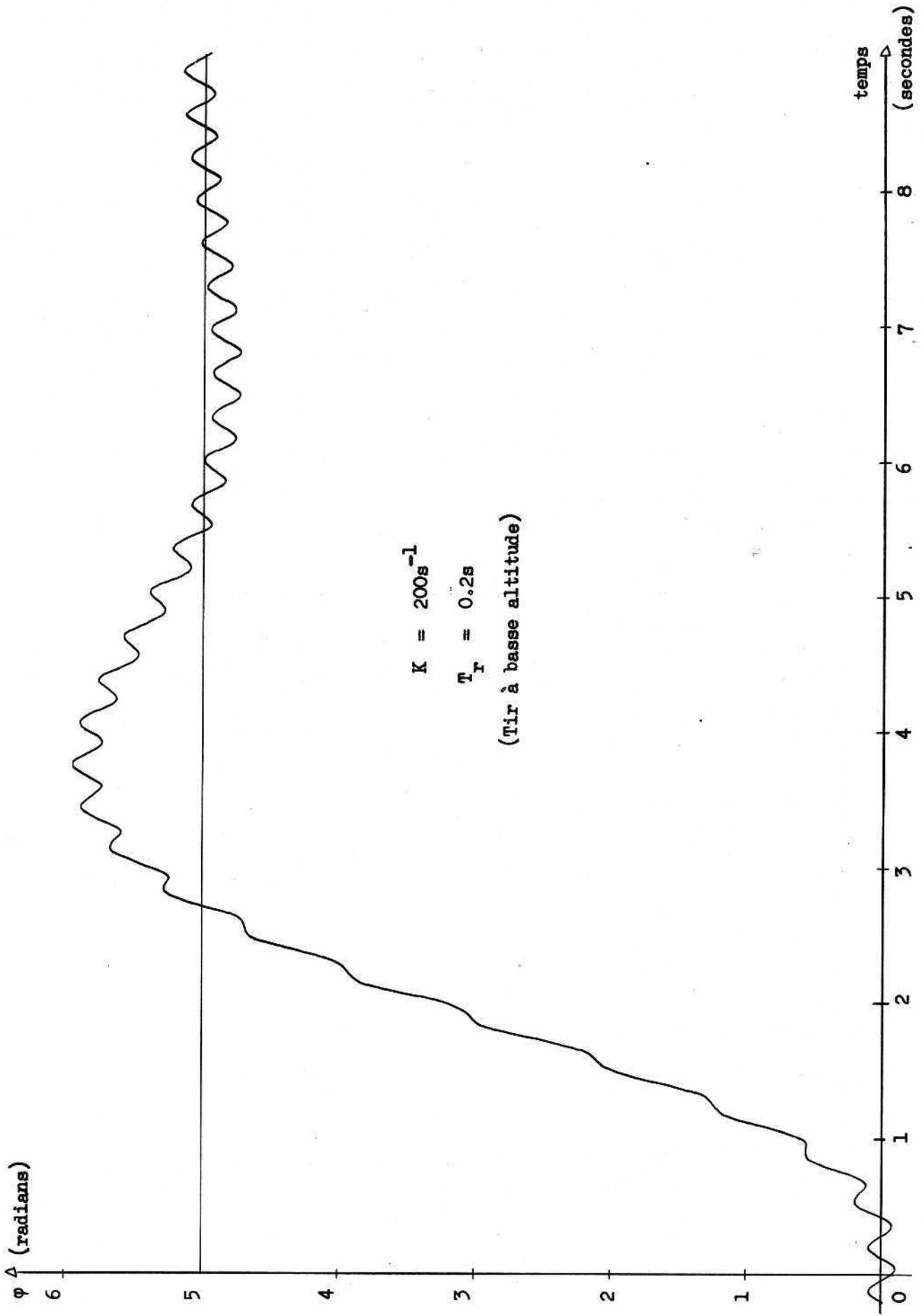


Figure 5.7 Réponse en roulis du missile à une entrée en échelon.

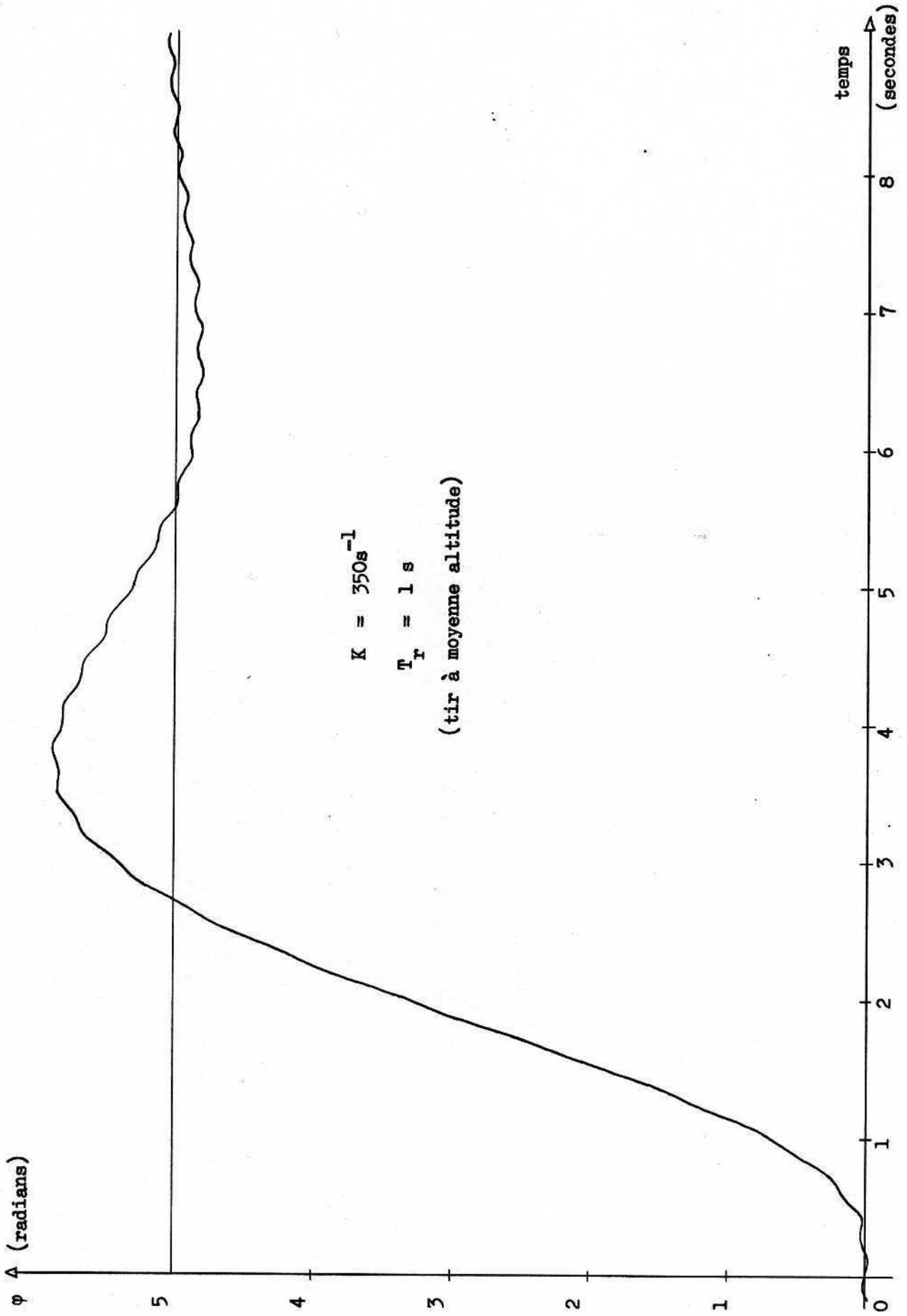


Figure 5.8 Réponse en roulis à une entrée en échelon

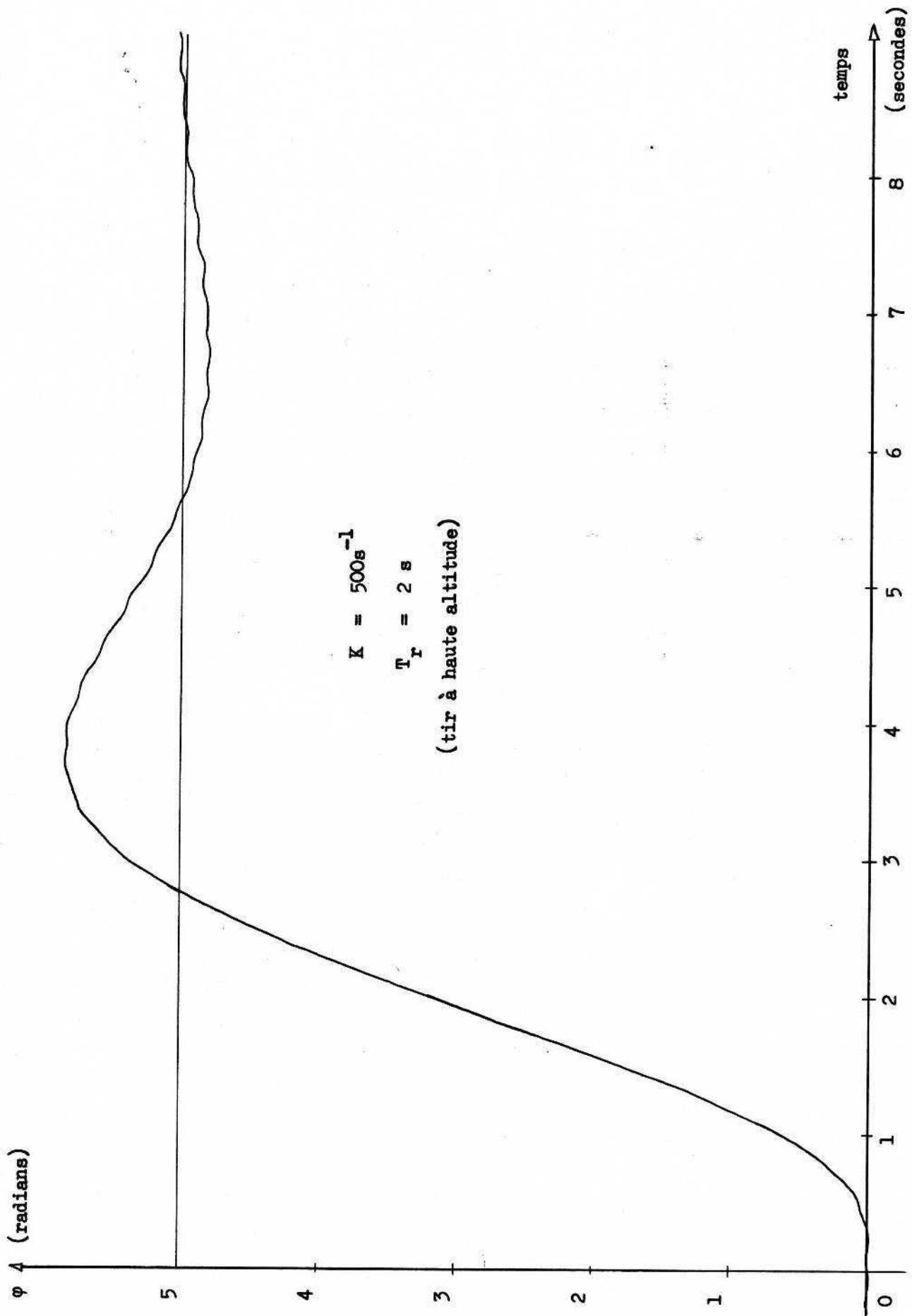


Figure 5.9 Réponse en roulis à une entrée en échelon

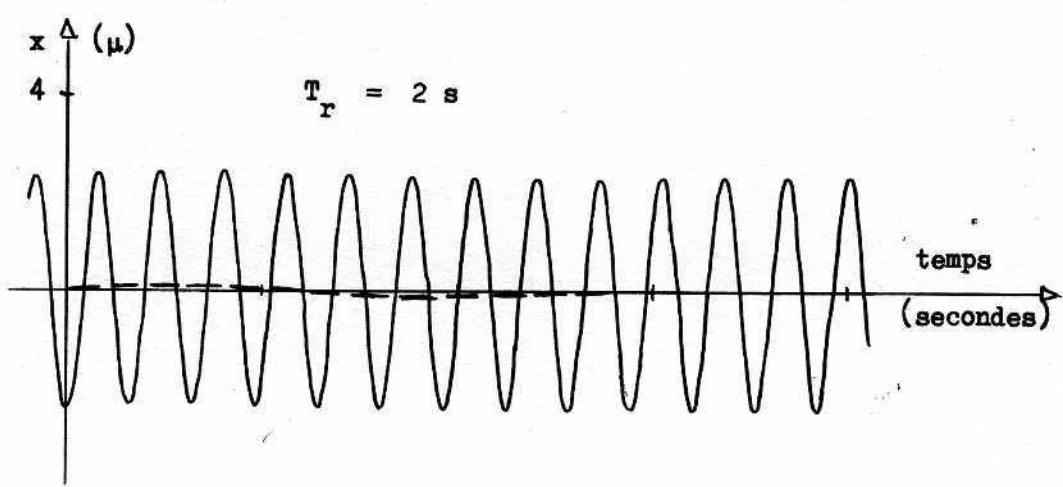
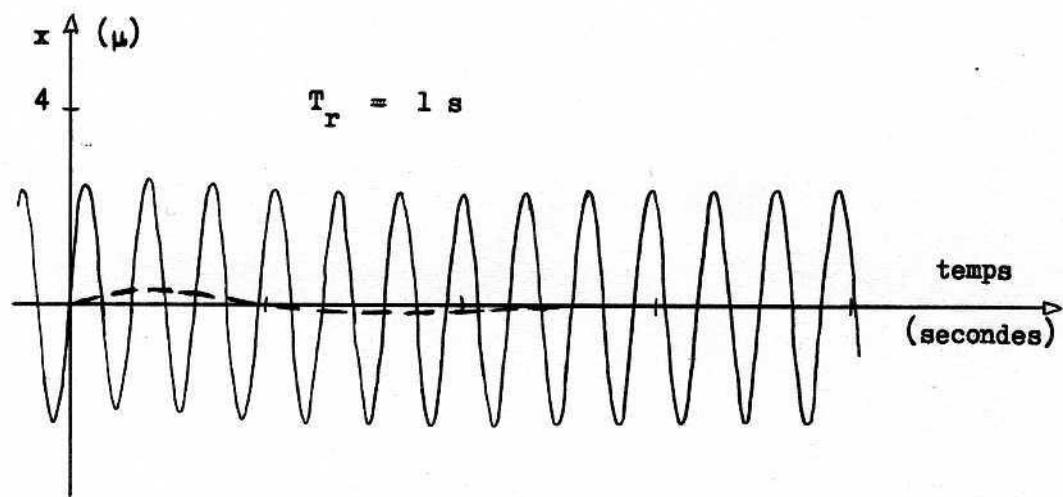
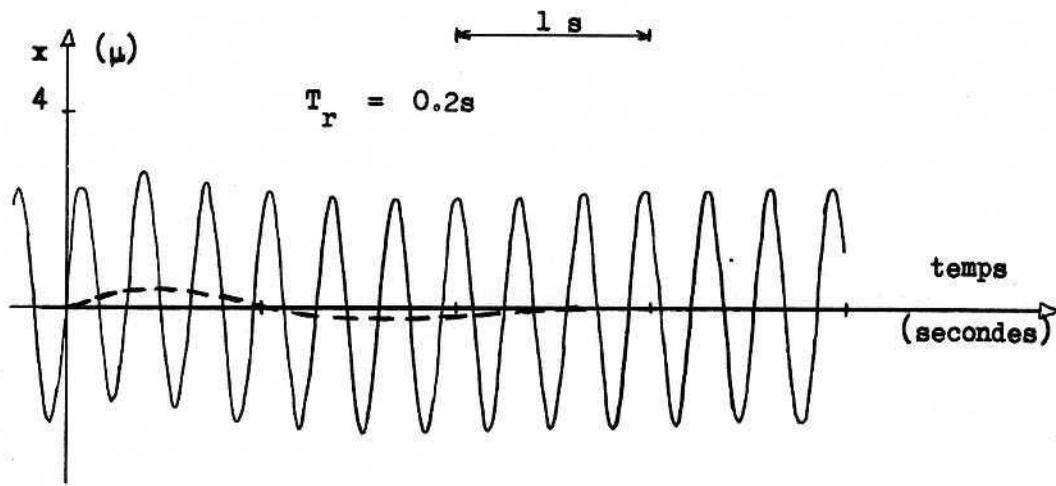


Figure 5.10 Influence de l'échelon de roulis sur l'oscillation libre.

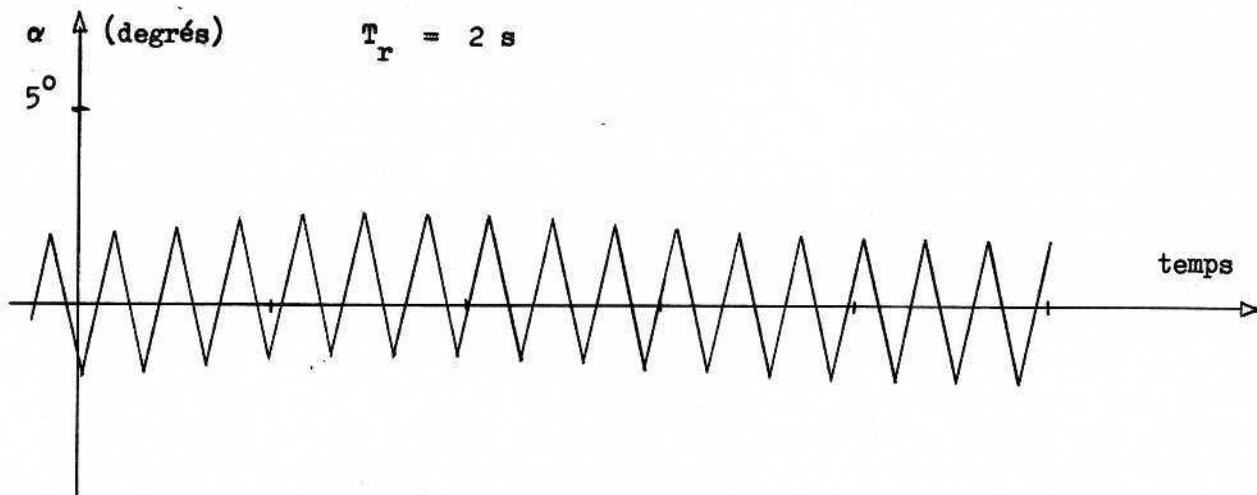
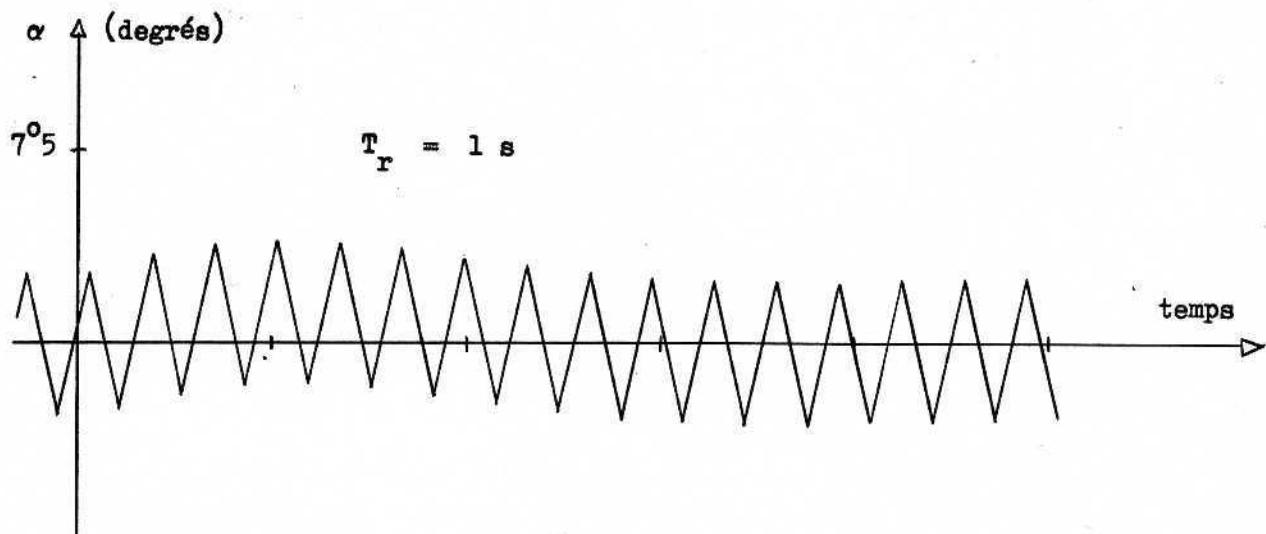
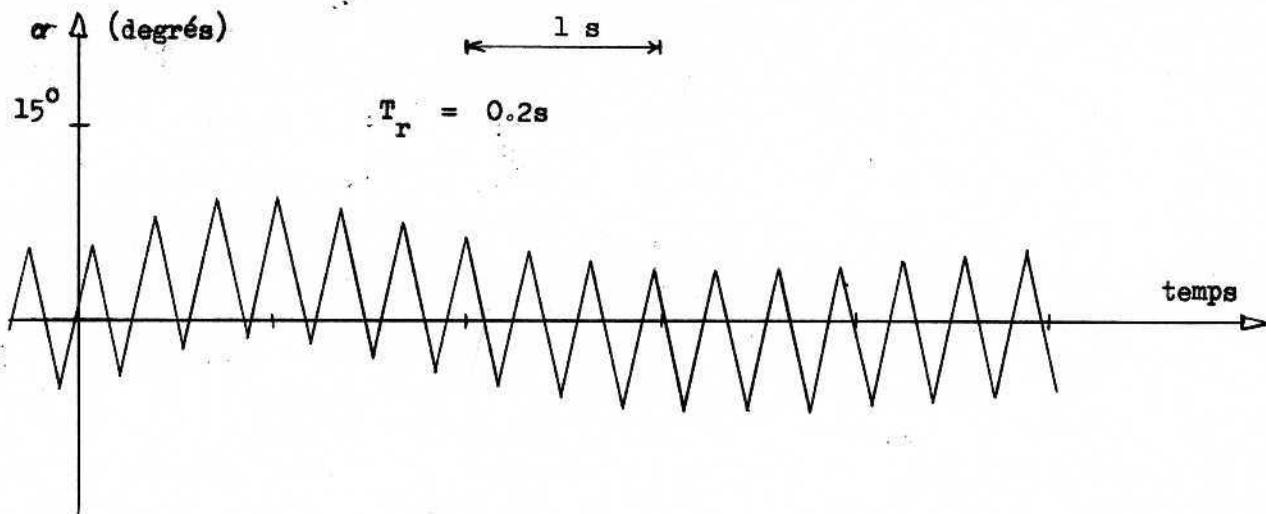


Figure 5.11 Réponse de la gouverne à l'échelon de roulis.

## CONCLUSION

La mise au point d'un processus d'adaptation paramétrique pour obtenir une commande insensible à l'environnement comprend habituellement:

- a) un processus d'identification mesurant les grandeurs responsables des perturbations;
- b) un traitement des données obtenues pour l'élaboration d'un processus de compensation;
- c) la commande d'organes correcteurs subordonnée au résultat du traitement précédent.

La méthode originale présentée dans ce travail utilise l'oscillation libre entretenue par le relais du système non linéaire ou créé en ajoutant ce relais dans le cas d'un système linéaire. Les caractéristiques du cycle limite obtenu dépendent en effet de la valeur des grandeurs perturbatrices; plus précisément son amplitude est directement reliée au gain en boucle ouverte et les variations de sa fréquence sont fonction des variations de la constante de temps. On a montré qu'une régulation de ces deux paramètres entraînait une compensation globale du système.

Dans le cas d'un système à gain et constante de temps variables, cette méthode présente un net avantage de simplicité par rapport au procédé habituel déjà signalé.

- a) identification remplacée par la mesure des paramètres du cycle limite;
- b) traitement des données supprimé;
- c) commande d'organes réduite à la simple modification du niveau de sortie du relais et de la constante de temps du réseau correcteur.

L'application de la méthode à la stabilisation automatique d'un missile en roulis a permis de confirmer l'efficacité du processus d'insensibilisation: pour des variations relatives de 1 à 5 du gain en boucle ouverte et de 1 à 10 de la constante de temps, les différentes réponses à une entrée en échelon sont identiques à la précision de mesure près.

Une conséquence indirecte de la régulation est la possibilité d'obtenir la valeur des grandeurs perturbatrices. Le seul fait de réguler l'oscillation libre procure donc, en plus des processus de compensation automatique, un processus d'identification: l'oscillation est porteuse d'information. Cette remarque serait à exploiter dans des études ultérieures d'identification.

## ANNEXE

### MISE EN OEUVRE DE LA SIMULATION

La simulation a été effectuée sur calculateur analogique EAI 680; les symboles utilisés dans les diagrammes de câblage sont ceux préconisés par le constructeur.

La boucle de commande dépouillée des asservissements en fréquence et en amplitude représentée à la figure 4.3 est détaillée à la figure A.1 qui fait apparaître les variables essentielles que l'on retrouvera dans la simulation.

- $\phi_c$  : Commande de position en roulis.
- $v$  : Ecart de position en roulis.
- $e$  : Commande de la boucle interne (assimilable à une commande en vitesse de roulis).
- $\epsilon$  : Ecart correspondant à la commande de la boucle interne.
- $y$  : Sortie du réseau correcteur  $H_1(p)$ .
- $x$  : Entrée du relais.
- $w$  : Sortie du relais (vitesse de la gouverne).
- $\delta$  :  $(K/k)\alpha$  où  $\alpha$  est la position de la gouverne.

- s : Vitesse de roulis (au facteur  $1/k$  près)  
 $\varphi$  : Position en roulis.

Le diagramme global avec asservissement des paramètres de l'oscillation libre est représenté à la figure A.2.

### Asservissement en amplitude

L'oscillation libre est filtrée par un filtre passe-haut du 1<sup>er</sup> ordre atténuant les fréquences inférieures à  $\omega_f$  ; ceci dans le but d'éliminer le signal basse fréquence correspondant à la propagation du signal d'entrée.

- L'oscillation filtrée est ensuite redressée dans le but d'obtenir une composante continue proportionnelle à son amplitude  $x_b$ .

- L'écart d'amplitude  $\Delta x = x_f - x_b$  est envoyé à l'entrée d'un intégrateur qui commande le niveau M de la sortie du relais W.

L'expérience nous a enseigné que pour cet asservissement, il n'était pas nécessaire de filtrer la sortie du redresseur; ce lissage étant automatiquement effectué par l'intégrateur.

### Asservissement en fréquence

Pour la mesure de la fréquence, nous avons fait apparaître  $\omega_b$  en dérivant l'oscillation filtrée par le passe-haut, obtenant ainsi une sinusoïde d'amplitude  $\omega_b x_b$ . Il suffit alors d'obtenir des signaux continus proportionnels à ces amplitudes (redresseur plus filtre passe-bas du 2<sup>ième</sup> ordre avec une fréquence de coupure de 6 rd/s) et de diviser  $\omega_b x_b$  par  $x_b$ .

Le dérivateur a été approximé par la fonction de transfert  $\frac{p}{1 + p/100}$  qui pour une entrée en  $x_b \sin \omega_b t$  donne en sortie  $\omega_b x_b \sin(\omega_b t + \phi)$  à 2% par défaut près lorsque  $19 < \omega_b < 21$  rd/s.

L'emploi d'un intégrateur n'a pas été retenu car il aurait régénéré le signal basse fréquence précédemment éliminé.

L'écart de fréquence  $\Delta\omega = \bar{\omega}_f - \omega_p$  est envoyé à l'entrée d'un intégrateur ayant pour sortie le facteur multiplicatif " $\lambda$ ".

### Cablage du problème

Le plan d'ensemble du schéma de cablage est donné à la figure A.15. Les éléments de base sont représentés séparément aux figures (A.3 - A.12). Les variables réduites sont indiquées entre crochets. En tenant compte du changement de temps effectué  $\theta = 10 t$ , les valeurs des affichages potentiométriques sont directement indiqués sur les schémas.

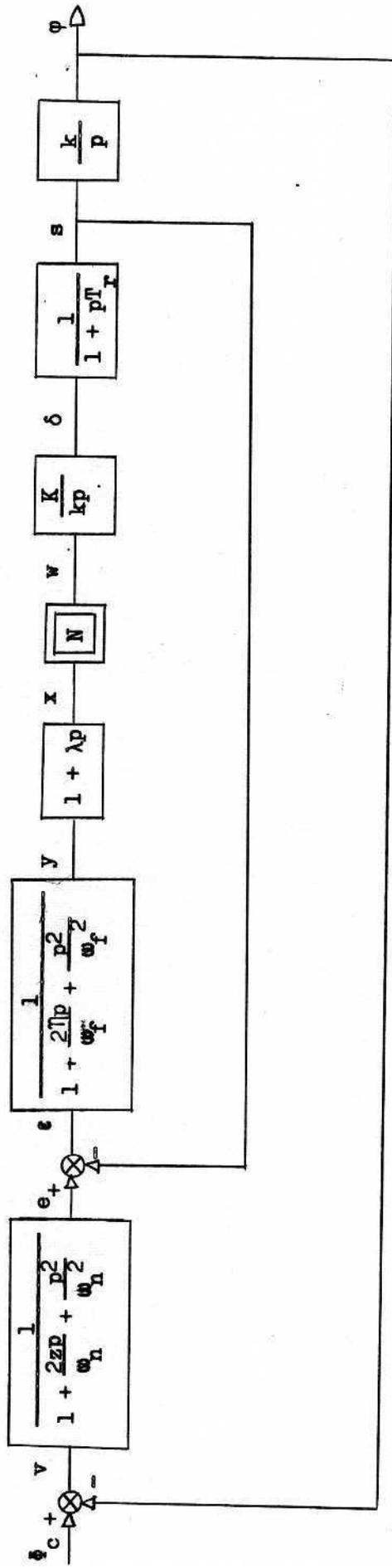


Figure A-1 Boucle de commande

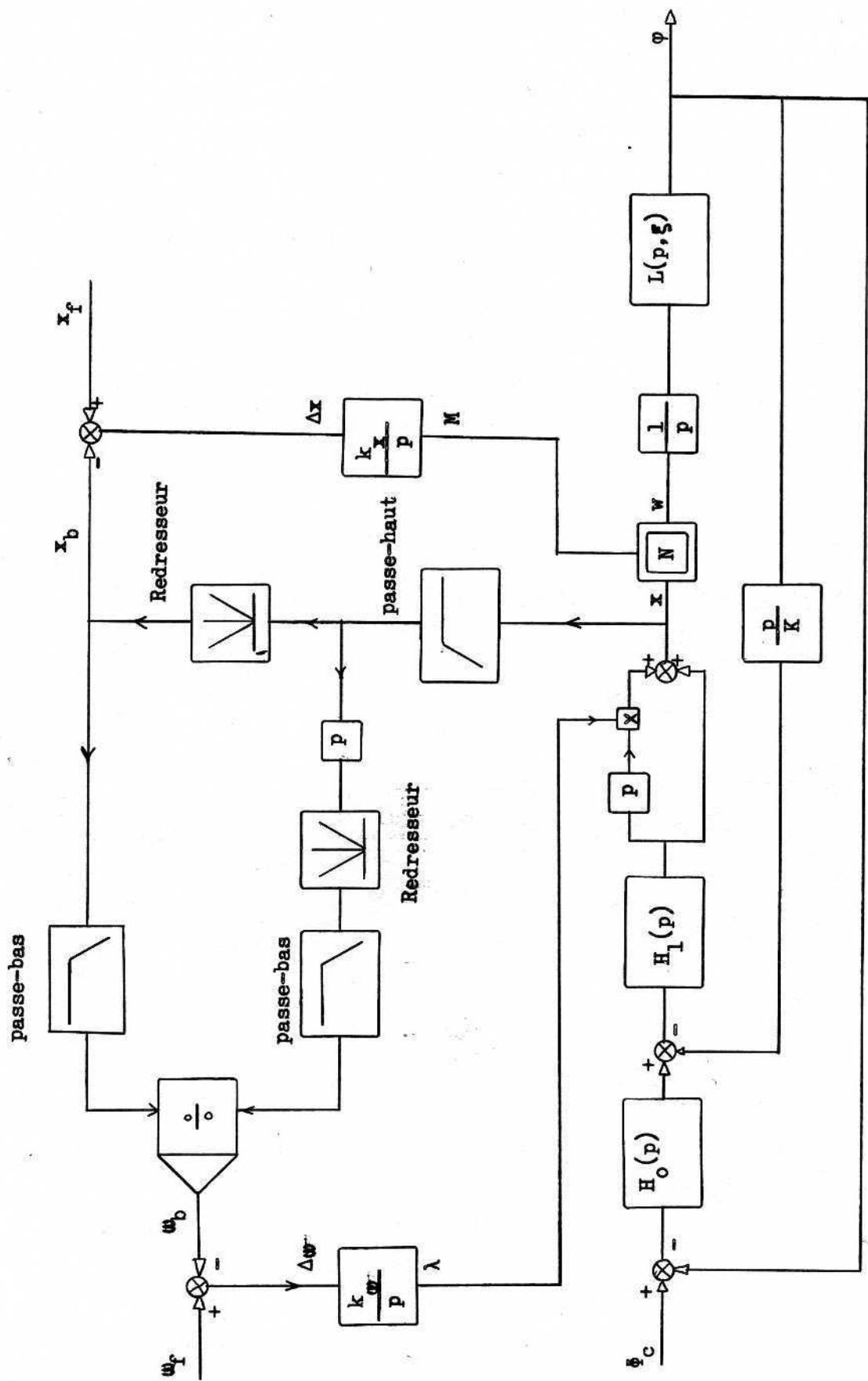


Figure A-2 Boucle de commande avec régulation libre des paramètres de l'oscillation libre.

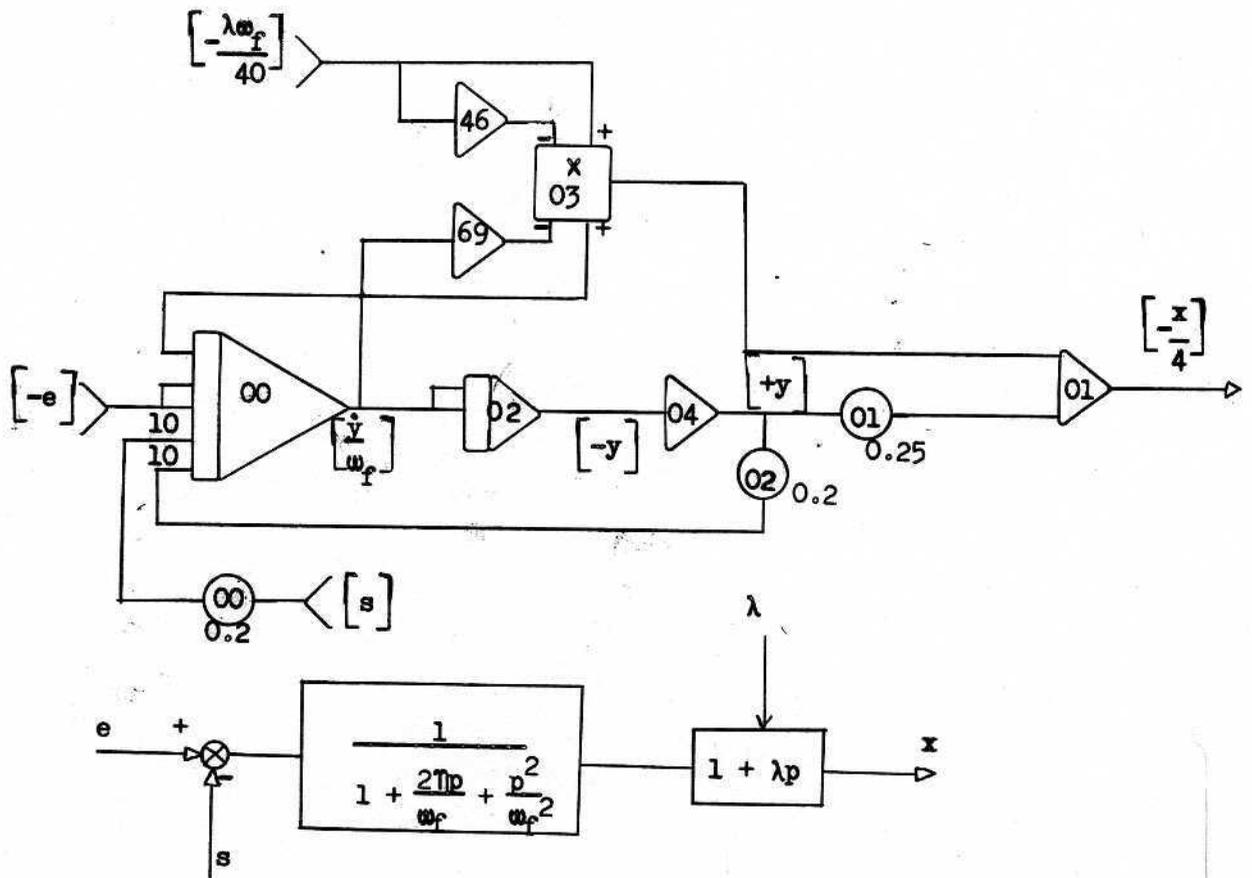


Figure A-3 Simulation du réseau correcteur  $H(p)$

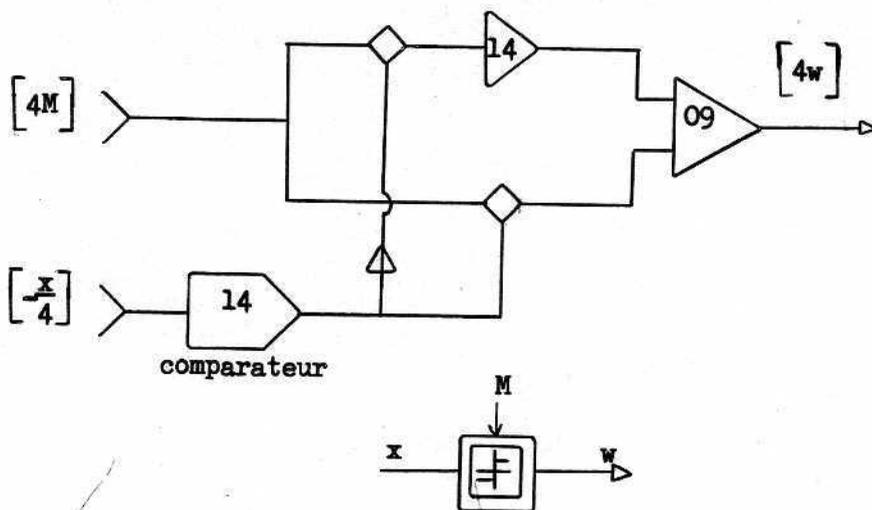


Figure A-4 Simulation du relais.

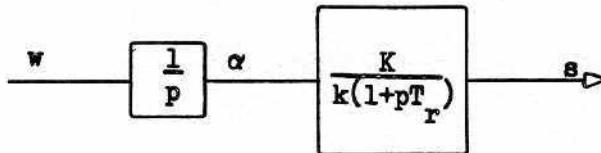
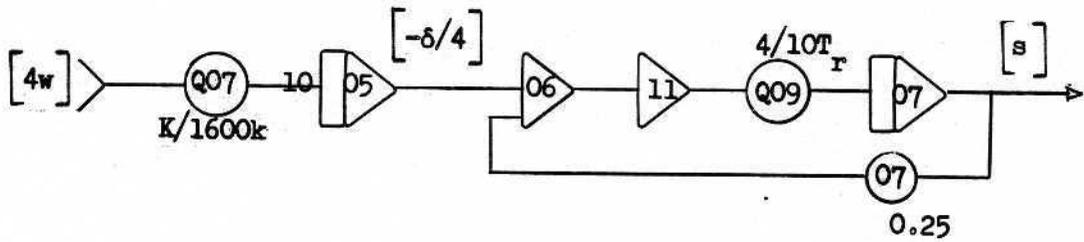


Figure A-5 Simulation de la fonction de transfert du missile.

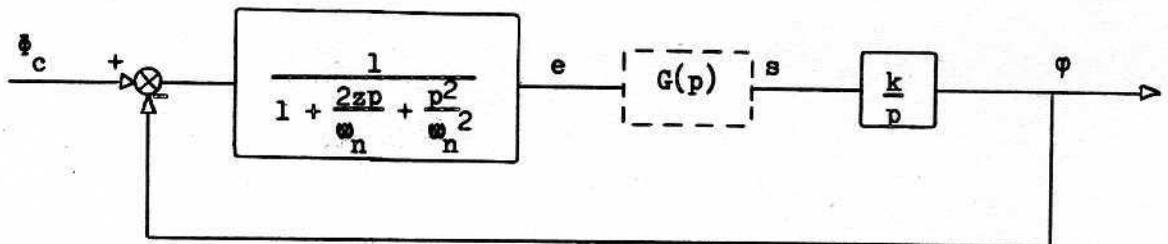
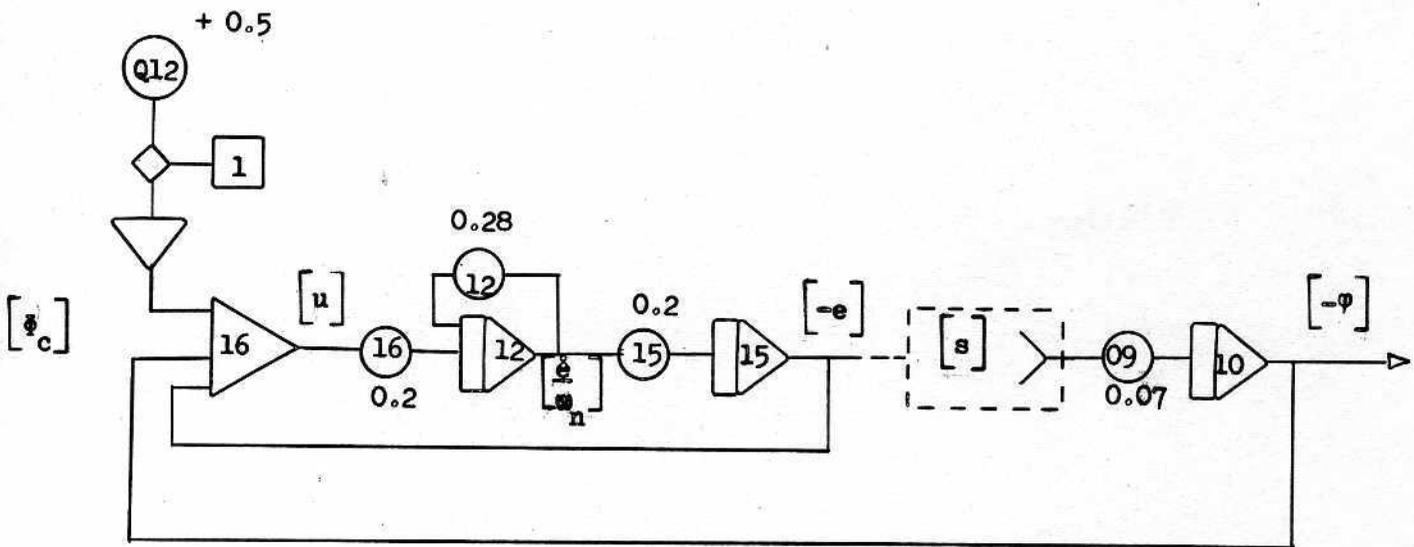


Figure A-6 Simulation de la boucle de commande.

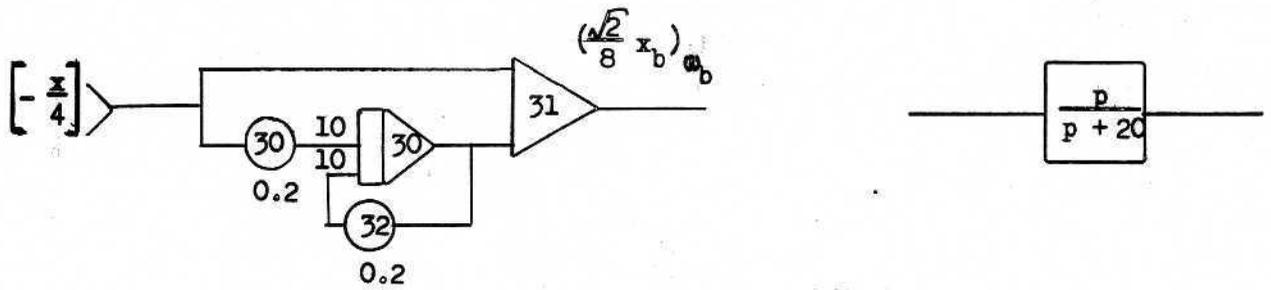


Figure A-7 Filtre passe-haut

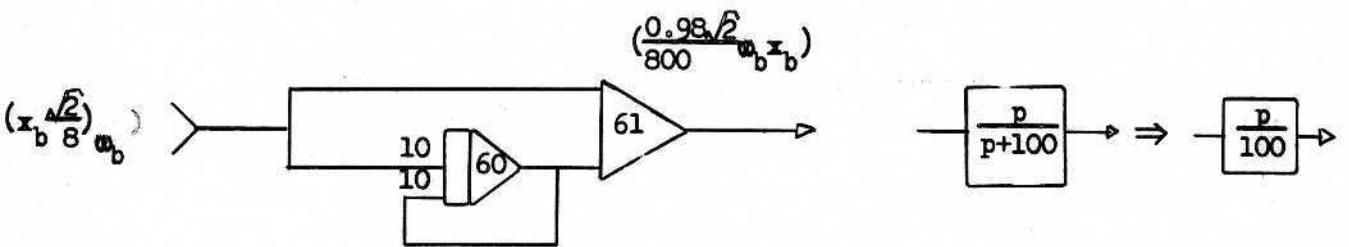


Figure A-8 Approximation du dériveur

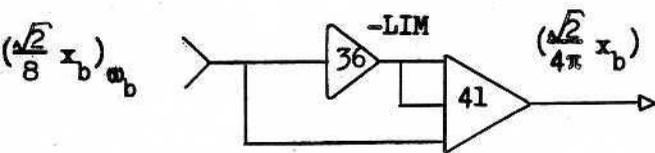


Figure A-9 1<sup>er</sup> Redresseur

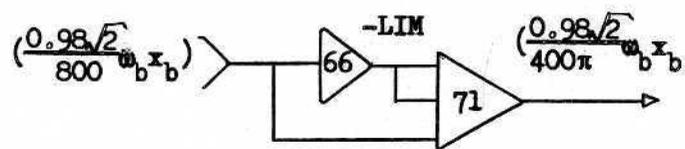


Figure A-10 2<sup>ième</sup> Redresseur

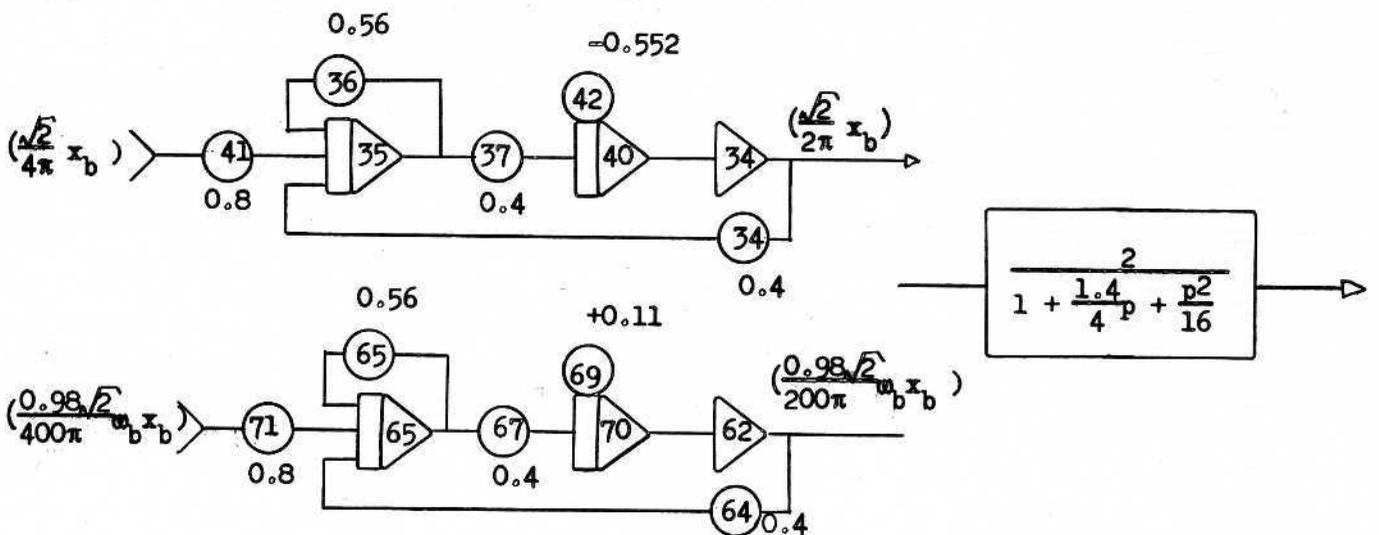


Figure A-11 Premier et deuxième filtres passe-bas.

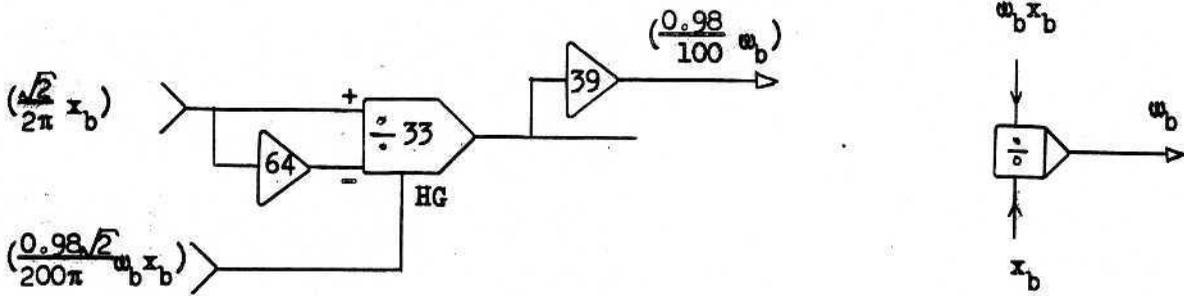


Figure A-12 Diviseur donnant la pulsation.

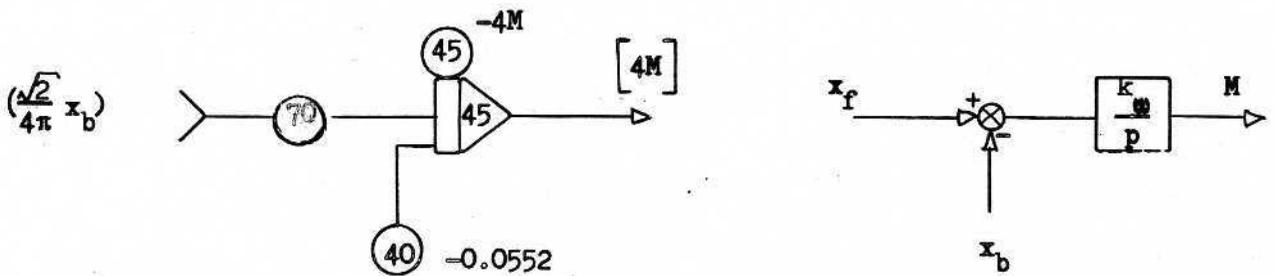


Figure A-13 Commande du niveau de sortie du relais.

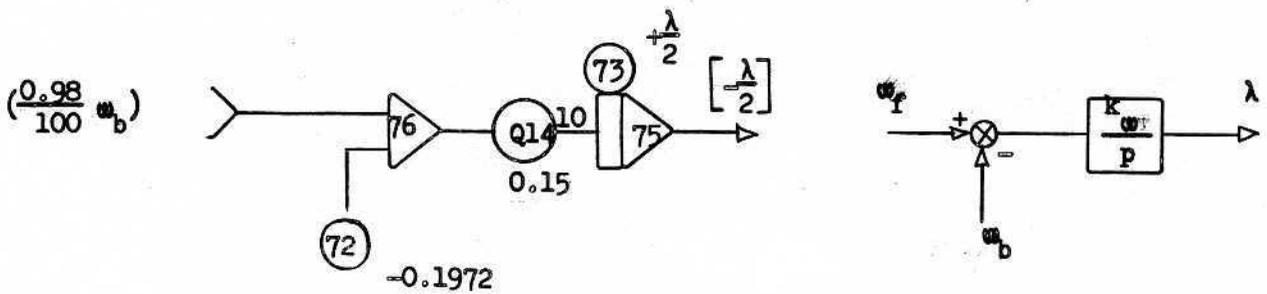


Figure A-14 Commande du paramètre multiplicatif  $\lambda$ .



## R é f é r e n c e s

- 1 E. MISHKIN, and L. BRAUN, Jr.: "Adaptative Control Systems", McGraw-Hill Book Company, New-York, 1961.
- 2 J.Ch. GILLE, P. DECAULNE et M. PELEGRIN: "Méthode d'étude des systèmes asservis non linéaires", Dunod, Paris, 1967.
- 3 J. GANS: Influence des phénomènes de nature non linéaire sur les performances d'un asservissement linéarisé par balayage, Thèse de Maîtrise, Génie Electrique, Université Laval, Québec, 1967.
- 4 B.E. AMSLER, and R.E. GOROZDOS: On the Analysis of Bi-stable Control Systems, IRE Trans. Autom. Control, vol. AC-4, (December, 1959), pp. 46-58.
- 5 M. ABRAMOWITZ, and I.A. STEGUN: "Handbook of Mathematical Functions", Dover, 1965.
- 6 A. GELB, and W.E. VANDER VELDE: "Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design", McGraw-Hill Book Company, New-York, 1968.

- 7 Y.T. LI, and W.E. VANDER VELDE: Philosophy of Nonlinear Adaptative Systems,  
Proc. First IFAC Congr., Moscow, U.S.S.R., 1960,  
Butterworth Scientific Publications, London.
  
- 8 D.V. STALLARD: A Missile Adaptative Roll Autopilot with a  
New Dither Principle, IEEE Trans. Autom. Control,  
vol. AC-4 (December, 1959), pp. 44-58.