

Filtrage d'un système linéaire soumis à l'action d'une fonction aléatoire

1^{re} partie

M. Cuénod*, M. Ivanès** et M. Llibre***

Resumé

Cet article prend en considération des systèmes linéaires avec une seule variable d'entrée et de sortie et une fonction de transfert caractérisée par le quotient de deux polynômes d'ordres quelconques, avec la restriction que le système est stable (la partie réelle de ses pôles est négative) et que l'ordre du polynôme du numérateur est inférieur de 1 à l'ordre du polynôme du dénominateur.

En prenant comme hypothèse que la fonction d'auto-corrélation de la grandeur d'entrée est donnée par une seule ou une somme de fonctions exponentielles, les relations générales de la fonction d'auto-corrélation de la grandeur de sortie, de la fonction de corrélation mutuelle des grandeurs d'entrée et de sortie, de la variance et de la covariance sont données.

Le parti que l'on peut tirer de ces relations générales pour l'identification et l'optimisation de systèmes linéaires soumis à l'action de fonctions aléatoires est indiqué.

Zusammenfassung

Der Artikel bezieht sich auf Systeme mit je einer Eingangs- und Ausgangsgröße, mit einer Übergangsfunktion, welche durch den Quotienten von zwei Polynomen und von willkürlicher Ordnung gegeben ist, mit den 2 folgenden Begrenzungen: das System ist stabil (der reelle Anteil der Wurzeln des Nenners ist negativ), und die Ordnung des Nenners ist mindestens eine Einheit größer als die des Zählers.

Es wird angenommen, daß die Autokorrelation der Eingangsgröße durch eine Exponentialfunktion oder durch die Summe solcher Funktionen bestimmt ist. Allgemeine Beziehungen der Autokorrelation der Ausgangsgröße, der Kreuzkorrelation der Eingangs- und Ausgangsgrößen, der Varianz und Kovarianz werden abgeleitet.

Es wird angedeutet, wie diese Beziehungen für die Identifikation und die Optimierung solcher Systeme anzuwenden sind.

0. Introduction

Tout système peut être considéré comme un filtre établissant des relations de cause à effet entre sa ou ses grandeurs d'entrée, et sa ou ses grandeurs de sortie.

Dans le présent texte, nous prenons en considération le cas des systèmes linéaires avec une seule grandeur d'entrée x et de sortie y , ainsi que le montre en principe la figure 1.

Si la grandeur d'entrée est une fonction aléatoire, la grandeur de sortie l'est également. Deux approches sont possibles pour l'analyse des systèmes de ce genre, soumis à l'action de fonctions aléatoires:

- l'analyse spectrale est basée sur l'utilisation de densités spectrales et de la réponse harmonique du système
- l'analyse impulsionnelle est basée sur l'utilisation de fonctions de corrélation et de la réponse impulsionnelle ou indicielle du système

Nous nous limiterons à l'étude de phénomènes aléatoires stationnaires et gaussiens. Dans ce cas, la fonction aléatoire fluctue autour d'une valeur moyenne constante et le moment du premier ordre de cette fonction par rapport à cette valeur moyenne est nul. Les propriétés statistiques de ces fonctions peuvent être caractérisées par leur moment du deuxième ordre, variance et covariance, d'où l'intérêt d'être en mesure de les calculer.

Nous admettons que la fonction de transfert $g(p)$

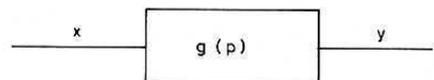


Fig. 1 Système linéaire avec une grandeur d'entrée x et une grandeur de sortie y

$g(p)$ = fonction de transfert

* Ingénieur à la Société Prospective Engineering Gestion (PEG) Genève

**Maître de Conférence à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble

*** Ingénieur au Groupe de Recherche Ionosphérique du CNRS à Orléans

Summary

The subject of this paper is the study of linear systems, the transfer function of which is given by the quotient of two polynomials of whatever order, with the restriction that the system is stable, that is the real part of its poles is negative, and the order of the numerator's polynomial is at least smaller by one than the denominator's order.

Assuming that the auto-correlation function of the input is given by an exponential function or a sum of these functions, the general relationships are given for the auto-correlation of the output, the cross-correlation input-output, their variance and covariance.

The use of these relationships for the identification and optimization of such systems is outlined.

du système est caractérisée par le quotient de 2 polynômes d'ordres quelconques

$$g(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec les seules restrictions que le degré du polynôme $D(p)$ est d'un degré supérieur à l'ordre du polynôme $N(p)$, et que le système est stable, c'est-à-dire que la partie réelle des racines du dénominateur sont toutes négatives.

Le but de cet exposé est d'indiquer l'expression générale des densités spectrales, fonctions d'auto-corrélation et de corrélations mutuelles de la grandeur de sortie d'un tel système.

Nous indiquerons le parti que l'on peut tirer de ces relations générales pour l'identification et l'optimisation des systèmes pris en considération.

Une récapitulation des relations générales de la statistique dynamique sur lesquelles sont fondés les développements qui font l'objet de cet article est donnée en annexe. Ces relations ont fait l'objet de nombreuses publications citées dans la bibliographie qui figure également en annexe [7...8].

1. Fonction d'auto-corrélation et densité spectrale de la grandeur d'entrée du système

Des considérations théoriques [9] ont prouvé que pour de nombreux phénomènes physiques, on peut admettre que la fonction d'auto-corrélation $\varphi_{xx}(\theta)$ de la grandeur d'entrée d'un système soumis à l'action d'une perturbation de caractère aléatoire, peut être caractérisée par une courbe exponentielle:

$$\varphi_{xx}(\theta) = \sigma_{xx}^2 e^{-\frac{\theta}{T_x}} = \sigma_{xx}^2 e^{k|\theta|}$$

avec σ_{xx}^2 = variance de la grandeur d'entrée

T_x = variabilité du processus aléatoire

$$k = -\frac{1}{T_x}$$

La densité spectrale correspondante est:

$$\Phi_{xx}(\omega) = -\sigma_{xx}^2 \frac{2k}{k^2 + \omega^2}$$

Ces fonctions sont celles que nous avons prises comme base pour notre étude; nous l'avons ensuite généralisée en admettant que la fonction d'auto-corrélation de la grandeur d'entrée est donnée par une somme de fonctions exponentielles:

$$\varphi_{xx}(\theta) = \sigma_{xx}^2 \sum_{s=1}^S a_s e^{k_s|\theta|}$$

avec $\sum_s a_s = 1$

d'où il résulte que:

$$\Phi_{xx}(\omega) = -\sigma_{xx}^2 \sum_{s=1}^S \frac{2a_s k_s}{k_s^2 + \omega^2}$$

2. Fonction de transfert et réponse harmonique du système

La fonction de transfert est donnée par l'expression suivante:

$$g(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}$$

avec $n > m$

Cette fonction de transfert peut être mise sous la forme normalisée suivante:

$$g(p) = \frac{a'_0 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_m p^m}{b'_0 + b'_1 p + b'_2 p^2 + \dots + p^n} = \frac{N'(p)}{\prod_{r=1}^n (p - p_r)}$$

avec $a'_0 = \frac{a_0}{b_n}$, $a'_1 = \frac{a_1}{b_n}$, ..., $a'_m = \frac{a_m}{b_n}$

$$b'_0 = \frac{b_0}{b_n}, b'_1 = \frac{b_1}{b_n}, \dots, b'_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

p_r = pôles du dénominateur avec $R_e(p_r) < 0$

$$N'(p) = a'_0 + a'_1 p + a'_2 p^2 + \dots + a'_m p^m$$

Pour alléger les notations nous supposons donc, dans ce qui suit, que

$$g(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } b_n = 1$$

Cette fonction de transfert peut être décomposée en ses éléments simples

$$g(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{p - p_j}$$

avec $\alpha_j = \frac{N(p_j)}{\left\{ \frac{d}{dp} [D(p)] \right\}_{p=p_j}} = \frac{N(p_j)}{\prod_{\substack{r=1 \\ (r \neq j)}}^n (p_j - p_r)}$

Cette décomposition n'est valable que pour des pôles simples. Pour des pôles multiples, l'expression devient plus compliquée.

Nous admettons par exemple que le pôle p_1 est un pôle multiple d'ordre m :

$$p_r = p_1 \text{ pour } r = 1 \dots m$$

La fonction de transfert s'écrit alors:

$$g(p) = \frac{N'(p)}{(p - p_1)^m \prod_{r=m+1}^n (p - p_r)}$$

La décomposition en éléments simples fait intervenir des éléments ayant des degrés de 1...i

$$g(p) = \sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{(p - p_1)^i} + \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j}{p - p_j}$$

avec $\alpha_i = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{(m-1)}}{dx^{m-1}} \frac{N(x)}{\prod_{r=m+1}^n (x - p_r)} \right\}_{x=p_1}$

$$\text{et } \alpha_j = \frac{N(p_j)}{\prod_{\substack{r=1 \\ (r \neq j)}}^n (p_j - p_r)}$$

La réponse harmonique $G(j\omega)$ écrite sous forme complexe s'obtient en remplaçant p par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert:

$$G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

Le carré $|G(j\omega)|^2$ de la valeur absolue s'obtient en multipliant l'expression du numérateur et du dénominateur par leurs valeurs conjuguées complexes:

$$|G(j\omega)|^2 = G(j\omega) \cdot G(-j\omega) = \frac{N(j\omega) \cdot N(-j\omega)}{D(j\omega) \cdot D(-j\omega)}$$

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{\sum_{j=1}^n 2\alpha_j p_j G(-p_j)}{j\omega + p_j(j\omega - p_j)} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{(j\omega - p_i)(j\omega + p_j)}$$

3. Calcul des densités spectrales de la grandeur de sortie

En utilisant les relations rappelées en annexe, nous obtenons immédiatement les densités spectrales recherchées.

3.1 Densité spectrale de la grandeur de sortie

$$\Phi_{yy}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) \cdot |G(j\omega)|^2$$

$$\frac{\Phi_{yy}(\omega)}{\sigma_{xx}^2} = - \frac{2k}{k^2 + \omega^2} \cdot |G(j\omega)|^2$$

Après décomposition de la fonction de transfert en éléments simples et regroupement, on obtient:

- lorsqu'il n'y a que des pôles simples p_j :

$$\frac{\Phi_{yy}(\omega)}{\sigma_{xx}^2} = g(k) \cdot g(-k) \cdot \frac{-2k}{k^2 + \omega^2} + 2k \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - k^2} \cdot \frac{-2p_j}{p_j^2 + \omega^2}$$

- lorsqu'il y a un pôle multiple p_1 d'ordre m :

$$\frac{\Phi_{yy}(\omega)}{\sigma_{xx}^2} = g(k) \cdot g(-k) \cdot \frac{-2k}{k^2 + \omega^2} + 2k \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - k^2} \cdot \frac{(-2p_j)}{p_j^2 + \omega^2} + \sum_{i=1}^m A_i \left\{ \frac{1}{(j\omega - p_1)^i} + \frac{1}{(-j\omega - p_1)^i} \right\}$$

avec $A_i = \frac{1}{(m-i)!} \left\{ \frac{d^{(m-i)}}{dx^{m-i}} \cdot \frac{2k g(-x) N'(x)}{(x^2 - k^2) \prod_{r=m+1}^n (x - p_r)} \right\}_{x=p_1}$

3.2 Densité spectrale mutuelle entre des grandeurs d'entrée et de sortie

$$\Phi_{xy}(\omega) = \Phi_{xx}(\omega) \cdot G(j\omega)$$

$$\frac{\Phi_{xy}(\omega)}{\sigma_{xx}^2} = -\frac{2k}{k^2 + \omega^2} \cdot \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

En décomposant la fonction de transfert en ses éléments simples, la densité spectrale mutuelle prend la forme suivante:

$$\frac{\Phi_{xy}(\omega)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{g(-k)}{j\omega - k} - \frac{g(k)}{j\omega + k} - 2k \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{p_j^2 - k^2} \cdot \frac{1}{(j\omega + p_j)}$$

4. Calcul de la fonction d'auto-corrélation de la grandeur de sortie

Nous considérons tout d'abord le cas particulier où les racines p_j sont toutes réelles, différentes de k et simples, puis nous examinerons les cas suivants:

- pôles complexes
- pôles multiples
- cas particulier où $p_j = k$

4.1 Cas avec racines simples, réelles et différentes de k

En appliquant les transformées inverses de *Fourier* à l'expression de la densité spectrale résultant de la décomposition de la fonction de transfert en éléments simples, on obtient:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(k) \cdot g(-k) e^{k|\theta|} + 2k \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - k^2} e^{p_j|\theta|}$$

En exprimant $g(p)$ en fonction de ses racines, ce résultat peut être mis sous la forme suivante:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{N(k) N(-k) e^{k|\theta|}}{\prod_{r=1}^n (p_r^2 - k^2)} - \sum_{j=1}^n \frac{N(p_j) N(-p_j)}{\prod_{\substack{r=1 \\ (r \neq j)}}^n (p_r^2 - p_j^2)} \cdot \frac{k e^{p_j|\theta|}}{p_j(p_j^2 - k^2)}$$

Exemple 1: Fonction de transfert du premier ordre

$$g(p) = \frac{1}{pT + 1} = -\frac{p_1}{p - p_1}$$

avec $p_1 = -\frac{1}{T}$

dans ce cas:

$$\alpha_1 = -p_1$$

En appliquant la formule générale donnée ci-dessus, il vient:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \left(-\frac{p_1}{k - p_1}\right) \left(-\frac{p_1}{-k - p_1}\right) e^{k|\theta|} + 2k \cdot p_1 \frac{p_1}{p_1^2 - k^2} e^{p_1|\theta|}$$

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1^2}{p_1^2 - k^2} e^{k|\theta|} - \frac{k p_1}{p_1^2 - k^2} e^{p_1|\theta|}$$

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1}{p_1^2 - k^2} (p_1 e^{k|\theta|} - k e^{p_1|\theta|})$$

En remplaçant

$$p_1 \text{ par } -\frac{1}{T} \text{ et } k \text{ par } -\frac{1}{T_x}$$

on obtient après quelques calculs

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{T_x}{T^2 - T_x^2} \left(T e^{-\frac{|\theta|}{T}} - T_x e^{-\frac{|\theta|}{T_x}} \right)$$

La figure 2 représente la famille de courbes que l'on obtient pour différentes valeurs du paramètre T .

Pour donner plus de généralité à ce résultat, on peut introduire des valeurs relatives en posant

$$a = \frac{T}{T_x}, \quad \delta = \frac{\theta}{T_x}, \quad \varphi_{yy}^{(n)}(\delta) = \frac{\varphi(\delta)}{\sigma_{yy}^2}$$

On obtient ainsi

$$\varphi_{yy}^{(n)}(\delta) = \frac{1}{a^2 - 1} \left(a e^{-\frac{\delta}{a}} - e^{-\delta} \right)$$

avec $\varphi_{yy}^{(n)}(0) = \frac{1}{a + 1}$

$$\frac{\varphi_{yy}^{(n)}(\delta)}{\varphi_{yy}^{(n)}(0)} = \frac{1}{a - 1} \left(a e^{-\frac{\delta}{a}} - e^{-\delta} \right)$$

La figure 3 donne la famille de courbes obtenues pour différentes valeurs du paramètre a . Ainsi que l'indique cette figure, ces courbes jouissent de la propriété que la sous-tangente au point d'inflexion est égale à $-(1+a)$, ce qui permet une estimation immédiate du paramètre a .

Exemple 2: Fonction de transfert du deuxième ordre

$$g(p) = \frac{1}{(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)} = \frac{p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

avec $p_1 = -\frac{1}{T_1}$

$$p_2 = -\frac{1}{T_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}; \quad \alpha_2 = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} = -\alpha_1$$

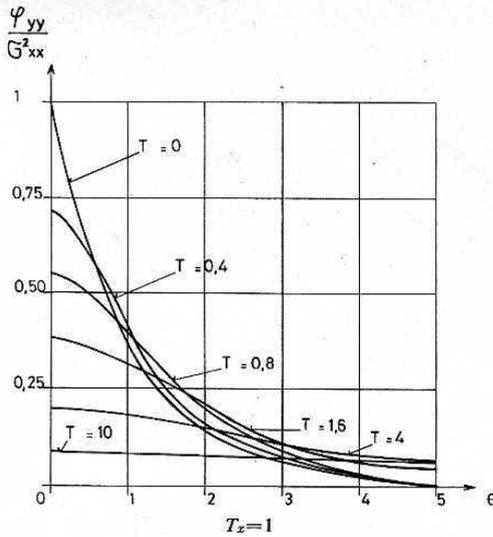


Fig. 2 Famille de fonctions d'auto-corrélation de la grandeur de sortie y d'un système du 1^{er} ordre

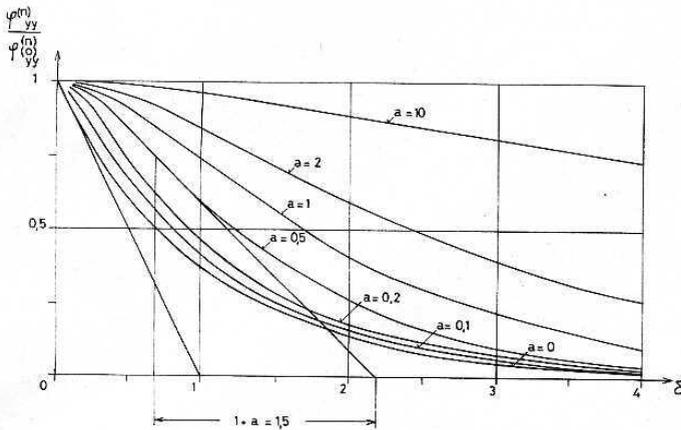


Fig. 3 Famille de fonctions d'auto-corrélation normalisée \$\varphi_{yy}^{(n)}\$ de la grandeur de sortie y d'un système du 1^{er} ordre

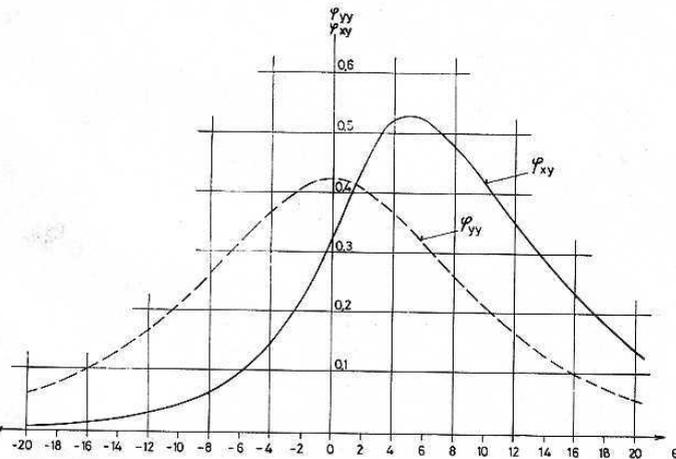


Fig. 4 Exemple de fonctions d'auto-corrélation et de corrélation mutuelle pour un système du 2^e ordre

A l'aide de la formule générale donnée ci-dessus, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} &= \frac{p_1 p_2}{(k-p_1)(k-p_2)} \cdot \frac{p_1 p_2}{(-k-p_1)(-k-p_2)} \cdot e^{k|\theta|} + \\ &+ 2k \left[\frac{\frac{p_1 p_2}{p_1^2 - p_2^2}}{p_1^2 - k^2} \cdot \frac{p_1 p_2}{-2p_1(-p_1 - p_2)} \cdot e^{p_1|\theta|} + \right. \\ &\left. + \frac{\frac{p_1 p_2}{p_2^2 - p_1^2}}{p_2^2 - k^2} \cdot \frac{p_1 p_2}{-2p_2(-p_2 - p_1)} \cdot e^{p_2|\theta|} \right] \\ \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} &= (p_1 p_2)^2 \left[\frac{e^{k|\theta|}}{(k^2 - p_1^2)(k^2 - p_2^2)} + \right. \\ &+ k \left(\frac{e^{p_1|\theta|}}{p_1(p_1^2 - k^2)(p_1^2 - p_2^2)} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{e^{p_2|\theta|}}{p_2(p_2^2 - k^2)(p_2^2 - p_1^2)} \right) \right] \end{aligned}$$

en posant

$$k = -\frac{1}{T_x}$$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}$$

et $p_2 = -\frac{1}{T_2}$

on obtient après quelques calculs:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} &= \frac{T_x^4 e^{-\frac{|\theta|}{T_x}}}{(T_1^2 - T_x^2)(T_2^2 - T_x^2)} + \\ &+ \frac{T_x}{T_1^2 - T_x^2} \left(\frac{T_1^3 e^{-\frac{|\theta|}{T_1}}}{T_1^2 - T_x^2} - \frac{T_2^3 e^{-\frac{|\theta|}{T_2}}}{T_2^2 - T_x^2} \right) \end{aligned}$$

En posant

$$T_1 = 2, T_2 = 6 \text{ et } T_x = 5$$

on obtient la fonction d'auto-corrélation représentée par la courbe \$\varphi_{yy}\$ de la figure 4.

La figure 5 représente la famille de courbes que l'on obtient pour \$T_x = 1, T_1 = 0,5\$ et pour différentes valeurs de \$T_2\$.

Exemple 3: Fonction de transfert du troisième ordre

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{1}{(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)(pT_3 + 1)} = \\ &= -\frac{p_1 p_2 p_3}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \end{aligned}$$

avec $p_1 = -\frac{1}{T_1}, p_2 = -\frac{1}{T_2}, p_3 = -\frac{1}{T_3}$

L'application de la formule générale conduit au résultat suivant:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = (p_1 p_2 p_3)^2 \left\{ \frac{e^{k|\theta|}}{(p_1^2 - k^2)(p_2^2 - k^2)(p_3^2 - k^2)} - k \left[\frac{e^{p_1|\theta|}}{p_1(p_1^2 - k^2)(p_1^2 - p_2^2)(p_1^2 - p_3^2)} + \frac{e^{p_2|\theta|}}{p_2(p_2^2 - k^2)(p_2^2 - p_1^2)(p_2^2 - p_3^2)} + \frac{e^{p_3|\theta|}}{p_3(p_3^2 - k^2)(p_3^2 - p_1^2)(p_3^2 - p_2^2)} \right] \right\}$$

La figure 6 représente la famille de courbes que l'on obtient pour

$$k = -\frac{1}{T_x} = -1$$

$$p_1 = -\frac{1}{T_1} = -2$$

$$p_2 = -\frac{1}{T_2} = -1,25$$

et pour différentes valeurs de

$$T_3 = -\frac{1}{p_3}$$

Exemple 4: Fonction de transfert du n-ième ordre

Nous supposons que la fonction de transfert peut être mise sous la forme suivante en fonction des pôles p_1, p_2, \dots de la fonction de transfert

$$g(p) = \frac{(-1)^n p_1 p_2 p_3 \dots p_n}{(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} = \frac{(-1)^n \prod_{j=1}^n p_j}{\prod_{j=1}^n (p-p_j)}$$

La fonction d'auto-corrélation prend la forme suivante en fonction des pôles p_1, p_2, \dots

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \left[\prod_{j=1}^n p_j \right]^2 \left\{ \frac{e^{k|\theta|}}{\prod_{r=1}^n (p_r^2 - k^2)} - k \sum_{j=1}^n \frac{e^{p_j|\theta|}}{p_j(p_j^2 - k^2) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n (p_r^2 - p_j^2)} \right\}$$

Cette relation peut être facilement généralisée en admettant que le numérateur est également constitué par un polynôme.

4.2 Cas avec racines complexes

Le développement donné ci-dessus est valable pour des pôles réels ou complexes. Voici le résultat auquel on arrive dans ce deuxième cas par une décomposition ne faisant intervenir que des quantités réelles. Pour cela nous posons:

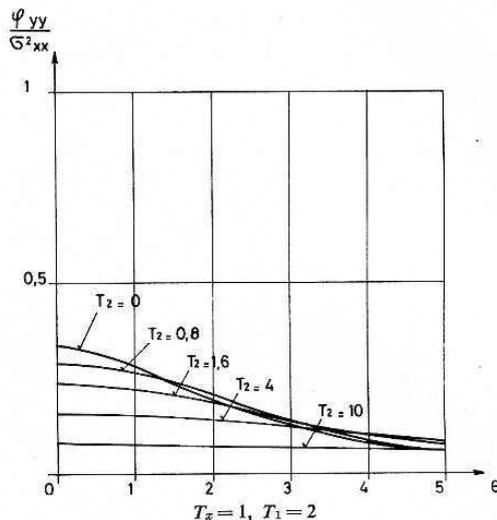
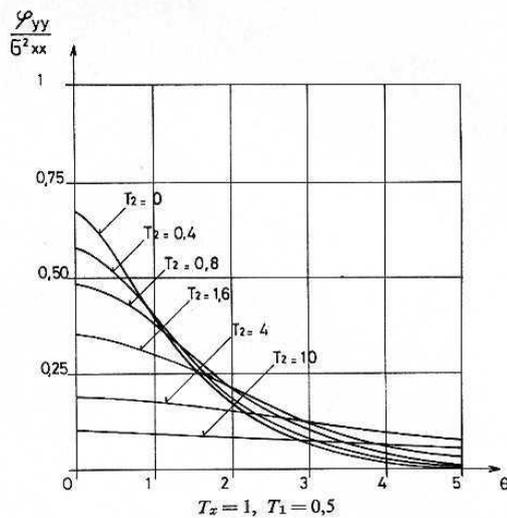


Fig. 5 Famille de fonctions d'auto-corrélation de la grandeur de sortie y d'un système du 2^o ordre

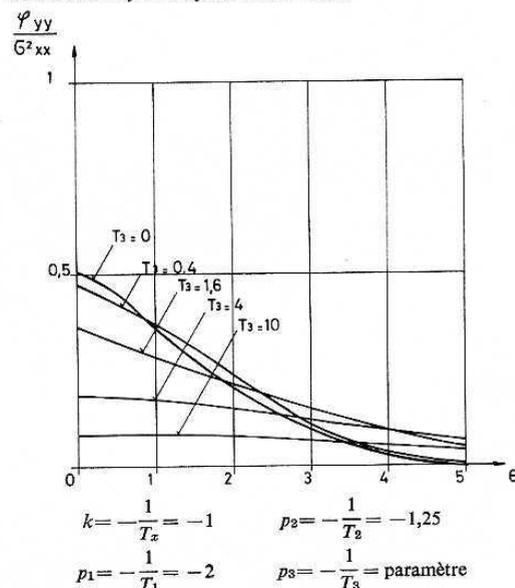


Fig. 6 Famille de fonctions d'auto-corrélation de la grandeur de sortie y d'un système du 3^o ordre

$$p_i = -x_i - j y_i$$

avec $i = 1 \dots \frac{m}{2}$ avec $x_i > 0$

p_j réel pour $j = m+1 \dots n$ avec $p_j > 0$

Nous appelons:

$$X_i = \text{partie réelle de } \frac{\alpha_i g(p_i)}{p_i^2 - k^2}$$

$$Y_i = \text{partie imaginaire de } \frac{\alpha_i g(p_i)}{p_i^2 - k^2}$$

$$g(p) = \frac{1}{p^2 + 2p\alpha + \Omega^2}$$

$$p_1 = -\alpha + j\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}$$

$$g(k) \cdot g(-k) = \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^2 - 4k^2\alpha^2}$$

$$g(-p_1) = \frac{1}{4\alpha(\alpha - j\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2})}; \quad \frac{1}{p_1^2 - k^2} = \frac{1}{2\alpha^2 - \Omega^2 - k^2 + 2j\alpha\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}}$$

$$X_1 + jY_1 = \frac{\alpha_1 g(-p_1)}{p_1^2 - k^2} = \frac{1}{8j\alpha\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}(\alpha - j\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2})(2\alpha^2 - \Omega^2 - k^2 + 2j\alpha\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2})}$$

$$X_1 = \frac{4\alpha^2 - \Omega^2 - k^2}{8\alpha\Omega^2[(\Omega^2 + k^2)^2 - 4\alpha^2 k^2]}; \quad Y_1 = -\frac{4\alpha^2 - 3\Omega^2 - k^2}{8\Omega^2\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}[(\Omega^2 + k^2)^2 - 4\alpha^2 k^2]}$$

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{(k^2 + \Omega^2)^2 - 4k^2\alpha^2} \left\{ e^{k|\theta|} + k^{-\alpha|\theta|} \left[\frac{(4\alpha^2 - \Omega^2 - k^2)}{2\alpha\Omega^2} \cos(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}|\theta|) \right] + \frac{4\alpha^2 - 3\Omega^2 - k^2}{2\Omega^2\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}} \sin(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}|\theta|) \right\}$$

Remarque: Lorsque

$$\alpha \rightarrow \Omega, \quad g(p) \rightarrow \frac{1}{(p + \Omega)^2}$$

on a donc une racine double $p_1 = p_2 = \Omega$.

Faisant tendre $\alpha \rightarrow \Omega$ dans la formule encadrée ci-dessus, le seul problème de limite a lieu pour le terme

$$\lim_{\alpha \rightarrow \Omega} \frac{\sin(\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}|\theta|)}{\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}}$$

on voit immédiatement que cette limite est $|\theta|$; d'où:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \Omega} \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{(k^2 - \Omega^2)^2} \left\{ e^{k|\theta|} + \frac{k(3\Omega^2 - k^2)}{2\Omega^3} + \frac{k(\Omega^2 - k^2)}{2\Omega^2} |\theta| e^{-\Omega|\theta|} \right\}$$

pour $g(p) = \frac{1}{(p + \Omega)^2}$ on obtient ainsi:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{e^{k|\theta|}}{(k^2 - \Omega^2)^2} + \frac{k(3\Omega^2 - k^2)e^{-\Omega|\theta|}}{2\Omega^3(k^2 - \Omega^2)^2} + \frac{k|\theta|e^{-\Omega|\theta|}}{2\Omega^2(\Omega^2 - k^2)}$$

On retrouvera ce résultat à l'exemple suivant.

Après quelques calculs on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} &= g(k) \cdot g(-k) e^{+k|\theta|} + \\ &+ 4k \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} [X_i \cos y_i |\theta| - Y_i \sin y_i |\theta|] e^{+x_i|\theta|} + \\ &+ 2k \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - k^2} e^{p_j|\theta|} \end{aligned}$$

Exemple

avec $\alpha < \Omega$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2j\sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}}$$

4.3 Cas avec des pôles multiples

En appliquant la transformée inverse de Fourier à la densité spectrale obtenue dans le cas de pôles multiples, on obtient après quelques calculs et en admettant que p_1 est un pôle multiple d'ordre m :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} &= g(k) \cdot g(-k) e^{k|\theta|} + \\ &+ \sum_{i=1}^m A_i \frac{|\theta|^{i-1}}{(i-1)!} e^{p_i|\theta|} + \\ &+ 2k \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - k^2} e^{p_j|\theta|} \end{aligned}$$

$$\text{avec } A_i = \frac{1}{(m-i)!} \left\{ \frac{d^{(m-i)}}{dx^{m-i}} \cdot \frac{2k g(-x) \cdot N(x)}{(x^2 - k^2) \prod_{r=m+1}^n (x - p_r)} \right\}_{x=p_1}$$

Exemple

$$g(p) = \frac{1}{(p + \Omega)^2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 2k \left\{ \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{(\Omega - x)^2 (x^2 - k^2)} \right] \right\}_{x=-\Omega} \\ &= k \frac{3\Omega^2 - k^2}{2\Omega^3 (\Omega^2 - k^2)^2} \end{aligned}$$

$$A_2 = 2k \left[\frac{1}{(\Omega - x)^2 (x^2 - k^2)} \right]_{x=\Omega}$$

$$\text{d'où: } \frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{1}{(\Omega^2 - k^2)^2} e^{k|\theta|} + \frac{(k^3 \Omega^2 - k^2)}{2\Omega^3 (\Omega^2 - k^2)^2} e^{-\Omega|\theta|} + \frac{k|\theta|}{2\Omega^2 (\Omega^2 - k^2)} e^{-\Omega|\theta|}$$

Ce résultat est identique à celui de la remarque faite à la page précédente.

4.4 Cas particulier où $p_n = k$

Nous admettons que la n -ième racine est égale à k :

$$p_n = k$$

Nous désignons par $\alpha_j(p)$ l'expression:

$$\frac{N(p)}{\prod_{\substack{r=1 \\ (r \neq j)}}^n (p - p_r)}$$

expression qui est égale à α_j lorsque $p = p_j$.

Lorsque $k = p_n$ la densité spectrale $\Phi_{yy}(\omega)$ du signal de sortie prend la forme suivante:

$$\frac{\Phi_{yy}(\omega)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{2k N(j\omega) \cdot N(-j\omega)}{(-j\omega - p_n)^2 (j\omega - p_n)^2 \prod_{r=1}^{n-1} (j\omega - p_r)(-j\omega - p_r)}$$

pour $j \neq n$ la décomposition en éléments simples se condense comme précédemment en

$$2k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - p_n^2} \cdot \frac{-2p_j}{p_j^2 + \omega^2}$$

Pour $j = n$ la présence d'un pôle double conduit à la décomposition suivante:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{2p_n}{x + p_n} \alpha_n(x) g(-x) \right\} \Bigg|_{x=p_n} \frac{-2p_n}{p_n^2 + \omega^2} + \alpha_n g(-p_n) \left[\frac{1}{(j\omega - p_n)^2} + \frac{1}{(-j\omega - p_n)^2} \right]$$

Nous désignons par A l'expression

$$A = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{2p_n}{x + p_n} \alpha_n(x) g(-x) \right\} \Bigg|_{x=p_n}$$

Cette expression peut s'expliquer de la façon suivante:

$$A = \alpha_n g(-p_n) \left\{ \frac{\left[\frac{d}{dx} N(x) \right]_{x=p_n}}{N(p_n)} + \frac{\left[\frac{d}{dx} N(-x) \right]_{x=p_n}}{N(-p_n)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2p_n}{p_j^2 - p_n^2} - \frac{1}{p_n} \right\}$$

En appliquant la transformée inverse de *Fourier* à cette densité spectrale, on obtient pour finir:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \alpha_n g(-p_n) \cdot |\theta| \cdot e^{p_n|\theta|} + A e^{p_n|\theta|} + 2k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j g(-p_j) e^{p_j|\theta|}}{p_j^2 - p_n^2}$$

avec A tel que défini ci-dessus.

4.5 Généralisation au cas où $\varphi_{xx} = \sigma_{xx}^2 \sum_{s=1}^S a_s e^{k_s|\theta|}$

Tenant compte du fait de la linéarité de toutes les opérations effectuées lors des transformations décrites ci-dessus, on obtient après quelques calculs:

$$\frac{\varphi_{yy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \sum_{s=1}^S g(k_s) \cdot g(-k_s) \cdot a_s \cdot e^{k_s|\theta|} + 2 \sum_{j=1}^n \alpha_j g(-p_j) e^{p_j|\theta|} \sum_{s=1}^S \frac{a_s k_s}{p_j^2 - k_s^2}$$

Cette relation est valable pour k_s réel et négatif, et pour le cas où k_s est complexe (avec partie réelle négative).

à suivre

Filtrage d'un système linéaire soumis à l'action d'une fonction aléatoire 2^e partie

Resumé

Cet article prend en considération des systèmes linéaires avec une seule variable d'entrée et de sortie et une fonction de transfert caractérisée par le quotient de deux polynômes d'ordres quelconques, avec la restriction que le système est stable (la partie réelle de ses pôles est négative) et que l'ordre du polynôme du numérateur est inférieur de 1 à l'ordre du polynôme du dénominateur.

En prenant comme hypothèse que la fonction d'auto-corrélation de la grandeur d'entrée est donnée par une seule ou une somme de fonctions exponentielles, les relations générales de la fonction d'auto-corrélation de la grandeur de sortie, de la fonction de corrélation mutuelle des grandeurs d'entrée et de sortie, de la variance et de la covariance sont données.

Le parti que l'on peut tirer de ces relations générales pour l'identification et l'optimisation de systèmes linéaires soumis à l'action de fonctions aléatoires est indiqué.

M. Cuénod*, M. Ivanès** et M. Llibre***

5. Calcul de la corrélation mutuelle entre les grandeurs d'entrée et de sortie

Nous considérons à nouveau les 4 cas pris en considération pour le calcul des fonctions d'auto-corrélation :

5.1 Cas avec racines simples, réelles et différentes de k

En appliquant la transformation inverse de *Fourier* à l'expression de la densité spectrale mutuelle, on obtient :

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(k) e^{k\theta} + 2k \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{p_j^2 - k^2} e^{p_j \theta}$$

$$\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(-k) e^{k\theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

Exemple 1: Fonction de transfert du premier ordre

$$g(p) = \frac{1}{pT + 1} = - \frac{p_1}{p - p_1}$$

$$\text{avec } p_1 = -\frac{1}{T} \text{ et } \alpha_1 = -p_1$$

En introduisant ces valeurs dans la formule générale donnée ci-dessus, nous obtenons :

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1}{k - p_1} e^{k\theta} - 2k \frac{p_1}{p_1^2 - k^2} e^{p_1 \theta}$$

$$\text{et } \frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1}{k + p_1} e^{k\theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

en posant :

$$p_1 = -\frac{1}{T} \text{ et } k = -\frac{1}{T_x}$$

* Ingénieur à la Société Prospective Engineering Gestion (PEG) Genève

**Maître de Conférence à la Faculté des Sciences de l'Université de Grenoble

*** Ingénieur au Groupe de Recherche Ionosphérique du CNRS à Orléans

il vient après quelques calculs:

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{T_x}{T_x - T} \left(e^{-\frac{\theta}{T_x}} - \frac{2T}{T_x + T} e^{-\frac{\theta}{T}} \right)$$

et $\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{T_x}{T_x + T} e^{-\frac{\theta}{T_x}}$ (avec $0 < \theta < \infty$)

on peut facilement contrôler que $\varphi_{xy}(0) = \varphi_{xy}(-0)$.

En introduisant à nouveau des valeurs relatives

$$a = \frac{T}{T_x}, \delta = \frac{\theta}{T_x} \text{ et } \varphi_{xy}^{(n)} = \frac{\varphi_{xy}(\delta)}{\sigma_{xx}^2}$$

on obtient:

$$\varphi_{xy}^{(n)}(\delta) = \frac{1}{1-a} \left(e^{-\delta} - \frac{2a}{1+a} e^{-\frac{\delta}{a}} \right)$$

$$\varphi_{xy}^{(n)}(-\delta) = \frac{1}{1+a} e^{-\delta}$$

et $\frac{\varphi_{xy}^{(n)}(\delta)}{\varphi_{xy}^{(n)}(0)} = \frac{1+a}{1-a} \left(e^{-\delta} - \frac{2a}{1+a} e^{-\frac{\delta}{a}} \right)$

$$\frac{\varphi_{xy}^{(n)}(-\delta)}{\varphi_{xy}^{(n)}(0)} = e^{-\delta}$$

La figure 7 représente la famille de courbes que l'on obtient pour différentes valeurs du paramètre a .

Exemple 2: Fonction de transfert du deuxième ordre

Nous supposons à nouveau que la fonction de transfert $g(p)$ peut être mise sous la forme suivante:

$$g(p) = \frac{1}{(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)} = \frac{p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

avec $p_1 = -\frac{1}{T_1}, p_2 = -\frac{1}{T_2}$

$$\alpha_1 = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}, \alpha_2 = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} = -\alpha_1$$

En appliquant la formule indiquée ci-dessus nous obtenons:

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1 p_2}{(k - p_1)(k - p_2)} e^{k\theta} + 2k \left[\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{e^{p_1\theta}}{p_1^2 - k^2} + \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \cdot \frac{e^{p_2\theta}}{p_2^2 - k^2} \right]$$

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = p_1 p_2 \left\{ \frac{e^{k\theta}}{(k - p_1)(k - p_2)} + \frac{2k}{p_1 - p_2} \left(\frac{e^{p_1\theta}}{p_1^2 - k^2} - \frac{e^{p_2\theta}}{p_2^2 - k^2} \right) \right\}$$

$$\varphi_{xy}(-\theta) = \frac{p_1 p_2}{(p_1 + k)(p_2 + k)} e^{k\theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

En posant

$$k = -\frac{1}{T_x}, p_1 = -\frac{1}{T_1} \text{ et } p_2 = -\frac{1}{T_2}$$

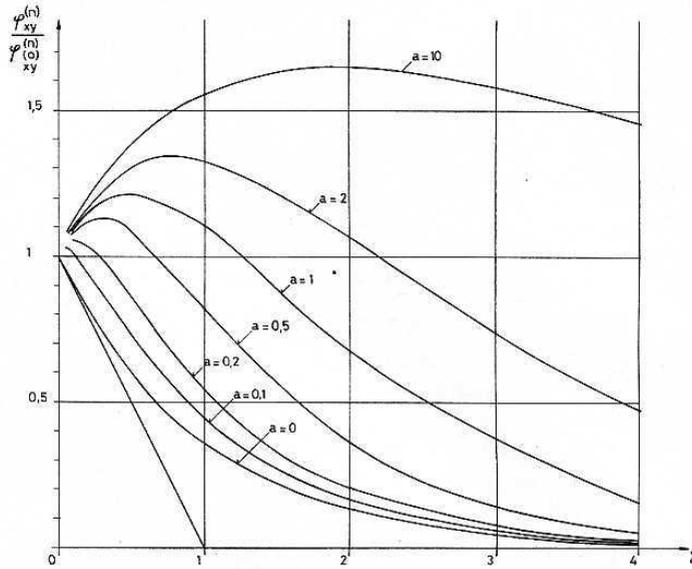


Fig. 7 Famille de fonctions de corrélation mutuelle normalisée $\varphi_{xy}^{(n)}$ entre les grandeurs d'entrée x et de sortie y d'un système du 1^{er} ordre

on obtient après quelques calculs:

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{T_x^2 e^{-\frac{\theta}{T_x}}}{(T_1 - T_x)(T_2 - T_x)} + \frac{2T_x}{T_1 - T_2} \left(\frac{T_1^2 e^{-\frac{\theta}{T_1}}}{T_1^2 - T_x^2} - \frac{T_2^2 e^{-\frac{\theta}{T_2}}}{T_2^2 - T_x^2} \right)$$

$$\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \frac{T_x^2}{(T_1 + T_x)(T_2 + T_x)} e^{-\frac{\theta}{T_x}} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

En posant $T_1 = 2, T_2 = 6$ et $T_x = 5$ on est conduit à la fonction de corrélation mutuelle représentée par la courbe 2 de la figure 3*. On voit que contrairement à la fonction d'auto-corrélation, cette fonction de corrélation mutuelle est dissymétrique par rapport à l'origine et qu'elle passe par un maximum pour $\theta = 5$.

5.2 Cas avec racines complexes

En posant $p_i = x_i + jx_i$ pour $i = 1 \dots \frac{m}{2}$ avec $x_i < 0$

et p_j réel pour $j = m+1 \dots n$ avec $p_j < 0$ ainsi que

$$C_i + jD_i = \frac{\alpha_i}{p_i^2 - k^2}$$

* Voir NT. 5/1972

la relation obtenue précédemment devient :

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(k) e^{k\theta} + 4k \sum_{i=1}^m [C_i \cos y_i \theta - D_i \sin y_i \theta] e^{+x_i \theta} + 2k \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j}{p_j^2 - k^2} e^{+p_j \theta}$$

$$\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(-k) e^{k\theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

5.3 Cas avec pôles multiples

En utilisant les mêmes notations que dans le cas du calcul des fonctions d'auto-corrélation, on obtient en admettant à nouveau que p_1 est un pôle multiple d'ordre m :

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(k) e^{k\theta} - \sum_{i=1}^m B_i \frac{\theta^{i-1}}{(i-1)!} e^{p_1 \theta} + 2k \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j}{p_j^2 - k^2} e^{p_j \theta}$$

avec $B_i = \frac{1}{(m-i)!} \left\{ \frac{d^{(m-i)}}{dx^{m-i}} \cdot \frac{2k}{x^2 - k^2} \cdot \frac{N(-x)}{\prod_{r=m+1}^n (-x - p_r)} \right\}_{x=p_1}$

$$\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(-k) e^{k\theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

5.4 Cas particulier où $p_n = k$

En effectuant des calculs similaires à ceux effectués pour le calcul de la fonction d'auto-corrélation dans ce cas particulier, on obtient :

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = e^{k\theta} (B_1 + \alpha_n \theta) + 2k \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha_j}{p_j^2 - k^2} e^{p_j \theta}$$

avec $B_1 = \alpha_n \left[\frac{1}{2p_n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{k - p_j} + \left[\frac{d}{dx} N(-x) \right]_{x=-k} \right]$

$$\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = g(-k) e^{k\theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

5.5 Généralisation au cas où $\varphi_{xx} = \sigma_{xx}^2 \sum_{s=1}^S a_s e^{k_s |\theta|}$

On obtient en tenant compte de la linéarité des phénomènes pris en considération :

$$\frac{\varphi_{xy}(\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \sum_{s=1}^S g(k_s) a_s e^{k_s \theta} + 2 \sum \alpha_j e^{p_j \theta} \sum_{s=1}^S \frac{a_s k_s}{p_j^2 - k_s^2}$$

$$\frac{\varphi_{xy}(-\theta)}{\sigma_{xx}^2} = \sum_{s=1}^S g(-k_s) a_s e^{k_s \theta} \quad (\text{avec } 0 < \theta < \infty)$$

6. Calcul de la variance σ_{yy}^2

6.1 Cas avec racines simples et réelles

En posant $\theta = 0$ dans l'expression de la fonction d'auto-corrélation, on obtient après quelques calculs :

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = -2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j + k}$$

Cette expression est également valable dans le cas particulier où $k = p_j$.

Exprimée en donnant à α_j et $g(-p_j)$ leurs valeurs en fonction des pôles p_j on obtient :

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = 2 \sum_{j=1}^n \frac{N'(p_j) \cdot N'(-p_j)}{(p_j + k) \prod_{\substack{r=1 \\ (r \neq j)}}^n (p_j - p_r) \prod_{r=1}^n (p_j + p_r)}$$

Exemple 1: Fonction de transfert du premier ordre

$$g(p) = \frac{1}{pT + 1} = -\frac{p_1}{p - p_1}$$

avec $p_1 = -\frac{1}{T}$ et $\alpha_1 = -p_1$

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = -2 \frac{(-p_1) \cdot \left(-\frac{p_1}{(-2p_1)} \right)}{p_1 + k} = \frac{p_1}{p_1 + k} = \frac{T_x}{T + T_x}$$

Exemple 2: Fonction de transfert du deuxième ordre

$$g(p) = \frac{1}{(pT_1 + 1)(pT_2 + 1)} = \frac{p_1 p_2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

avec $p_1 = -\frac{1}{T_1}$, $p_2 = -\frac{1}{T_2}$, $\alpha_1 = \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}$, $\alpha_2 = \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1}$

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = -2 \left[\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{p_1 p_2}{(-2p_1)(p_1 + p_2)} \cdot \frac{1}{p_1 + k} + \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_1 p_2}{(p_2 + p_1)(-2p_2)} \cdot \frac{1}{p_2 + k} \right]$$

Après quelques calculs on obtient :

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1 p_2}{(p_1 + k)(p_2 + k)} \left(1 + \frac{k}{p_1 + p_2} \right) = \frac{p_1 p_2 (p_1 + p_2 + k)}{(p_1 + p_2)(p_1 + k)(p_2 + k)}$$

en posant

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad p_2 = -\frac{1}{T_2} \quad \text{et} \quad k = -\frac{1}{T_x}$$

on obtient :

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = \frac{T_x (T_1 T_x + T_2 T_x + T_1 T_2)}{(T_1 + T_x)(T_2 + T_x)(T_1 + T_2)}$$

La figure 8 représente la famille de courbes obtenues en fonction de T_2 avec T_1 pour paramètre dans le cas où $T_x = 1$.

Cette expression est également valable dans le cas de racines complexes. En posant:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\alpha + j\Omega \\ p_2 &= -\alpha - j\Omega \\ k &= -1 \end{aligned}$$

on obtient:

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_{yy}^2} = \frac{\Omega^2 + \alpha^2}{\Omega^2 + 2\alpha + \alpha^2 + 1} \left(1 + \frac{1}{2\alpha}\right)$$

La figure 9 représente la famille de courbes que l'on obtient en fonction de $1/\Omega$ avec le facteur d'amortissement α comme paramètre. Il est intéressant de constater que pour de faibles valeurs de ce coefficient d'amortissement, le rapport $\sigma_{yy}^2/\sigma_{xx}^2$ peut prendre des valeurs supérieures à 1.

Exemple 3: Fonction de transfert du troisième ordre

$$g(p) = -\frac{p_1 p_2 p_3}{(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)}$$

On obtient après quelques calculs:

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = \frac{p_1 p_2 p_3}{(p_1+k)(p_2+k)(p_3+k)} \left(1 + \frac{k^2(p_1+p_2+p_3) + k(p_1+p_2+p_3)^2}{(p_1+p_2)(p_1+p_3)(p_2+p_3)}\right)$$

6.2 Cas avec des pôles multiples

Nous admettons à nouveau que p_1 est un pôle multiple d'ordre m .

En posant $\theta = 0$ dans l'expression obtenue pour la fonction d'auto-corrélation, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} &= g(k)g(-k) + \\ &+ 2k \left[\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{(i-1)!} \left\{ \frac{d^{(i-1)}}{dx^{i-1}} g(-x) \right\} \right] + \\ &+ \sum_{j=m+1}^n \frac{\alpha_j g(-p_j)}{p_j^2 - k^2} \end{aligned}$$

6.3 Généralisation au cas où $\varphi_{xx}(\theta) = \sigma_{xx}^2 \sum_{s=1}^S a_s e^{k_s|\theta|}$

En tenant compte à nouveau de la linéarité des opérations effectuées, on obtient:

$$\frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xx}^2} = - \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^n \frac{a_s \alpha_j g(-p_j)}{p_j + k_s}$$

7. Calcul de la covariance

7.1 Cas de racines réelles, complexes et multiples

En posant $\theta = 0$ dans l'expression obtenue pour la fonction de corrélation mutuelle $\varphi_{xy}(\theta)$, on obtient

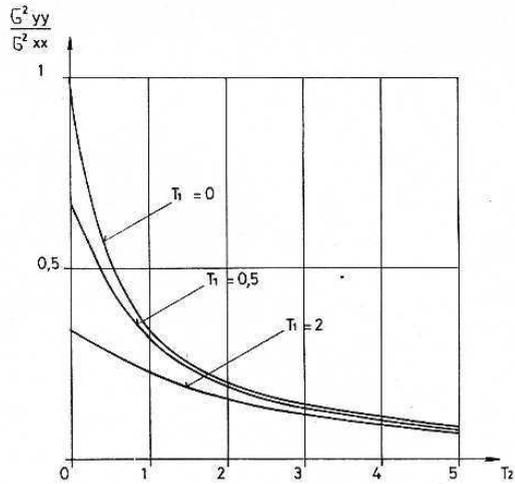


Fig. 8 Rapport entre la variance σ_{yy}^2 de la grandeur de sortie et celle σ_{xx}^2 de la grandeur d'entrée pour un système du 2^e ordre avec des racines réelles

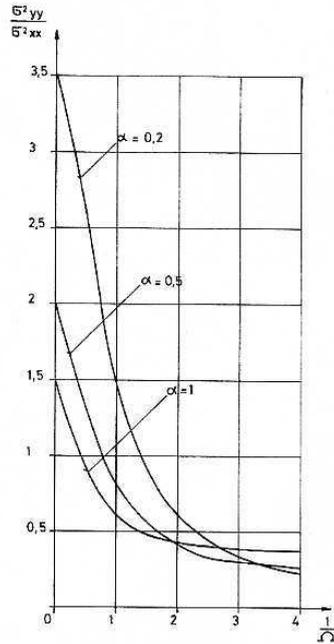


Fig. 9 Rapport entre la variance σ_{yy}^2 de la grandeur de sortie et celle σ_{xx}^2 de la grandeur d'entrée pour un système du 2^e ordre avec des racines complexes

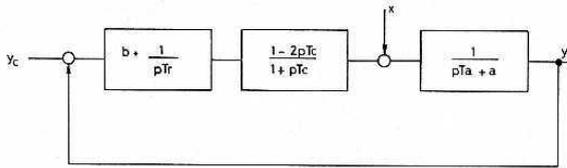


Fig. 10 Schéma fonctionnel du circuit de réglage d'un groupe hydro-électrique en marche isolée

l'expression suivante:

$$\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2} = g(-k)$$

Cette expression, remarquable dans sa simplicité, est également valable pour les cas de pôles complexes, de pôles multiples et dans le cas particulier où $p_a = k$.

7.2 Généralisation au cas où $\varphi_{xx}(\theta) = \sigma_{xx}^2 \sum_{s=1}^S a_s e^{k_s|\theta|}$

Compte tenu de la linéarité des opérations, on obtient:

$$\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2} = \sum_{s=1}^S a_s g(-k_s)$$

8. Utilisation des relations de filtrage d'un système soumis à des fluctuations aléatoires pour l'identification paramétrique de sa fonction de transfert

Dans de nombreux cas de la pratique, la fonction de transfert de plusieurs des éléments d'un système de réglage automatique sont connus; par contre, on

$$g_{xy}(p) = \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \left(b + \frac{1}{pT_r}\right) \cdot \frac{1 - 2pT_c}{1 + pT_c} \cdot \frac{1}{pT_a + a}}$$

$$g_{xy} = \frac{p^2 T_r T_c + p T_r}{p^3 T_a T_r T_c + p^2 (T_a T_r + a T_c T_r - 2b T_r T_c) + p(a T_r + b T_c - 2T_c) + 1}$$

Nous obtenons ainsi une fonction de transfert du troisième ordre.

Nous admettons que le paramètre à identifier est la constante de temps T_c du système hydraulique et que cette identification doit s'effectuer sans troubler l'exploitation, sur la base d'échantillons de la grandeur d'entrée x (fluctuations de la puissance consommée dans le réseau), et de la grandeur de sortie y (fluctuation de la fréquence du réseau).

Nous admettons qu'à partir de ces échantillons on a déterminé le rapport C de la covariance σ_{xy}^2 et de la

souhaite pouvoir identifier le ou les paramètres caractéristiques de l'un des éléments de ce système de réglage. Lorsque l'on peut faire une hypothèse sur la structure de la fonction de transfert de cet élément, on peut déterminer la fonction de transfert qui relie la ou les grandeurs d'entrée et de sortie de ce système. Cette fonction de transfert peut être d'un ordre élevé avec cependant un nombre relativement faible de paramètres à identifier.

Les relations générales données ci-dessus peuvent être avantageusement utilisées dans ce but pour l'identification de ces paramètres à partir d'échantillons de caractère aléatoire des grandeurs d'entrée et de sortie de ce système en utilisant la procédure suivante applicable dans le cas de systèmes avec une seule grandeur d'entrée et de sortie:

- on calcule ces fonctions et variances en prenant le ou les grandeurs à identifier comme paramètres variables
- on compare les résultats mesurés et calculés et par identification on détermine la valeur du paramètre à identifier qui fait coïncider au mieux ces résultats

Le principe de cette méthode est illustré à l'aide des 3 exemples donnés ci-dessous.

Exemple 1

La figure 10 représente le diagramme fonctionnel du circuit de réglage d'un groupe hydro-électrique en marche isolée.

La fonction de transfert qui relie les fluctuations de la charge (grandeur d'entrée) et la fréquence du réseau (grandeur de sortie) est la suivante:

variance σ_{xx}^2 exprimée en valeur relative

$$C = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_{xx}^2}$$

ainsi que la variabilité k des fluctuations de la grandeur d'entrée x .

Compte tenu de la relation donnée ci-dessus, ce rapport est obtenu en remplaçant p par $-k$ dans l'expression de la fonction de transfert (avec $k < 0$), nous obtenons l'équation suivante pour le paramètre à identifier T_c :

$$\frac{k^2 T_r T_c + k T_r}{k^3 T_a T_r T_c + k^2 (T_a T_r + a T_c T_r - 2b T_r T_c) + k(a T_r + b T_c - 2T_c) + 1} = C$$

$$T_c = \frac{C(k^2 T_a T_r + k a T_r + 1) - k T_r}{-k^3 C T_a T_r + k^2 (T_r - C a T_r + 2 C b T_r) + k C (2 - b)}$$

Exemple 2

La figure 11 représente le schéma fonctionnel d'un système de réglage du troisième ordre avec les paramètres T_1 et T_2 à identifier.

La fonction de transfert de ce système est la suivante :

$$g_{xy}(p) = \frac{y}{x} = \frac{a}{(1+pT_1)(1+pT_2)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{1+pT_1} \cdot \frac{1}{1+pT_2} \cdot \frac{1}{1+pT_3}}$$

$$g_{xy}(p) = \frac{y}{x} = \frac{a(1+pT_3)}{p^3 T_1 T_2 T_3 + p^2(T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3) + p(T_1 + T_2 + T_3) + 1 + a}$$

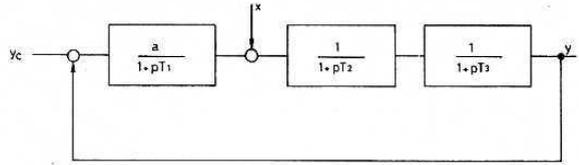


Fig. 11 Schéma fonctionnel d'un système de réglage du 3^e ordre

Nous supposons que $k = -1$ et $T_3 = 0,5$.

La figure 12 représente en fonction des paramètres à identifier T_1 et T_2 le lieu des points avec la variance σ_{yy}^2 et la covariance σ_{xy}^2 constantes.

Lorsque ces variances ont pu être mesurées, ce dia-

gramme permet de déterminer immédiatement les valeurs correspondantes de T_1 et de T_2 . Si le système évolue dans le temps, ce diagramme une fois établi permet de suivre immédiatement les variations de ces paramètres.

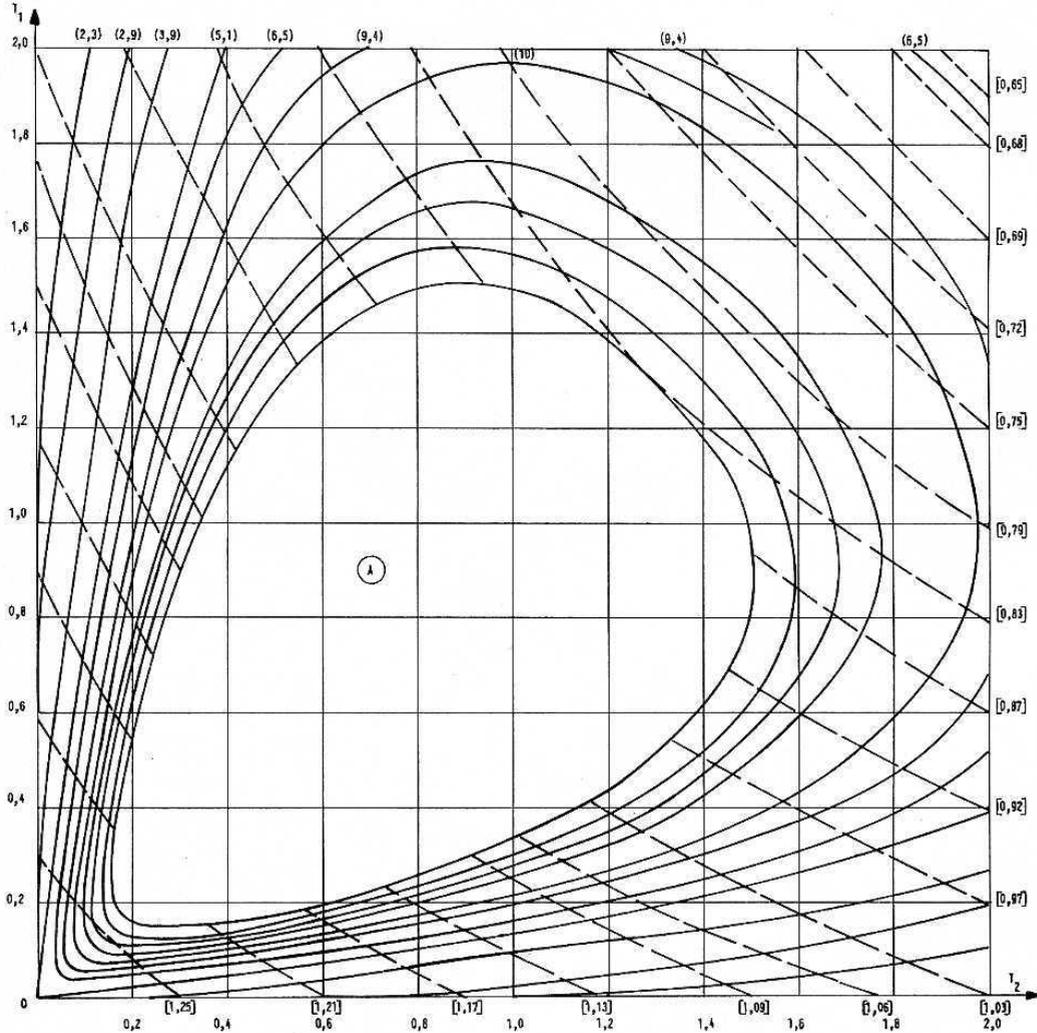


Fig. 12 Lieu des points à variance et covariance constantes du système de réglage donné par la figure 11 en fonction des paramètres à identifier T_1 et T_2

— $\sigma_{yy}^2 / \sigma_{xx}^2$
 - - - $\sigma_{xy}^2 / \sigma_{xx}^2$
 A = zone installée

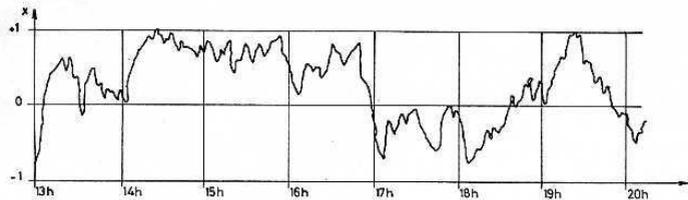


Fig. 13a Echantillons des fluctuations du signal de réglage d'une centrale asservie à un réglage de réseau

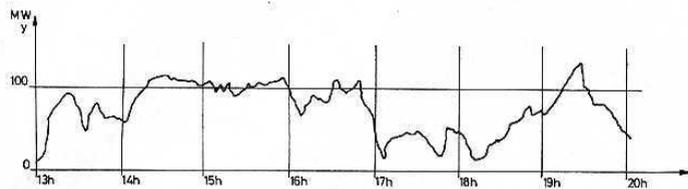


Fig. 13b Echantillons des fluctuations de la puissance de la centrale de réglage asservie au signal de réglage représenté par la figure 13a

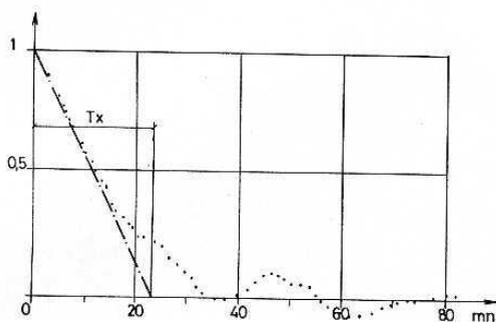


Fig. 14a Fonction d'auto-corrélation du signal de réglage correspondant à l'échantillon représenté par la figure 13a

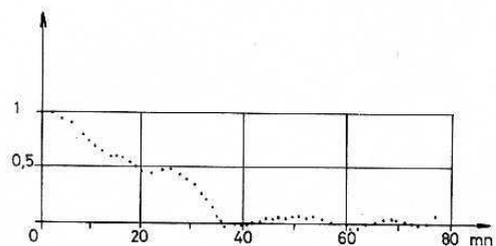


Fig. 14b Fonction d'auto-corrélation de la puissance de la centrale asservie au réglage correspondant à l'échantillon représenté par la figure 13b

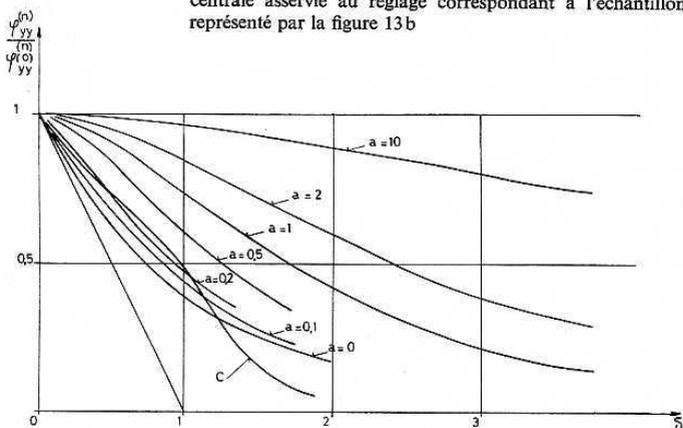


Fig. 15 Identification de la constante de temps d'un système du 1^{er} ordre au moyen de fonctions d'auto-corrélation

Exemple 3

Dans certains cas, il est difficile de connaître l'échelle des fluctuations des grandeurs d'entrée et de sortie. D'autre part, le calcul de la covariance nécessite de connaître de façon précise la simultanéité des échantillons des grandeurs d'entrée et de sortie, ce qui peut offrir certaines difficultés. Il est alors préférable de pouvoir utiliser la fonction d'auto-corrélation de la grandeur de sortie, sous forme normalisée. Cette méthode a été utilisée pour déterminer la fonction de transfert d'une centrale asservie à un réglage de réseau, à savoir la façon dont elle réagit aux ordres de réglage qui lui sont donnés. En première approximation, on peut admettre que cette fonction de transfert est du premier ordre avec une constante de temps qu'il s'agit d'identifier.

La figure 13 donne un exemple des fluctuations du signal de réglage et des variations correspondantes de la puissance de cette centrale.

La figure 14a représente la fonction d'auto-corrélation correspondante aux fluctuations du signal de réglage. On voit que cette fonction d'auto-corrélation correspond à une courbe exponentielle avec une constante de temps égale à environ 22 mn.

La figure 15 représente la même famille de courbes d'auto-corrélation sous forme normalisée donnée par la figure 3, mais sur laquelle est également représentée sous forme normalisée (courbe c) la fonction d'auto-corrélation donnée par la figure 14b. On voit que cette fonction est située entre $a = 0,2$ et $a = 0,1$. On en conclut que la valeur a du paramètre a correspondant à la fonction de transfert à identifier est égale à

$$a = 0,15 = \frac{T}{T_x}$$

d'où $T = aT_x = 0,15 \cdot 22 = 3,3$ mn.

9. Utilisation des relations de filtrage d'un système soumis à l'action de fluctuations aléatoires pour l'optimisation de ce système

Dans de nombreux cas l'optimisation d'un système consiste à ajuster un de ses paramètres variables de façon à extrémiser (en général minimaliser) la variance caractérisant les fluctuations de son signal de sortie.

Nous avons vu les relations qui permettent de calculer la variance caractérisant les fluctuations de la grandeur de sortie, en fonction des pôles de la fonction de transfert. Si le paramètre variable correspond à un de ces pôles, il est facile de procéder à cette optimisation en dérivant l'expression de cette variance par rapport à ce pôle, puis en annulant cette dérivée.

D'une façon générale, le paramètre d'optimisation est figuré de façon implicite dans les pôles de la fonction de transfert et il n'est pas possible d'obtenir

une relation directe entre ce paramètre et la variance qu'il s'agit de minimiser. La procédure à suivre est alors la suivante:

- déterminer les coefficients du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert en fonction du paramètre d'optimisation, et calculer ces coefficients pour différentes valeurs numériques de ce paramètre (p. ex. pour 10 valeurs)
- calculer les pôles de cette équation pour ces valeurs numériques
- calculer la variance σ_{yy}^2 pour les différentes valeurs de ces pôles et représenter le résultat ainsi obtenu sur un graphique en fonction du paramètre d'optimisation. Si cette courbe présente un minimum, on peut en déduire la valeur du paramètre correspondant à l'optimum recherché

Cette procédure nécessite donc une triple transformation:

- pour la détermination des coefficients du dénominateur en fonction du paramètre d'optimisation
- pour la détermination des pôles de la fonction de transfert en fonction de ces coefficients
- pour la détermination de la variance σ_{yy}^2 de la grandeur de sortie y en fonction de ces pôles

Une autre approche est de construire le diagramme des valeurs de la variance en fonction des paramètres d'optimisation. Ainsi que le représente par exemple la figure 12 pour le système de réglage représenté par la figure 11, et si le paramètre T_1 est connu, la valeur de T_2 correspondant à un extremum (dans ce cas particulier une valeur maximale de la variance) est obtenue en traçant par l'abscisse T_1 une parallèle à l'axe des abscisses, en déterminant la courbe de σ_{yy}^2 qui est tangente ainsi que la valeur de T_2 qui correspond à ce point de tangence.

Si on connaît approximativement les valeurs des paramètres correspondant à l'optimum recherché, différentes méthodes devenues classiques, peuvent être utilisées pour accélérer la recherche de l'optimum.

Conclusion

Les deux approches mentionnées dans l'introduction pour l'analyse de systèmes soumis à l'action de fonctions aléatoires, à savoir

- l'analyse spectrale
- l'analyse impulsionnelle

ont chacune leurs partisans et leurs détracteurs.

L'analyse spectrale a l'avantage de conduire à des relations plus simples, ainsi que le met en évidence le tableau donné en annexe, et de conduire à des résultats plus précis au point de vue statistique, en éliminant l'influence de dérives éventuelles. Son utilisation est particulièrement indiquée lorsque la réponse du système présente une fréquence propre accusée, car il suffit de connaître la densité spectrale des fluctuations de la grandeur d'entrée pour les valeurs proches de cette fréquence propre.

Son inconvénient est de conduire à de longs calculs pour la détermination de la densité spectrale correspondant à un échantillon donné, en particulier pour les fréquences basses du spectre.

L'analyse impulsionnelle est basée sur l'utilisation de fonctions de corrélations ou de corrélations mutuelles. Ces fonctions se laissent beaucoup plus aisément calculer pour un échantillon donné que les densités spectrales correspondantes. D'autre part, ces fonctions permettent de calculer facilement les variances et covariances. Elles se prêtent bien pour l'étude de systèmes dont la réponse impulsionnelle ou indicelle présente un caractère fortement apériodique sans fréquence propre.

En fait, ces deux approches sont complémentaires, chacune éclairant un aspect particulier des phénomènes pris en considération; il y a intérêt à les connaître l'une et l'autre, voire à les utiliser simultanément pour procéder à des recoupements en se souvenant de la parole de R. Poincaré: «C'est en comparant les aspects différents des choses que nous pouvons comprendre leur harmonie intime qui seule est belle et digne de nos efforts [1].»

Annexe

Définitions et relations de base de la statistique dynamique

x = Grandeur de sortie d'un système linéaire tel que défini par la figure 1

y = Grandeur de sortie de ce système

$g(t)$ = Réponse impulsionnelle

$g(p)$ = Fonction de transfert

$G(j\omega)$ = Réponse harmonique

$\varphi_{xx}(\theta)$ = Fonction d'auto-corrélation

$$\varphi_{xx}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\theta) dt$$

$\varphi_{xy}(\theta)$ = Fonction de corrélation mutuelle

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(\theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y(t+\theta) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\theta-\gamma) g(\gamma) d\gamma \end{aligned}$$

$\varphi_{yy}(\theta)$ = Fonction d'auto-corrélation de la grandeur de sortie

$$\begin{aligned} \varphi_{yy}(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\gamma) d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) \varphi_{xx}(\theta+\gamma-\eta) d\eta \\ \varphi_{yy}(\theta) &= \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(u+\theta) \varphi_g(u) du + \\ &= \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(u-\theta) \varphi_g(u) du \end{aligned}$$

avec:

$\varphi_g(\theta)$ = Fonction d'auto-corrélation de la réponse impulsionnelle

$$\varphi_g(\theta) = \int_0^{\infty} g(t) g(t+\theta) dt$$

$\Phi_{xx}(\omega)$ = Densité spectrale de la grandeur d'entrée

$$\begin{aligned} \Phi_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xx}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \end{aligned}$$

$\Phi_{yy}(\omega)$ = Densité spectrale de la grandeur de sortie

$$\begin{aligned} \Phi_{yy}(\omega) &= \Phi_{xx}(\omega) |G(j\omega)|^2 \\ \Phi_{yy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{yy}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \varphi_{yy}(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega) e^{j\omega\theta} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xx}(\omega) \cos(\omega\theta) d\omega \end{aligned}$$

$\Phi_{xy}(\omega)$ = Densité spectrale mutuelle

$$\Phi_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta = \Phi_{xx}(\omega) G(j\omega)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta + \\ &+ j \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{xy}(\theta) \sin(\omega\theta) d\theta \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega) e^{j\omega\theta} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{xy}(\omega) \cos(\omega\theta) d\omega \end{aligned}$$

σ_{yy}^2 = Variance de la grandeur de sortie

$$\sigma_{yy}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi_{yy}(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{yy}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |G(j\omega)|^2 \Phi_{xx}(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{yy}^2 = \varphi_{yy}(0) = 2 \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\theta) \varphi_g(\theta) d\theta$$

σ_{xy}^2 = Covariance

$$\sigma_{xy}^2 = \varphi_{xy}(0) = \int_0^{\infty} \varphi_{xx}(\theta) g(\theta) d\theta$$

Bibliographie

1. Benes, J.: Statistique dynamique des systèmes de régulation. Collection Bibliothèque de l'Automaticien, Editions Dunod, Paris 1964.
2. Solodovnikov, V.V.: Dynamique statistique des systèmes linéaires de commande automatique. Technique de l'Automatisme, Editions Dunod 1965
3. Laning, J.H., et Battin, R.H.: Processus aléatoire et systèmes asservis. Editions Dunod 1959.
4. Stern, J., de Barbeyrac, J., et Poggi, R.: Méthode pratique d'étude des fonctions aléatoires. Editions Dunod 1967.
5. Cuénod, M.: Etude de la réponse d'un système linéaire à une fonction aléatoire au moyen de l'analyse impulsionnelle. Revue Générale d'Electricité, février (1956).
6. Cuénod, M., et Pun, L.: Les fluctuations aléatoires et l'imprécision des réglages industriels. Revue Automatisme. N°5 de mai, juin, septembre, novembre, décembre (1957).

7. Cuénod, M., Durling, A., et Valisalo, P.: Analysis of random process on hybrid computers. Rapport au Congrès de l'AICA à Lausanne, août 1967.

8. Cuénod, M., et Sage, A.P.: Comparison of some methods used for process identification. Survey Report for the 1967 IFAC Symposium on the problems of Identification in Automatic Control Systems.

9. Fortet, R.: Spectre des fluctuations de courant absorbé par un réseau électrique. Bull. de la Sec. fr. des électriciens, nov. (1954).

10. Cuénod, M., Ivanov, M., et Llibre, M.: Stochastic relation in linear filtering and identification problems. Paper 22 to the 2nd IFAC Symposium in Prague on «Identification and Parameters identification».

11. Poincaré, R.: La valeur de la Science (p. 149).