

RE : Congrès AFCET AUTOMATIQUE 83  
Besançon 15-17 Novembre

Paris, le 26 novembre 1982

Votre Communication : CHD 46

Michel LLIBRE      CHD 46 AUT  
CERT DERA  
BP 4025  
31055 TOULOUSE CEDEX

Titre Simulation de la dynamique des robots  
manipulateurs motorisés

## SIMULATION DE LA DYNAMIQUE DES ROBOTS MANIPULATEURS MOTORISÉS

SIMULATION OF MOTORIZED MANIPULATORS DYNAMICS

M.LLIBRE - R.MAMPEY - J.P.CHRETIEN  
Département d'Automatique (DERA)  
C.E.R.T. - 2, avenue E.Belin  
31055 TOULOUSE CEDEX (France)

### RÉSUMÉ

On présente dans cet article deux algorithmes utiles à la modélisation dynamique des robots : le premier est l'algorithme classique de Newton Euler à double récurrence avant-arrière ; le second est un algorithme original de calcul de la matrice d'énergie cinétique par récurrence arrière. Les deux algorithmes, très performants en temps de calcul, sont étendus afin de prendre en compte la dynamique des moteurs et des transmissions et sont conjointement utilisés pour la simulation dynamique d'un manipulateur.

**MOTS CLÉS :** Robotique - manipulateur - actionneur - simulation - modelisation dynamique.

### ABSTRACT :

*In this paper two algorithms which are useful for manipulator dynamics modeling are presented : the first one is the Newton Euler algorithm in the classical forward backward recurrent formulation ; the second one is a new way of calculating the kinetic energy matrix through backward recurrence. Both algorithms which main feature is the computer calculation speed, are extended to includes actuator's rotor and gear dynamical properties ; they are used in the framework of a manipulator dynamics simulation program*

**KEYWORDS :** robotics-manipulator dynamics-actuators-simulation.

### Remerciements :

Les auteurs remercient le Centre National d'Etudes Spatiales qui a financé la mise en oeuvre de la simulation sur un système manipulateur + satellite permettant ainsi de valider les algorithmes de modélisation qui s'inscrivent par ailleurs dans le cadre des travaux du CERT/DERA pour le programme national ARA.

## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION

#### I - DESCRIPTION DU MANIPULATEUR

I.1 - Données sur les corps

I.2 - Données sur les actionneurs

#### II - L'ALGORITHME DE NEWTON EULER AVEC ACTIONNEURS

II.1 - Récurrence avant

II.2 - Récurrence arrière

#### III - CALCUL DE LA MATRICE D'ENERGIE CINETIQUE

III.1 - Etablissement des formules de récurrence

III.2 - Algorithme de calcul des éléments de A

#### IV - MODELE DE SIMULATION

IV.1 - Coût en opérations

IV.2 - Validation de la simulation

#### V - CONCLUSION

#### VI - BIBLIOGRAPHIE

ANNEXE : Illustration des temps de calcul obtenus

### INTRODUCTION

Le problème de l'obtention des équations dynamiques exactes d'un système de corps articulés est posé depuis de nombreuses années et a reçu une grande variété de solutions.

On peut distinguer deux approches qui conduisent à l'écriture de ces équations : une formulation explicite de tous les coefficients intervenant dans les équations et une formulation implicite où l'utilisation de récurrences permet de n'écrire les équations que pour un corps générique. La première formulation permet une simplification aisée des équations pour une configuration mécanique et géométrique donnée, mais nécessite des moyens logiciels de calcul formel des coefficients. La seconde formulation fait l'objet des développements qui vont suivre, elle permet d'écrire des modules logiciels performants en temps de calcul dans le cas où l'on ne particularise pas les équations à telle configuration mécanique ou géométrique. On utilise deux algorithmes pour le calcul de la matrice cinétique et pour le calcul des termes complémentaires (Coriolis...) qui sont évalués globalement. Les inerties mobiles des moteurs et des réducteurs, dont l'effet dynamique peut être non négligeable, sont également prises en compte dès l'abord.

## I - DESCRIPTION DU MANIPULATEUR

Les algorithmes présentés s'appliquent à des chaînes cinématiques simples. Ils peuvent s'étendre aux structures arborescentes sans boucle. La chaîne est constituée de  $n$  corps mobiles  $C_i$ , à  $C_n$  et d'un corps fixe  $C_0$ , liés par  $n$  articulations  $O_1$  à  $O_n$  à un degré de liberté.

Pour chaque articulation  $O_i$  séparant les corps  $C_{i-1}$  et  $C_i$ , on associe deux points  $O_i$  et  $O_i^+$  appartenant respectivement à ces deux corps et à l'axe de l'articulation. On associe à cet axe un vecteur unitaire  $\vec{k}_i$  fixe par rapport aux deux corps.

La coordonnée généralisée  $q_i$  est définie comme suit :

- pour une liaison rotoïde :  $q_i$  est l'angle entre deux plans fixes dans  $C_{i-1}$  et  $C_i$  et contenant  $\vec{k}_i$  ;  $O_i$  et  $O_i^+$  sont confondus : on pose  $\rho_i = 1$ ,  $\tau_i = 0$
- pour une liaison prismatique :  $q_i$  est définie par  $\vec{O_i^- O_i^+} = q_i \vec{k}_i$  ; on pose  $\rho_i = 0$ ,  $\tau_i = 1$

A chaque corps  $C_i$  est associé un repère orthonormé  $\mathcal{R}_i(O_i^+, \vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i)$ . Notons :  $P_i$  les matrices de passage de  $\mathcal{R}_{i-1}$  à  $\mathcal{R}_i$  pour la configuration origine ( $q_i=0$ ) ;

$S_i$  la matrice de passage de  $\mathcal{R}_{i-1}$  à  $\mathcal{R}_i$  pour une configuration quelconque, on a :

$$S_i = P_i [\tau_i \mathbb{1} + \rho_i R_i] \quad \text{avec } \mathbb{1} \text{ matrice unité et}$$

$$R_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 \\ \sin q_i & \cos q_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### I.1 - Données sur les corps

$l_i$  : composantes dans le repère  $\mathcal{R}_i$  du vecteur  $\vec{l}_i = \vec{O_i^+ O_{i+1}^-}$

$m_i$  : masse du corps  $C_i$

$d_i$  : composantes dans  $\mathcal{R}_i$  du vecteur  $\vec{d}_i = \vec{O_i^+ G_i}$ ,  $G_i$  centre de gravité du corps  $C_i$  de masse  $m_i$

$I_i$  : composantes dans  $\mathcal{R}_i$  du tenseur d'inertie  $J_i$  du corps  $C_i$  en  $G_i$

### I.2 - Données sur les actionneurs

On considérera dans la modélisation que les actionneurs dont les effets inertiels ne sont pas négligeables devant ceux des corps entraînés; ainsi, les masses et inerties des vérins hydrauliques seront inclus avec ceux des corps auxquels ils sont liés.

La modélisation présentée ne permet de représenter que des actionneurs  $\mathcal{M}_i$  constitués d'un moteur (électrique ou hydraulique) et de son boîtier de transmission portés par le corps  $C_{i-1}$  pour actionner le corps  $C_i$ . L'extension au cas où le moteur  $\mathcal{M}_i$  est porté par le corps  $C_{i-k}$  avec  $k > 1$  conduit à ces calculs trop spécifiques des systèmes de transmission utilisés.

Notons :

$\epsilon_i$  : les composantes dans  $\mathcal{R}_i$  du vecteur unitaire  $\vec{\epsilon}_i$  porté par l'axe rotor de l'actionneur  $\mathcal{M}_{i+1}$ . Cette direction peut être quelconque.

$j_{mi}$  : l'inertie autour de son axe  $\vec{\epsilon}_{i-1}$  de l'actionneur  $\mathcal{M}_i$  et de la pignonerie de l'arbre d'entrée rigidement liée à ce rotor. L'appellation rotor est étendue à cet ensemble.

$i_{mi}$  : l'inertie du rotor autour d'un axe principal d'inertie perpendiculaire à l'axe  $\vec{\epsilon}_{i-1}$  (avec l'inégalité classique pour un solide de révolution  $i_{mi} \geq j_{mi}/2$ )

$I_{mi}$  : composantes dans  $\mathcal{R}_i$  du tenseur d'inertie  $J_{mi}$  du rotor de  $\mathcal{M}_{i+1}$  au centre d'inertie du rotor, on démontre que :

$$I_{mi} = (j_{mi+1} - i_{mi+1}) \varepsilon_i \varepsilon_i^t + i_{mi+1} \mathbb{1}$$

que l'on peut réécrire :

$$I_{mi} = j_{mi+1} \varepsilon_i \varepsilon_i^t - i_{mi+1} \overset{\sim}{\varepsilon}_i^2$$

On utilise ici la notation  $\overset{\sim}{v}$  pour exprimer les composantes de la matrice associée ou tenseur antisymétrique  $\overset{\sim}{v}$  lui-même associé à l'opération pré-produit vectoriel par le vecteur  $\vec{v}$ .

*Remarque sur les masses et inerties :*

La masse  $m_i$  du corps  $C_i$  comprend également la masse du carter, du rotor et de la pignonnerie de l'actionneur  $\mathcal{M}_{i+1}$  à l'exception de la masse de son arbre de sortie (rigidement lié au corps  $C_{i+1}$ ) qui est comprise dans  $m_{i+1}$ ;  $m_i$  inclut donc également la masse de l'arbre de sortie de  $\mathcal{M}_i$ .

Le centre de gravité  $G_i$  correspond à l'ensemble de masse  $m_i$  noté  $C_i^+$ . Appelons  $J_i$  le tenseur d'inertie en  $G_i$  de l'ensemble  $C_i^+$  de masse  $m_i$  (incluant donc le tenseur d'inertie du rotor  $J_{mi}$ ) ce tenseur concerne des ensembles animés des vitesses de rotation différentes ; on utilisera également le tenseur  $J_i'$  défini par :

$$J_i' = J_i - J_{mi}$$

Notons encore :

$\alpha_i$  : le rapport de réduction du boîtier de transmission de l'actionneur  $\mathcal{M}_i$

$\xi_{vi}$  : le coefficient de frottement visqueux de l'actionneur  $\mathcal{M}_i$  "ramené" sur l'axe de sortie ( $\xi_{vi} = \alpha_i^2 \xi_{vei} + \xi_{vsi}$ )

$q_{si}$  : la force ou le couple de frottement sec s'opposant au mouvement de l'actionneur  $\mathcal{M}_i$  "ramené" sur l'axe de sortie :

$$(q_{si} = \alpha_i q_{sei} + q_{ssi})$$

## II - L'ALGORITHME DE NEWTON-EULER AVEC ACTIONNEURS

L'algorithme de Newton-Euler [HOL 80] permet de calculer les forces généralisées aux articulations à partir de la donnée de la configuration  $q$  ( $q_i$  pour  $i = 1$  à  $n$ ) et de ses dérivées  $\dot{q}$  et  $\ddot{q}$ . Il procède en deux étapes : une récurrence avant permet de calculer les vitesses et les accélérations de chaque corps puis une récurrence arrière permet de calculer toutes les forces et couples de liaison et en particulier les forces généralisées aux articulations.

Notons :

$\vec{\omega}_i$  : vecteur vitesse instantanée de rotation de  $\mathcal{R}_i$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  (supposé

inertiel)  
 $\vec{\omega}_i = \frac{d}{dt} (0_0 \vec{0}_i^*)$  dans  $\mathcal{R}_0$ .

$\vec{v}_i = \frac{d}{dt} (0_0 \vec{G}_i)$  dans  $\mathcal{R}_0$ .

$\vec{\omega}_{mi}$  : vecteur vitesse instantanée de rotation du rotor de  $\mathcal{M}_{i+1}$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$

$\vec{f}_{ei}$  : force inertielle du corps  $C_i^+$

$\vec{c}_{ai}$  = moment inertielle du rotor du moteur  $\mathcal{M}_{i+1}$  en son centre de gravité

$\vec{c}_{ci}$  : moment inertielle en  $G_i$  du corps  $C_i^+$  diminué de  $\vec{c}_{ai}$

## II.1 - Récurrence avant

Pour  $i = 1$  à  $n$ , on a alors les formules de récurrence suivantes :

$$\vec{\lambda}_{i-1} = \vec{\ell}_{i-1} + \tau_i q_i \vec{k}_i$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega}_{m_{i-1}} &= \vec{\omega}_{i-1} + \alpha_i \dot{q}_i \vec{\varepsilon}_{i-1} \\ \vec{\omega}_i &= \vec{\omega}_{i-1} + \rho_i \dot{q}_i \vec{k}_i \\ \vec{w}_i &= \vec{w}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{\lambda}_{i-1} + \tau_i \dot{q}_i \vec{k}_i \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \wedge \vec{d}_i \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{m_{i-1}} &= \vec{\omega}_{i-1} + \alpha_i (\ddot{q}_i \vec{\varepsilon}_{i-1} + \dot{q}_i \vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{\varepsilon}_{i-1}) \\ \vec{\omega}_i &= \vec{\omega}_{i-1} + \rho_i (\ddot{q}_i \vec{k}_i + \dot{q}_i \vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{k}_i) \\ \vec{w}_i &= \vec{w}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{\lambda}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \wedge (\vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{\lambda}_{i-1}) + \tau_i (\ddot{q}_i \vec{k}_i + 2\dot{q}_i \vec{\omega}_{i-1} \wedge \vec{k}_i) \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \wedge \vec{d}_i + \vec{\omega}_i \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{d}_i) \\ \vec{f}_{e_i} &= m_i (\vec{v}_i - \vec{g}) \\ \vec{c}_{a_{i-1}} &= J_{m_{i-1}}(\vec{\omega}_{m_{i-1}}) + \vec{\omega}_{m_{i-1}} \wedge J_{m_{i-1}}(\vec{\omega}_{m_{i-1}}) \\ \vec{c}_{c_i} &= J'_i(\vec{\omega}_i) + \vec{\omega}_i \wedge J'_i(\vec{\omega}_i) \end{aligned}$$

Ces formules sont initialisées par

$$\vec{w}_0 = \vec{\omega}_0 = \vec{v}_0 = \vec{\lambda}_0 = \vec{0}$$

## II.2 - Récurrence arrière

Notons  $\vec{f}_i, \vec{c}_i$  le torseur exercé en  $O_i^+$  sur le corps  $C_i^+$  par le reste du manipulateur. Les formules de récurrence arrière sont obtenues en écrivant les théorèmes généraux de la mécanique, à chaque itération, à l'ensemble constitué par le corps  $C_i$  et par l'actionneur  $\mathcal{M}_{i+1}$  porté par ce corps. Compte tenu de la signification des données massiques et inertielles, on a pour  $i = n$  à  $1$  les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{f}_i &= \vec{f}_{i+1} + \vec{f}_{e_i} \\ \vec{c}_i &= \vec{c}_{i+1} + \vec{d}_i \wedge \vec{f}_{e_i} + \vec{\lambda}_i \wedge \vec{f}_{i+1} + \vec{c}_{c_i} + \vec{c}_{a_i} \\ q_{a_i} &= (\tau_i \vec{f}_i + \rho_i \vec{c}_i) \cdot \vec{k}_i + \alpha_i \vec{c}_{a_{i-1}} \cdot \vec{\varepsilon}_{i-1} \end{aligned}$$

Les formules sont initialisées avec  $\vec{c}_{a_{n+1}} = \vec{f}_{n+1} = \vec{c}_{n+1} = \vec{0}$

Les  $q_{a_i}$  seront appelées forces généralisées axiales. L'algorithme de Newton-Euler est utilisé ici comme méthode de calcul du vecteur  $q_a$  :

$$q_a = Q_a(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

## III - CALCUL DE LA MATRICE D'ENERGIE CINETIQUE

L'algorithme de calcul par récurrence arrière [MAM 81] des éléments  $a_{ij}$  de la matrice d'énergie cinétique  $A$  a été étendu ici au cas du manipulateur motorisé.

### III.1 - Etablissement des formules de récurrence

Appelons  $e_i$  l'énergie cinétique de l'ensemble corps  $C_i$  avec actionneur  $\mathcal{M}_{i+1}$ . Compte tenu de la signification des données massiques et inertielles, on a :

$$2e_i = m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{\omega}_i \cdot \mathbf{J}'_i(\vec{\omega}_i) + \vec{\omega}_{m_i} \cdot \mathbf{J}_{m_i}(\vec{\omega}_{m_i})$$

Posons :

$$\begin{aligned} 2e_k^- &= \sum_{i=k}^n 2e_i \\ &= \mu_k \vec{w}_k \cdot \vec{w}_k + \vec{\omega}_k \cdot \mathbf{Q}_k(\vec{\omega}_k) + 2\vec{w}_k \cdot (\vec{n}_k \times \vec{\omega}_k) \\ &\quad + 2\vec{\omega}_k \cdot \sum_{i=k+1}^n \dot{q}_i \vec{g}_{ki} + 2\vec{w}_k \cdot \sum_{i=k+1}^n \dot{q}_i \vec{t}_{ki} + \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (2)$$

où les  $a_{ij}$  sont les éléments de la matrice d'énergie cinétique A.

En exprimant que :

$$2e_{k-1}^- = 2e_{k-1} + 2e_k^-$$

et en utilisant les formules de récurrence (1) pour mettre les termes du 2ème membre de l'expression précédente sous la même forme que (2), on obtient les formules de récurrence suivantes sur les facteurs de (2) :

$$\begin{aligned} \mu_{k-1} &= \mu_k + m_{k-1} \\ \mathbf{Q}_{k-1} &= \mathbf{Q}_k + \mathbf{J}_{k-1} - m_{k-1} \vec{d}_{k-1}^2 - \mu_k \vec{\lambda}_{k-1}^2 + \vec{\lambda}_{k-1} \vec{n}_k + (\vec{\lambda}_{k-1} \vec{n}_k)^t \\ \vec{n}_{k-1} &= \vec{n}_k - m_{k-1} \vec{d}_{k-1} - \mu_k \vec{\lambda}_{k-1} \\ \vec{g}_{k-1,k} &= \alpha_k \mathbf{j}_{m_k} \vec{e}_{k-1} + \tau_k (\mu_k \vec{\lambda}_{k-1} - \vec{n}_k) \times \vec{k}_k + \rho_k [\mathbf{Q}_k(\vec{k}_k) + \vec{\lambda}_{k-1} \times (\vec{n}_k \times \vec{k}_k)] \\ \vec{t}_{k-1,k} &= \tau_k \mu_k \vec{k}_k + \rho_k \vec{n}_k \times \vec{k}_k \\ a_{kk} &= \alpha_k^2 \mathbf{j}_{m_k} + \tau_k \mu_k + \rho_k \vec{k}_k \cdot \mathbf{Q}_k(\vec{k}_k) \\ \vec{g}_{k-1,i} &= \vec{g}_{ki} + \vec{\lambda}_{k-1} \times \vec{t}_{ki} \\ \vec{t}_{k-1,i} &= \vec{t}_{ki} \\ a_{ki} &= (\rho_k \vec{g}_{ki} + \tau_k \vec{t}_{ki}) \cdot \vec{k}_k \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{g}_{k-1,i} \\ \vec{t}_{k-1,i} \\ a_{ki} \end{aligned}} \right\} \text{ pour } i = k+1 \text{ à } n$$

### III.2 - Algorithme de calcul des éléments de A

L'algorithme proposé ici explicite l'organisation des calculs des composantes des vecteurs et tenseurs définis ci-dessus. Il conduit au calcul par récurrence arrière des  $a_{ij}$ .

Les composantes des vecteurs et tenseurs sont toujours exprimées dans la base relative à l'indice (ou au premier indice quand il y en a deux) du vecteur ou tenseur considéré, on conserve la notation  $\times$  pour calculer les composantes d'un produit vectoriel. L'algorithme comporte trois étapes :

#### . Première étape

Les quantités suivantes indépendantes de la configuration sont pré-calculées pour  $k = 1$  à  $n$  :

$$\mu_k = \sum_{i=k}^n m_i$$

$$C_k = I_k - m_k \tilde{d}_k^2 - \rho_{k+1} \mu_{k+1} \tilde{\ell}_k^2$$

$$b_k = -m_k d_k - \rho_{k+1} \mu_{k+1} \ell_k$$

ainsi que :

$$a_{nn} = \tau_n \mu_n + \rho_n C_n \quad (3,3)$$

ces quantités font apparaître les masses et inerties des "corps augmentés".

### . Deuxième étape

Les quantités suivantes dépendant de la configuration sont calculées pour  $k=2$  à  $n$

$$\lambda_{k-1} = \ell_{k-1} + \tau_k q_k P_k \quad (.3)$$

$$S_k = P_k [\tau_k I + \rho_k R_k]$$

$S_1$  n'est pas calculé, en effet A est indépendante de  $q_1$ .

### . Troisième étape : récurrence arrière

Initialisation

$$n' \leftarrow b_n$$

$$Q \leftarrow C_n$$

Boucle générale de récurrence arrière  $k = n$  à  $2$  :

$$n' \leftarrow S_k n'$$

$$b' \leftarrow -\tau_k \mu_k \lambda_{k-1}$$

$$n'' \leftarrow n' + \tau_k b'$$

$$Q \leftarrow S_k Q$$

Calcul du terme  $a_{k-1,k}$

$$t \leftarrow \tau_k \mu_k P_k \quad (.3) + \rho_k n' \times P_k \quad (.3)$$

$$g \leftarrow \alpha_k j_{m_k} \varepsilon_{k-1} - \tau_k n'' \times P_k \quad (.3) + \rho_k [Q \quad (.3) + \lambda_{k-1} \times t]$$

$$a_{k-1,k} \leftarrow \tau_{k-1} t \quad (3) + \rho_{k-1} g \quad (3)$$

Calcul des termes supérieurs (sauf pour  $k=2$ ) ; boucle interne de récurrence arrière pour  $i = k-1$  à  $2$  :

$$\begin{cases} t \leftarrow S_i t \\ g \leftarrow S_i g + \lambda_{i-1} \times t \\ a_{i-1,k} \leftarrow \tau_{i-1} t \quad (3) + \rho_{i-1} g \quad (3) \end{cases}$$

Calcul du terme diagonal précédent  $a_{k-1,k-1}$

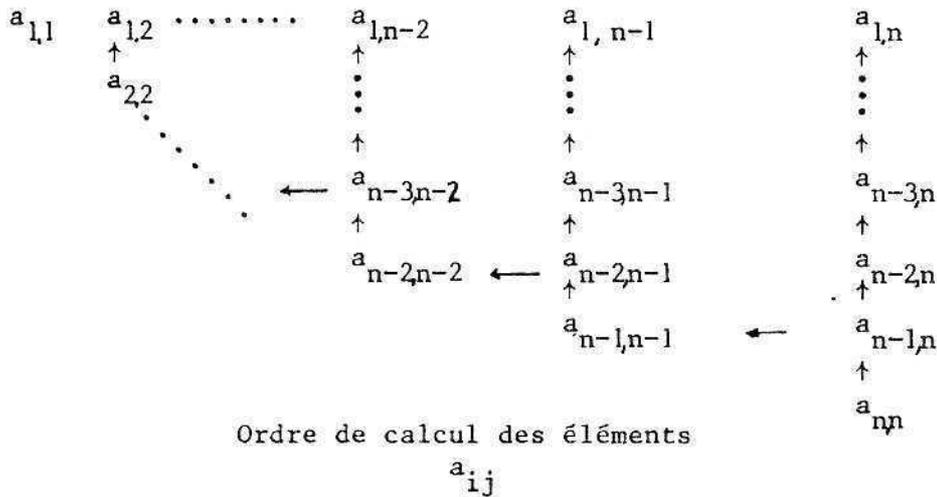
$$Q' \leftarrow \tilde{\lambda}_{k-1} \tilde{n}'$$

$$Q \leftarrow C_{k-1} + Q S_k^t + Q' + Q'^t + \tau_k \tilde{\lambda}_{k-1} \tilde{b}'$$

$$a_{k-1,k-1} \leftarrow \alpha_{k-1}^2 j_{m_{k-1}} + \tau_{k-1} \mu_{k-1} + \rho_{k-1} Q \quad (3,3)$$

$$n' \leftarrow b_{k-1} + n''$$

Cet algorithme effectue le calcul de la matrice d'énergie cinétique, en utilisant sa propriété de symétrie, dans l'ordre suivant :



#### IV - MODELE DE SIMULATION

Le formalisme de Lagrange permet d'obtenir les équations de la dynamique du manipulateur sous la forme :

$$A(q) \cdot \ddot{q} + s(q, \dot{q}) = q_a$$

où  $s(q, \dot{q})$  est un vecteur complémentaire de forces généralisées incluant les forces de pesanteur, centrifuges coriolis... et  $q_a$  le vecteur des forces généralisées axiales précédemment défini. On constate immédiatement en faisant  $\ddot{q} = 0$  dans ce système que :

$$s(q, \dot{q}) = Q_a(q, \dot{q}, 0)$$

L'algorithme de Newton-Euler peut donc être utilisé (avec  $\ddot{q}$  nul) pour calculer le vecteur complémentaire  $s$ .

- Appelons  $c_i$  le couple généré par le système de puissance du moteur. La force généralisée axiale  $q_{a_i}$  est alors donnée par :

$$q_{a_i} = \alpha_i c_{m_i} - \xi_{v_i} \dot{q}_i - q_{s_i} \quad (\text{signe de } \dot{q}_i) \quad (3)$$

Le modèle de simulation du manipulateur motorisé s'écrit :

$$\ddot{q} = A^{-1} [q_a - Q_a(q, \dot{q}, 0)]$$

$A$  est calculé par l'algorithme récurrent arrière  
 $Q_a(q, \dot{q}, 0)$  est calculé par l'algorithme de Newton-Euler  
 $q_a$  est donné par l'expression (3).

#### VI.1 - Coût en opérations arithmétiques des algorithmes présentés

Afin de permettre une comparaison avec les résultats publiés sur ce sujet, nous avons évalué le nombre de multiplications et additions des différents algorithmes proposés. Cette évaluation est faite sans prendre en compte les actionneurs, pour un manipulateur ne possédant que des liaisons rotoïdes, avec une disposition quelconque des corps et des axes d'articulations.

. Calcul des matrices de changement de base  $S_i$ ,  $i = 1$  à  $n$  :

$$M_1 = 12n \quad A_1 = 6n$$

à partir des  $\sin(q_i)$  et  $\cos(q_i)$

. Algorithme de Newton-Euler : calcul de  $Q_a(q, \dot{q}, \ddot{q})$

$$M_2 = 149n - 89 \quad A_2 = 130n - 76$$

. Algorithme de Mampey : calcul de  $A(q)$

$$M_3 = 12n^2 + 26n - 47 \quad A_3 = 9n^2 + 35n - 67$$

. Résolution du système par Choleski [BOU 68]

$$M_4 = (n^3 + 9n^2 - 10n)/2 \quad A_4 = (n^2 + 3n)/2$$

n=6	Multiplications	Additions
Matrices de passage	48	36
Newton Euler	805	704
Mampey	541	467
Choleski	240	27
TOTAL	1 634	1 234

Application numérique au cas n = 6

Notre évaluation du coût en opérations de l'algorithme de Newton-Euler recoupe celle faite par Hollerbach [HOL 80]. On voit donc tout l'intérêt de cet algorithme qui apparait deux fois plus rapide pour n = 6 que la méthode de Uicker Kahn améliorée par S.Megahed et M.Renaud [MEG 82]. L'algorithme de calcul de la matrice d'énergie cinétique par récurrence arrière est à notre connaissance deux fois plus rapide que les algorithmes concurrents à l'exception des méthodes évaluant les éléments  $a_{ij}$  par interpolation dans l'espace d'état sur des valeurs précalculées [HOR 78]. Ces méthodes ont le désavantage de demander une place mémoire très importante qui augmente exponentiellement avec la précision requise pour les calculs. L'algorithme de Choleski pour résoudre  $A \ddot{q} = y$  est cité ici à titre illustratif pour compléter l'évaluation du coût d'une boucle de simulation. [BOU 68]

#### IV.2 - Validation de la simulation

Les algorithmes présentés ont été utilisés pour bâtir une simulation générale de la dynamique des manipulateurs à n degrés de liberté. La simulation a été étendue au cas où le corps porteur  $C_0$  est lui même mobile dans l'espace (avec 6 degrés de liberté supplémentaires) et soumis à des forces extérieures. Cette simulation a été utilisée [CHR 82] pour simuler un satellite actif portant un manipulateur (ensemble à 12 degrés de liberté). La validation de la simulation a été obtenue de deux manières différentes :

- validation par surveillance des 7 grandeurs cinétiques : un modèle externe à la simulation vérifie les théorèmes généraux sur les grandeurs cinétiques

- 1/ - variation de l'énergie cinétique = travail des forces intérieures et extérieures
- 2/ - variation du vecteur quantité de mouvement = intégrale des forces extérieures
- 3/ - variation du vecteur moment cinétique = intégrale des moments des forces extérieures.

Chaque vecteur ayant trois composantes, 7 grandeurs scalaires sont ainsi contrôlées. Ce test extrêmement sensible est à notre avis un outil indispensable de vérification du logiciel associé aux algorithmes de simulation.

- validation par comparaison avec une simulation bâtie indépendamment sur des principes différents, mise en oeuvre par le CNES. La validation de l'introduction de la motorisation dans la simulation est en cours.

#### V - CONCLUSION

Nous avons présenté ici des algorithmes très performants qui permettent soit d'envisager de calculer des couples de commande en temps réel (algorithme de Newton-Euler) soit d'effectuer des simulations de la dynamique des manipulateurs sur des mini-calculateurs (algorithme de Mampey). Aux éléments habituellement pris en compte dans la modélisation du manipulateur, nous avons ajouté les effets dynamiques des moteurs et des organes de transmission avec prise

en compte des frottements. La validation des algorithmes présentés a été effectuée avec la simulation sur un mini ordinateur 32 bits Perkin Elmer d'un satellite porteur d'un manipulateur à 6 moteurs (12 degrés de liberté). Bien que l'algorithme utilisé soit général, le temps de calcul obtenu pour une boucle élémentaire de simulation (30 ms) nous a permis d'obtenir dans ce cas particulier une simulation temps réel satisfaisante.

## VI - BIBLIOGRAPHIE

- [BOU 68] R.Boudarel, J.Delmas, P.Guichet ; (1968) ; Commande optimale des processus - Tome 2 - Dunod Paris
- [HOL 80] John M.Hollerbach ; (1980) ; A recursive Lagrangian Formulation of manipulator dynamics and a comparative study of dynamics formulation complexity ; IEEE Trans. Syst. Man & Cybernetics, SMC 10-11, pp 730-736
- [MAM 81] R.Mampey, M.Llibre ; (1981) ; Ré-étude de définition d'un simulateur pour manipulations spatiales - Tâche 3 - Rapport DERA-CERT n° 3/7271, contrat CNES 800810 - avril -
- [MEG 82] S.Megahed, M.Renaud ; (1982) ; Minimisation du temps de calcul pour la commande dynamique des robots manipulateurs ; Etat de la Robotique en France, Tome 1 Recherche - Hermes - pp 81-97.
- [CHR 82] J.P.Chrétien, M.Llibre, A.Piquereau ; (1982) ; Commande en boucle fermée d'un manipulateur spatial ; Rapport DERA-CERT n°1/7322, contrat CNES n° 82 0766, Décembre.
- [HOR 78] B.K.P. Horn and M.H. Raibert ; (1978) ; Configuration space control The Industrial Robot, pp 69-73. June.

### ANNEXE : Illustration des temps de calcul obtenus

A titre d'illustration, nous indiquons ci-dessous les temps de calculs des modules utilisés dans la simulation mentionnée plus haut d'un manipulateur porté par un corps rigide mobile.

La configuration comporte 5 articulations rotoïdes et une articulation terminale prismatique. Les modules écrits en Fortran effectuent les opérations suivantes :

REPERE	Calculs des matrices de passage d'un corps au suivant	} Calcul trigonométriques
ATSAT	Calcul de l'attitude du corps rigide (matrice complète de rotation)	
CINETI	Calcul de la matrice cinétique A telle que $2T = \dot{q}^t A \dot{q}$ (projection dans un repère lié au corps rigide)	
CINABS	Composantes de A en projection dans un repère inertiel	
EULNEW	Calcul de termes s dépendant de $\dot{q}$ et q	
CHOLES	Résolution de $A\ddot{q} = \dot{q}_a - s$	

Les calculs sont effectués sur Perkin-Elmer 3242 en réel simple précision (24 bits pour la mantisse) ; trois compilateurs sont disponibles : développeur (VII D), optimiseur (VII O) et optimiseur avec inclusion de sous-programmes dans le flot d'instructions (VII Z). Les temps sont en ms.

	FVII D	FVII O	FVII Z
REPERE	0.80	0.65	idem O
ATSAT	0.36	0.24	idem O
CINETI	15.5	13.9	8.5
CINABS	2.0	1.3	idem O
EULNEW	16.0	14.9	7.8
CHOLES	25.5	12.0	idem O